IES Fernando de Herrera **Curso 2017 / 18**

Segundo trimestre – Observación evaluable escrita nº 1 – 2º Bach CCSS

NOMBRE: ____

Instrucciones: **1)** Todos los **folios** deben tener el **nombre** y estar **numerados** en la parte superior. **2)** Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. **3)** No se puede usar **corrector ni lápiz**, y el bolígrafo debe ser de **tinta indeleble**. Se aconseja no usar borrador. **4)** Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar** la respuesta a una pregunta con las de otras. **5)** **Desatender las instrucciones puede penalizarse con hasta 1 punto** o la **anulación** en caso de usar tinta corregible.

1) Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x-2} & \text{si} \quad x \le 0 \\ \dfrac{2x^2+x}{4} & \text{si} \quad 0 < x < 2 \\ x^2 - 1.5 & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases}$$

a) Estudiar la continuidad, clasificando las discontinuidades si las hay. *(1.5 ptos)*
b) Estudiar la derivabilidad en su dominio. *(1 punto)*
c) Calcular la ecuación de la recta tangente a f en $x = -1$. *(1 punto)*
d) Determinar las asíntotas, caso de tenerlas. *(1 punto)*

2) Estudio completo y gráfica de la función $y = x^3 + 3x^2 + 3x$.
(Dom+Par/Impar+Int. Ejes+Asíntotas: 0.5p; Monotonía/Extr.relat.:0,5p; Curvatura/P. de Infl:0,5p; Gráfica deducida del estudio: 1p)

3) Calcular y simplificar las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{-2x^2+x}{(1-x)^2}$ *(1 punto)*
b) $g(x) = 2^{1-x^3}(1-x^3)^2$ *(1 punto)*
c) $h(x) = \log(1 - x^3)$ *(1 punto)*

SOLUCIONES

1) Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x-2} & \text{si} \quad x \le 0 \\ \dfrac{2x^2+x}{4} & \text{si} \quad 0 < x < 2 \\ x^2 - 1.5 & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases}$$

a) Estudiar la continuidad, clasificando las discontinuidades si las hay. *(1.5 ptos)*

- $(-\infty, 0)$: f coincide con $y = -\dfrac{1}{x-2}$ que, al ser una función elemental, es continua en su dominio. Lo que significa que la única discontinuidad la tiene en $x = 2$, que no está en el intervalo que estamos estudiando. Por tanto, f es continua en todo el intervalo.
- $(0, 2) \cup (2, +\infty)$: f es continua, por coincidir con funciones cuya expresión es polinómica.
- $x = 0$: 1) $\exists f(0) = ½$

  2) $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{-1}{x-2} = ½$; $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x^2+x}{4} = 0$

  Al existir los dos límites laterales, pero sin coincidir, en $x = 0$ presenta una discontinuidad de salto finito.
- $x = 2$: 1) $\exists f(2) = 4 - 1.5 = 2.5$

  2) $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{2x^2+x}{4} = \frac{10}{4} = 2.5$; $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (x^2 - 1.5) = 2.5$

  Por tanto, al coincidir los tres resultados, es continua en $x = 2$.

$\boxed{\text{En resumen, } f \text{ es continua en } \mathbb{R} - \{0\}, \text{ y tiene una discontinuidad de salto finito en } x = 0.}$

b) Estudiar la derivabilidad en su dominio. *(1 punto)*

Podemos aplicar las fórmulas de las tablas de derivadas en intervalos abiertos, por lo que, como:

- $y = -\dfrac{1}{x-2} \Rightarrow y' = -\dfrac{-1}{(x-2)^2}$
- $y = \dfrac{2x^2+x}{4} \Rightarrow y' = \dfrac{4x+1}{4}$

Se tiene que:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x-2)^2} & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{4x+1}{4} & \text{si} \quad 0 < x < 2 \\ 2x & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

a falta de estudiar la derivada en $x = 0$ y en $x = 2$.

- $x = 0$: $\nexists f'(0)$, porque f no es continua en 0.

- $x = 2$: $f\,'(2^-) = \frac{8+1}{4} = \frac{9}{4}$; $f\,'(2^+) = 2\cdot 2 = 4 \Rightarrow \nexists f\,'(2)$.

