IES Fernando de Herrera **Curso 2017 / 18**
Segundo trimestre – Observación evaluable escrita nº 1 – 2º Bach CCSS

NOMBRE: ____

Instrucciones: **1)** Todos los **folios** deben tener el **nombre** y estar **numerados** en la parte superior. **2)** Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. **3)** No se puede usar **corrector ni lápiz**, y el bolígrafo debe ser de **tinta indeleble**. Se aconseja no usar borrador. **4)** Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar** la respuesta a una pregunta con las de otras. **5)** **<u>Desatender las instrucciones puede penalizarse con hasta 1 punto</u>** <u>o la</u> **<u>anulación</u>** en caso de usar tinta corregible.

1) Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x-2} & \text{si} \quad x \le 0 \\ \dfrac{2x^2+x}{4} & \text{si} \quad 0 < x < 2 \\ x^2 - 1.5 & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases}$$

a) Estudiar la continuidad, clasificando las discontinuidades si las hay. *(1.5 ptos)*
b) Estudiar la derivabilidad en su dominio. *(1 punto)*
c) Calcular la ecuación de la recta tangente a f en $x = -1$. *(1 punto)*
d) Determinar las asíntotas, caso de tenerlas. *(1 punto)*

2) Estudio completo y gráfica de la función $y = x^3 + 3x^2 + 3x$.
(Dom+Par/Impar+Int. Ejes+Asíntotas: 0.5p; Monotonía/Extr.relat.:0,5p; Curvatura/P. de Infl:0,5p; Gráfica deducida del estudio: 1p)

3) Calcular y simplificar las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{-2x^2+x}{(1-x)^2}$ *(1 punto)*
b) $g(x) = 2^{1-x^3}(1-x^3)^2$ *(1 punto)*
c) $h(x) = \log(1-x^3)$ *(1 punto)*

SOLUCIONES

1) Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x-2} & \text{si} \quad x \le 0 \\ \dfrac{2x^2+x}{4} & \text{si} \quad 0 < x < 2 \\ x^2 - 1.5 & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases}$$

a) Estudiar la continuidad, clasificando las discontinuidades si las hay. *(1.5 ptos)*

- $(-\infty, 0)$: f coincide con $y = -\dfrac{1}{x-2}$ que, al ser una función elemental, es continua en su dominio. Lo que significa que la única discontinuidad la tiene en $x = 2$, que no está en el intervalo que estamos estudiando. Por tanto, f es continua en todo el intervalo.
- $(0, 2) \cup (2, +\infty)$: f es continua, por coincidir con funciones cuya expresión es polinómica.
- $x = 0$: 1) $\exists f(0) = ½$

  2) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{-1}{x-2} = ½$; $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{2x^2+x}{4} = 0$

  Al existir los dos límites laterales, pero sin coincidir, en $x = 0$ presenta una discontinuidad de salto finito.
- $x = 2$: 1) $\exists f(2) = 4 - 1.5 = 2.5$

  2) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{2x^2+x}{4} = \dfrac{10}{4} = 2.5$; $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (x^2 - 1.5) = 2.5$

  Por tanto, al coincidir los tres resultados, es continua en $x = 2$.

$\boxed{\text{En resumen, } f \text{ es continua en } \mathbb{R} - \{0\}, \text{ y tiene una discontinuidad de salto finito en } x = 0.}$

b) Estudiar la derivabilidad en su dominio. *(1 punto)*

Podemos aplicar las fórmulas de las tablas de derivadas en intervalos abiertos, por lo que, como:

- $y = -\dfrac{1}{x-2} \Rightarrow y' = -\dfrac{-1}{(x-2)^2}$
- $y = \dfrac{2x^2+x}{4} \Rightarrow y' = \dfrac{4x+1}{4}$

Se tiene que:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x-2)^2} & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{4x+1}{4} & \text{si} \quad 0 < x < 2 \\ 2x & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

a falta de estudiar la derivada en $x = 0$ y en $x = 2$.

- $x = 0$: $\nexists f'(0)$, porque f no es continua en 0.

- $x = 2$: $f'(2^-) = \frac{8+1}{4} = \frac{9}{4}$; $f'(2^+) = 2\cdot 2 = 4 \Rightarrow \nexists f'(2)$.

Por tanto, $\boxed{\text{la expresión definitiva de } f'(x) \text{ es la anterior}}$.

c) Calcular la ecuación de la recta tangente a f en $x = -1$. *(1 punto)*

En un entorno de $x = -1$, $f(x) = -\frac{1}{x-2}$, por lo que ignoramos el resto de la función. Sabemos, además, que $f'(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$. Por ello:

- Punto de tangencia: $f(-1) = 1/3$: $(-1, 1/3)$.
- Pendiente de la tangente: $m = f'(-1) = 1/9$.
- Ecuación de la tangente: $y - \frac{1}{3} = \frac{1}{9}(x+1) \Rightarrow y = \frac{1}{9}x + \frac{1}{9} + \frac{1}{3} \Rightarrow$

$$\boxed{y = \frac{1}{9}x + \frac{4}{9}}$$

d) Determinar las asíntotas, caso de tenerlas. *(1 punto)*

- Verticales: Las tendrá en puntos de discontinuidad asintótica que, como ya hemos estudiado la continuidad, sabemos que $\boxed{\text{no tiene}}$.
- Horizontales: Como las funciones polinómicas no tienen asíntotas, $\boxed{\text{cuando } x \to +\infty \text{ no tiene asíntota horizontal}}$. Pero:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{x-2} = \left(\frac{-1}{-\infty}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{\text{La recta de ec. } y = 0 \text{ es A.H. si } x \to -\infty}.$$

- Oblicuas: Si $x \to -\infty$ tiene una horizontal, por lo que si calculamos la oblicua obtendríamos el mismo resultado. Y si $x \to +\infty$ no tiene, porque es polinómica.

