NOMBRE: ____

1) De dos sucesos aleatorios A y B del mismo espacio de sucesos se sabe que $P(A)=\frac{2}{3}$, $P(B)=\frac{3}{4}$ y $P(A\cap B)=\frac{5}{8}$. Calcule:
   a) **(0.75 puntos)** La probabilidad de que se verifique alguno de los dos sucesos.
   b) **(0.75 puntos)** La probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos sucesos.
   c) **(1 punto)** La probabilidad de que ocurra A si se ha verificado B.

2) De las 180 personas que asisten a un congreso médico, 100 son mujeres. Observando las especialidades de los congresistas, vemos que de las 60 personas que son pediatras 20 son mujeres. Se elige al azar una persona asistente al congreso.
   a) **(0.75 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer y pediatra?
   b) **(0.75 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que no sea hombre ni sea pediatra?
   c) **(1 punto)** ¿Cuál es la probabilidad de que sea pediatra?

3) Una variable aleatoria puede tomar los valores 20, 24 y 30 . Mediante muestreo aleatorio simple se forman todas las muestras posibles de tamaño 2.
   a) **(0.75 puntos)** Escriba todas las muestras posibles.
   b) **(1.25 puntos)** Calcule la media y varianza de las medias muestrales.

4) Se sabe que el tiempo de reacción a un determinado estímulo se distribuye según una ley Normal de media desconocida y desviación típica 0.2 segundos.
   a) **(1.5 puntos)** Observada una muestra aleatoria de tamaño 25 se ha obtenido una media muestral de 0.3 segundos. Obtenga un intervalo de confianza para la media de la población con un nivel de confianza del 94%.
   b) **(1.5 puntos)** A un nivel de confianza del 90%, ¿cuál será el tamaño muestral mínimo si el error cometido es inferior a 0.05?

SOLUCIONES

1) De dos sucesos aleatorios A y B del mismo espacio de sucesos se sabe que $P(A)=\frac{2}{3}$, $P(B) = \frac{3}{4}$ y $P(A\cap B) = \frac{5}{8}$. Calcule:

a) **(0.75 puntos)** La probabilidad de que se verifique alguno de los dos sucesos.

Nos pide la probabilidad de $A\cup B$ (es que se verifique un suceso **o** el otro, lo que incluye el que se verifiquen ambos). Por la fórmula general:

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{5}{8} = \boxed{\frac{19}{24}}$$

b) **(0.75 puntos)** La probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos sucesos.

El suceso a investigar es $A^C \cap B^C$, es decir, que no ocurra A y, a la vez, que no ocurra B. Según las Leyes de Morgan: $A^C \cap B^C = (A\cup B)^C$. Usando la probabilidad del suceso contrario:

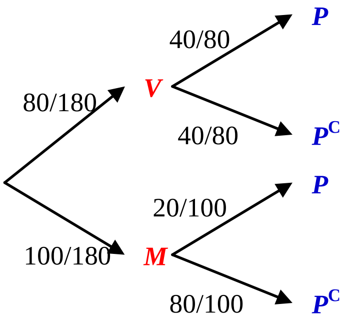
$$P(A^C \cap B^C) = P((A\cup B)^C) = 1 - P(A\cup B) = 1 - \frac{19}{24} = \boxed{\frac{5}{24}}$$

c) **(1 punto)** La probabilidad de que ocurra A si se ha verificado B.

$$P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{5}{8}}{\frac{3}{4}} = \frac{5\cdot 4}{3\cdot 8} = \boxed{\frac{5}{6}}$$

2) De las 180 personas que asisten a un congreso médico, 100 son mujeres. Observando las especialidades de los congresistas, vemos que de las 60 personas que son pediatras 20 son mujeres. Se elige al azar una persona asistente al congreso.

a) **(0.75 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer y pediatra?



Aquí estudiamos dos características consecutivas, y que son dependientes: que escogido un congresista sea varón (V) o mujer (M) y, a continuación, que se trate de un pediatra (P) o no (P^C). De manera que una forma efectiva de solucionarlo (no la única, porque es muy fácil hacerlo directamente por la Regla de Laplace: casos favorables entre casos posibles) es estructurar la situación en un árbol, en el que colocaremos las probabilidades: en cada rama, la probabilidad del suceso terminal de la misma condicionado al suceso de partida de dicha rama. De este modo, resulta el árbol adjunto.