Por tanto, $\boxed{\text{la expresión definitiva de } f\,'(x) \text{ es la anterior}}$.

c) Calcular la ecuación de la recta tangente a f en $x = -1$. *(1 punto)*

En un entorno de $x = -1$, $f(x) = -\frac{1}{x-2}$, por lo que ignoramos el resto de la función. Sabemos, además, que $f\,'(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$. Por ello:

- Punto de tangencia: $f(-1) = 1/3$: $(-1, 1/3)$.
- Pendiente de la tangente: $m = f\,'(-1) = 1/9$.
- Ecuación de la tangente: $y - \frac{1}{3} = \frac{1}{9}(x+1) \Rightarrow y = \frac{1}{9}x + \frac{1}{9} + \frac{1}{3} \Rightarrow$

$$\boxed{y = \frac{1}{9}x + \frac{4}{9}}$$

d) Determinar las asíntotas, caso de tenerlas. *(1 punto)*

- Verticales: Las tendrá en puntos de discontinuidad asintótica que, como ya hemos estudiado la continuidad, sabemos que $\boxed{\text{no tiene}}$.
- Horizontales: Como las funciones polinómicas no tienen asíntotas, $\boxed{\text{cuando } x \to +\infty \text{ no tiene asíntota horizontal}}$. Pero:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{x-2} = \left(\frac{-1}{-\infty}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{\text{La recta de ec. } y = 0 \text{ es A.H. si } x \to -\infty}.$$

- Oblicuas: Si $x \to -\infty$ tiene una horizontal, por lo que si calculamos la oblicua obtendríamos el mismo resultado. Y si $x \to +\infty$ no tiene, porque es polinómica.

2) Estudio completo y gráfica de la función $y = x^3 + 3x^2 + 3x$.
(Dom+Par/Impar+Int. Ejes+Asíntotas: 0.5p; Monotonía/Extr.relat.:0,5p; Curvatura/P. de Infl:0,5p; Gráfica deducida del estudio: 1p)

- Dominio: $\boxed{\mathbb{R}}$ (es polinómica).
- Par / Impar: $f(-x) = (-x)^3 + 3(-x)^2 + 3(-x) = -x^3 + 3x^2 - 3x$, que no coincide con $f(x)$ ni con $-f(x) \Rightarrow \boxed{\text{Ni par, ni impar}}$.
- Intersecciones con los ejes: $x = 0 \Rightarrow y = 0$: $\boxed{(0,0)}$. $y = 0 \Rightarrow 0 = x^3 + 3x^2 + 3x \Rightarrow x(x^2 + 3x + 3) = 0 \Rightarrow$ (Un producto vale 0 si alguno de los factores vale 0 y todos ellos existen): $\begin{cases} x = 0 \quad \text{ó:} \\ x^2 + 3x + 3 = 0 \end{cases}$

  La primera posibilidad nos lleva al mismo punto anterior: (0, 0). La segunda es una ecuación de segundo grado, que no tiene solución, pues:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-12}}{2}$$

- Asíntotas: Las funciones polinómicas $\boxed{\text{no tienen}}$ asíntotas.
- Monotonía. Extremos relativos o locales: $\boxed{f\,'(x) = 3x^2 + 6x + 3}$
  - Discontinuidades de f o $f\,'$: No hay (son polinómicas).

- $f'(x) = 0$: $3(x^2 + 2x + 1) = 0 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = -1$

Dividimos el dominio en intervalos mediante el único punto obtenido:

	$(0, -1)$	-1	$(-1, +\infty)$
f'	+	0	+
f	↗ crec	tg horiz	↗ crec

$\boxed{\text{La función no tiene extremos relativos}}$.