2) Estudio completo y gráfica de la función $y = x^3 + 3x^2 + 3x$.
(Dom+Par/Impar+Int. Ejes+Asíntotas: 0.5p; Monotonía/Extr.relat.:0,5p; Curvatura/P. de Infl:0,5p; Gráfica deducida del estudio: 1p)

- Dominio: $\boxed{\mathbb{R}}$ (es polinómica).
- Par / Impar: $f(-x) = (-x)^3 + 3(-x)^2 + 3(-x) = -x^3 + 3x^2 - 3x$, que no coincide con $f(x)$ ni con $-f(x) \Rightarrow \boxed{\text{Ni par, ni impar}}$.
- Intersecciones con los ejes: $x = 0 \Rightarrow y = 0$: $\boxed{(0, 0)}$. $y = 0 \Rightarrow 0 = x^3 + 3x^2 + 3x \Rightarrow x(x^2 + 3x + 3) = 0 \Rightarrow$ (Un producto vale 0 si alguno de los factores vale 0 y todos ellos existen): $\begin{cases} x = 0 \quad \text{ó:} \\ x^2 + 3x + 3 = 0 \end{cases}$

  La primera posibilidad nos lleva al mismo punto anterior: (0, 0). La segunda es una ecuación de segundo grado, que no tiene solución, pues:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-12}}{2}$$

- Asíntotas: Las funciones polinómicas $\boxed{\text{no tienen}}$ asíntotas.
- Monotonía. Extremos relativos o locales: $\boxed{f'(x) = 3x^2 + 6x + 3}$
  - Discontinuidades de f o f': No hay (son polinómicas).

- $f'(x) = 0$: $3(x^2 + 2x + 1) = 0 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = -1$

Dividimos el dominio en intervalos mediante el único punto obtenido:

	(0, –1)	–1	(–1, +∞)
f'	+	0	+
f	↗ crec	tg horiz	↗ crec

$\boxed{\text{La función no tiene extremos relativos}}$.

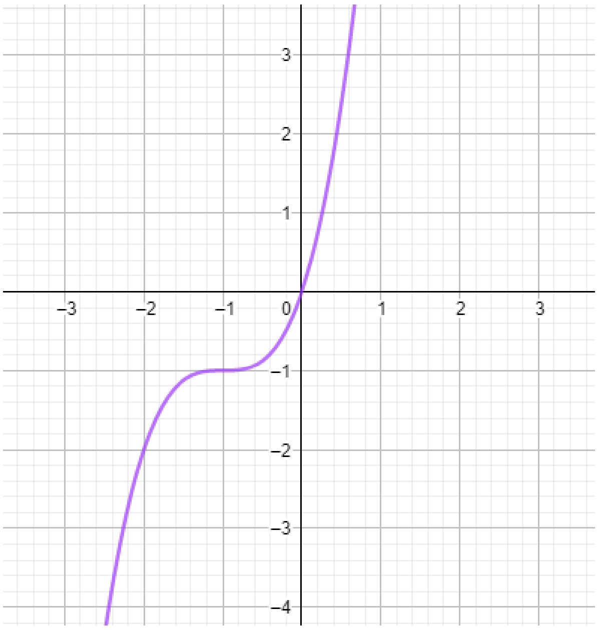
- Curvatura. Puntos de inflexión: $\boxed{f''(x) = 6x + 6}$.
  - Discontinuidades de f, f' o f'': No hay (son polinómicas).
  - $f''(x) = 0$: $6(x + 1) = 0 \Rightarrow x = -1$

Dividimos el dominio en intervalos mediante el único punto obtenido:

	(0, –1)	–1	(–1, +∞)
f''	–	0	+
f	∩ cóncava	P.I.	∪ convexa

$\boxed{\text{Punto de inflexión en } (-1, -1)}$, pues $f(-1) = -1$. Además, la tangente en este punto es horizontal, como sabemos del apartado anterior.

- Gráfica: La reproducimos junto a estas líneas, fruto de todo el estudio anterior.



3) Calcular y simplificar las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{-2x^2 + x}{(1-x)^2}$ *(1 punto)*

$$f'(x) = \frac{(-4x+1)(1-x)^2 - (-2x^2+x)2(1-x)(-1)}{(1-x)^4} =$$

$$= \frac{(1-x)[(-4x+1)(1-x)+2(-2x^2+x)]}{(1-x)^4} = \frac{-4x+4x^2+1-x-4x^2+2x}{(1-x)^3} = \boxed{\frac{-3x+1}{(1-x)^3}}$$

b) $g(x) = 2^{1-x^3}(1-x^3)^2$ *(1 punto)*

$$g'(x) = 2^{1-x^3}(-3x^2)(\ln 2)(1-x^3)^2 + 2^{1-x^3}2(1-x^3)(-3x^2) =$$

$$= 2^{1-x^3}(-3x^2)(1-x^3)[(\ln 2)(1-x^3)+2] = \boxed{2^{1-x^3}(3x^5-3x^2)[(1-x^3)\ln 2+2]}$$

Hay otras posibilidades de simplificación, procedentes de sacar factor común, pero nos conformaremos con ésta.

c) $h(x) = \log(1 - x^3)$ *(1 punto)*

$$h'(x) = \boxed{\frac{-3x^2}{1-x^3}\,\frac{1}{\ln 10}}$$