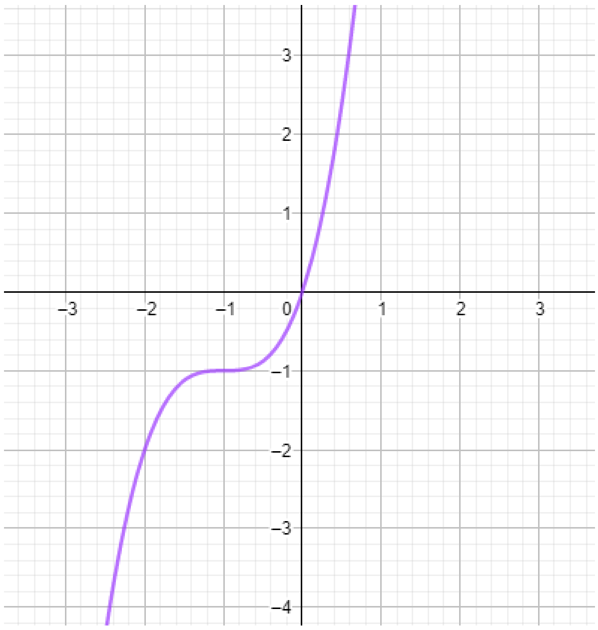
- <u>Curvatura. Puntos de inflexión</u>: $\boxed{f''(x) = 6x + 6}$.
  - Discontinuidades de f, f' o f'': No hay (son polinómicas).
  - $f''(x) = 0$: $6(x + 1) = 0 \Rightarrow x = -1$

Dividimos el dominio en intervalos mediante el único punto obtenido:

	$(0, -1)$	-1	$(-1, +\infty)$
f''	–	0	+
f	∩ cóncava	P.I.	∪ convexa

$\boxed{\text{Punto de inflexión en } (-1, -1)}$, pues $f(-1) = -1$. Además, la tangente en este punto es horizontal, como sabemos del apartado anterior.

- <u>Gráfica</u>: La reproducimos junto a estas líneas, fruto de todo el estudio anterior.



3) Calcular y simplificar las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{-2x^2 + x}{(1-x)^2}$ *(1 punto)*

$$f'(x) = \frac{(-4x+1)(1-x)^2 - (-2x^2+x)2(1-x)(-1)}{(1-x)^4} =$$

$$= \frac{(1-x)[(-4x+1)(1-x)+2(-2x^2+x)]}{(1-x)^4} = \frac{-4x+4x^2+1-x-4x^2+2x}{(1-x)^3} = \boxed{\frac{-3x+1}{(1-x)^3}}$$

b) $g(x) = 2^{1-x^3}(1-x^3)^2$ *(1 punto)*

$$g'(x) = 2^{1-x^3}(-3x^2)(\ln 2)(1-x^3)^2 + 2^{1-x^3}2(1-x^3)(-3x^2) =$$

$$= 2^{1-x^3}(-3x^2)(1-x^3)[(\ln 2)(1-x^3)+2] = \boxed{2^{1-x^3}(3x^5-3x^2)[(1-x^3)\ln 2+2]}$$

Hay otras posibilidades de simplificación, procedentes de sacar factor común, pero nos conformaremos con ésta.

c) $h(x) = \log(1 - x^3)$ *(1 punto)*

$$h'(x) = \boxed{\frac{-3x^2}{1-x^3}\,\frac{1}{\ln 10}}$$

NOMBRE: ____

Instrucciones: **1)** Todos los **folios** deben tener el **nombre** y estar **numerados** en la parte superior. **2)** Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. **3)** No se puede usar **corrector ni lápiz**, y el bolígrafo debe ser de **tinta indeleble**. Se aconseja no usar borrador. **4)** Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar** la respuesta a una pregunta con las de otras. **5)** **Desatender las instrucciones puede penalizarse con hasta 1 punto** o la **anulación** en caso de usar tinta corregible.

1) En una empresa han hecho un estudio sobre la rentabilidad de su inversión en publicidad, y han llegado a la conclusión de que el beneficio obtenido, en miles de euros, viene dado por la expresión $B(x) = 0.5x^2 - 4x + 6$, siendo x la inversión en publicidad, en miles de euros, con x en el intervalo $[0, 10]$. ¿Cuánto tiene que invertir la empresa en publicidad para obtener el mayor beneficio posible, y cuál es ese beneficio? *(1,5 puntos)*

2) Hallar los valores de a y b para que la función $g(x) = ax + \dfrac{b}{x}$ tenga un extremo relativo en el punto $(1, 2)$. *(1,5 puntos)*

3) Derivar y simplificar: *(2 puntos)*
   a) $f(x) = (x^3 + 1)\, e^{7x}$
   b) $g(x) = 3^x \ln(2x + 5)$
   c) $h(x) = \dfrac{x^2 - 2}{(x+1)^2}$

4) Sea la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-4} & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x+3 & \text{si} \quad 0 < x < 2 \\ x^2 + 1 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$.
   a) Estudiar la continuidad, clasificando las discontinuidades, si tiene alguna. *(1 pto)*
   b) Estudiar la derivabilidad. *(1 punto)*
   c) Estudiar la monotonía, indicando extremos relativos y puntos angulosos, si los tiene. *(1 punto)*
   d) Calcular sus asíntotas. *(1 punto)*
   e) Hallar la ecuación de la recta tangente en $x = -2$. *(1 punto)*

SOLUCIONES

1) En una empresa han hecho un estudio sobre la rentabilidad de su inversión en publicidad, y han llegado a la conclusión de que el beneficio obtenido, en miles de euros, viene dado por la expresión $B(x) = 0.5x^2 - 4x + 6$, siendo x la inversión en publicidad, en miles de euros, con x en el intervalo [0, 10]. ¿Cuánto tiene que invertir la empresa en publicidad para obtener el mayor beneficio posible, y cuál es ese beneficio? *(1,5 puntos)*

El método estándar es el siguiente. Primero, averiguamos los puntos a estudiar:

- Extremos del dominio: 0 y 10.
- Discontinuidades de B: No tiene (es polinómica).
- Discontinuidades de B': $B'(x) = x - 4$, por lo que tampoco tiene.
- $B'(x) = 0$: $x = 4$.

Ahora, comparamos sus imágenes (o límite, si no hubiese imagen o si fuese un punto de discontinuidad de B donde hay que comprobar ambos, límite e imagen si la hay; pero no es el caso). El mayor valor de todos será el máximo absoluto si es imagen, o el supremo (que significa que no es alcanzado y no tendrá máximo absoluto) si es límite. O no habrá ni uno ni otro si el mayor resultado es $+\infty$:

- $B(0) = 6$
- $B(10) = 50 - 40 + 6 = 16$
- $B(4) = 8 - 16 + 6 = -2$

Por tanto, el mayor beneficio posible está en $x = 10$, o sea, con una inversión de 10000 euros, y asciende a 16000 euros.

2) Hallar los valores de a y b para que la función $g(x) = ax + \dfrac{b}{x}$ tenga un extremo relativo en el punto (1, 2). *(1,5 puntos)*

- Debe pasar por (1, 2) $\Rightarrow$ $g(1) = 2$ $\Rightarrow$ $\boxed{a + b = 2}$ (1)
- Para que sea extremo relativo, es suficiente exigir que $g'(1) = 0$ y $g''(1) \neq 0$.

  Ya que $g'(x) = a - \dfrac{b}{x^2}$, lo primero se traduce en: $\boxed{a - b = 0}$ (2)

Resolvemos el sistema formado por estas dos ecuaciones. De (2): $a = b$, que nos lleva, al sustituir en (1): $b + b = 2$ $\Rightarrow$ $2b = 2$ $\Rightarrow$ $b = 1$. Y como $a = b$, la solución es: $\boxed{a = b = 1}$. Como $g''(x) = \dfrac{2bx}{x^4} = \dfrac{2b}{x^3} = \dfrac{2}{x^3}$ $(b = 1) \Rightarrow g''(1) = 2 \neq 0$, por lo que se cumple la otra condición que teníamos pendiente para que hubiera extremo relativo.

3) Derivar y simplificar: *(2 puntos)*

a) $f(x) = (x^3 + 1)\, e^{7x}$

$$\boxed{f'(x) =}\ 3x^2 e^{7x} + (x^3 + 1)\, 7\, e^{7x} = \boxed{e^{7x}\,(7x^3 + 3x^2 + 7)}$$

b) $g(x) = 3^x \ln(2x + 5)$

$$\boxed{g'(x) =}\ 3^x \ln 3 \ln(2x + 5) + 3^x \frac{2}{2x+5} = \boxed{3^x\left(\ln 3 \ln(2x+5) + \frac{2}{2x+5}\right)}$$

c) $h(x) = \dfrac{x^2-2}{(x+1)^2}$

$$\boxed{h'(x) =} \frac{2x(x+1)^2-(x^2-2)2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{(x+1)[2x(x+1)-2(x^2-2)]}{(x+1)^4} =$$
$$= \frac{2x^2+2x-2x^2+4}{(x+1)^3} = \boxed{\frac{2x+4}{(x+1)^3}}$$

4) Sea la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-4} & \text{si} \quad x \le 0 \\ x+3 & \text{si} \quad 0 < x < 2 \\ x^2+1 & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases}$.

a) Estudiar la continuidad, clasificando las discontinuidades, si tiene alguna. *(1 pto)*

- $(-\infty, 0)$: f coincide con la función elemental $y = 1 / (x-4)$, que es, por ello, continua en su dominio. O sea, que su única discontinuidad está en $x = 4$ (que anula el denominador). Como $4 \notin (-\infty, 0)$, f es continua en este intervalo.
- $(0, 2) \cup (2, +\infty)$: f es continua por coincidir con funciones cuya expresión es polinómica.
- $x = 0$: 1) $\exists f(0) = 1 / (0-4) = -1/4$; 2) $\exists \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \exists \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x-4} = -\dfrac{1}{4}$; $\exists \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(x+3) = 3$. Como los límites laterales son finitos pero no coinciden, presenta una discontinuidad de salto finito.
- $x = 2$: 1) $\exists f(2) = 2^2 + 1 = 5$; 2) $\exists \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \exists \lim\limits_{x\to 2^-}(x+3) = 5$; $\exists \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}(x^2+1) = 5$. Como los tres resultados coinciden, es continua.

Así, $\boxed{f \text{ es continua en } \mathbb{R}-\{0\}, \text{ con una discontinuidad de salto finito en } x = 0}$.

b) Estudiar la derivabilidad. *(1 punto)*

Podemos aplicar los teoremas de cálculo de derivadas en intervalos abiertos, por lo que:

$$\boxed{f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{(x-4)^2} & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad 0 < x < 2 \\ 2x & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}}$$

Y nos falta conocer qué sucede en los puntos de conexión de definiciones de f, esto es, en 0 y en 2. Como en $x = 0$ f no es continua, no puede ser derivable en él. Y en $x = 2$: $f'(2^-) = 1$; $f'(2^+) = 2\cdot 2 = 4$, por lo que no es derivable en 2, puesto que no coinciden las derivadas laterales. Así que, definitivamente, la función derivada es la anterior, que recuadramos.

c) Estudiar la monotonía, indicando extremos relativos y puntos angulosos, si los tiene. *(1 punto)*

- Discontinuidades de f: $x = 0$.

- Discontinuidades de f': $x = 0$; $x = 2$.
- $f'(x) = 0$:
  - Si $x < 0$: $\frac{-1}{(x-4)^2} = 0$, que exige que $-1 = 0$, lo que no es posible para ningún x.
  - Si $0 < x < 2$: $1 = 0$, que tampoco es posible.
  - Si $x > 2$: $2x = 0 \Rightarrow x = 0$, que no sirve, porque no es mayor que 2.

Por tanto:

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
f'	–	$\nexists$	+	$\nexists$	+
f	↘ decrec	Salto fto	↗ crec	Pto ang	↗ crec

Sólo tiene un punto anguloso en (2, 5), puesto que f' no es continua, si bien existen las derivadas laterales, pero f sí lo es.

d) Calcular sus asíntotas. *(1 punto)*

- Verticales: La única discontinuidad está en 0 y es de salto finito (no es asintótica), por lo que no tiene asíntotas verticales.
- Horizontales: Si $x \to +\infty$, f no tiene asíntotas, porque coincide con una parábola. Pero $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x-4} = \left(\frac{1}{\infty}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{y = 0 \text{ es asíntota si}}$ $\boxed{x \to -\infty}$.
- Oblicuas: No las tiene, porque por un lado es una parábola y por el otro ya tiene una horizontal.

e) Hallar la ecuación de la recta tangente en $x = -2$. *(1 punto)*

- Punto de tangencia: $f(-2) = -1/6 \Rightarrow \boxed{(-2, -1/6)}$.
- Pendiente de la tangente: $f'(-2) = \frac{-1}{(-2-4)^2} = \frac{-1}{36}$
- Ecuación: $y + \frac{1}{6} = -\frac{1}{36}(x+2) \Rightarrow \frac{36y+6}{36} = \frac{-x-2}{36} \Rightarrow \boxed{x + 36y + 8 = 0}$.

En www.geogebra.org (opción *Geogebra Clásico*) puede verse la gráfica de la función, escribiendo: **f(x) = si(x<=0,1/(x–4),si(x<2,x+3,x^2+1))**