En su confección se ha tenido en cuenta que hay 80 varones y 100 mujeres de los 180 congresistas, y que hay 40 varones pediatras y 20 mujeres pediatras, por lo que el resto de varones y de mujeres no son pediatras.

La probabilidad de ser mujer **y** pediatra es $P(M\cap P)$. Las intersecciones en el árbol son el producto del recorrido de las ramas desde el inicio (a la izquierda) hasta el final (a la derecha). Por tanto:

$$P(M\cap P) = \frac{100}{180}\cdot\frac{20}{100} = \frac{20}{180} = \boxed{\frac{1}{9}}$$

puesto que $P(M\cap P) = P(M)\cdot P(P/M)$, despejando en la fórmula que define el axioma de la *probabilidad condicionada*. Y esas probabilidades son las de las ramas descritas, según como hemos construido el árbol.

b) **(0.75 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que no sea hombre ni sea pediatra?

$$P(V^C\cap P^C) = P(M\cap P^C) = \frac{100}{180}\cdot\frac{80}{100} = \frac{80}{180} = \boxed{\frac{4}{9}}$$

Dentro del grupo de las mujeres, están las que son pediatras y las que no lo son. Por tanto, este suceso era el contrario del pedido en el apartado anterior. Por ello, sus probabilidades respectivas suman 1.

c) **(1 punto)** ¿Cuál es la probabilidad de que sea pediatra?

Según el Teorema de la Probabilidad Total, la probabilidad de un suceso terminal en el árbol es la suma de los productos de todas las ramas que conducen a dicho suceso terminal:

$$P(P) = \frac{80}{180}\cdot\frac{40}{80} + \frac{100}{180}\cdot\frac{20}{100} = \frac{40}{180}+\frac{20}{180} = \frac{60}{180} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

3) Una variable aleatoria puede tomar los valores 20, 24 y 30 . Mediante muestreo aleatorio simple se forman todas las muestras posibles de tamaño 2.

a) **(0.75 puntos)** Escriba todas las muestras posibles.

20, 20   20, 24   20, 30   24, 20   24, 24   24, 30   30, 20   30, 24   30, 30

b) **(1.25 puntos)** Calcule la media y varianza de las medias muestrales.

Calculamos la media de cada muestra:

20   22   25   22   24   27   25   27   30

$$\bar{x} = \frac{20+22+25+22+24+27+25+27+30}{9} = \boxed{24.67}$$

$$s^2 = \frac{20^2+22^2+25^2+22^2+24^2+27^2+25^2+27^2+30^2}{9} - \bar{x}^2 = \boxed{8.44}$$

4) Se sabe que el tiempo de reacción a un determinado estímulo se distribuye según una ley Normal de media desconocida y desviación típica 0.2 segundos.

a) **(1.5 puntos)** Observada una muestra aleatoria de tamaño 25 se ha obtenido una media muestral de 0.3 segundos. Obtenga un intervalo de confianza para la media de la población con un nivel de confianza del 94%.

Podemos crear el intervalo de confianza porque la población de partida es normal. Por tanto, el intervalo de confianza será:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

donde $\sigma = 0.2$ (la desviación típica poblacional, conocida), $n = 25$ (el tamaño de las muestras), $\bar{x} = 0.3$ (la media de la muestra que usamos) y el nivel de confianza es $1 - \alpha = 0.94 \Rightarrow \alpha = 0.06$ (nivel de significación). Por tanto:

$$1-\frac{\alpha}{2} = 1-\frac{0.06}{2} = 0.97$$

De donde, al buscar en el interior de las tablas de la N(0;1) obtenemos que $z_{\alpha/2} = 1.88$. Sustituyendo, el intervalo de confianza pedido es:

$$\boxed{(0.2248,\ 0.3752)}$$

b) **(1.5 puntos)** A un nivel de confianza del 90%, ¿cuál será el tamaño muestral mínimo si el error cometido es inferior a 0.05?

$E = z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Queremos que $E < 0.05 \Rightarrow z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} < 0.05 \Rightarrow \dfrac{z_{\alpha/2}\sigma}{0.05} < \sqrt{n}$

$\Rightarrow$ (Elevando al cuadrado ambos miembros): $n > \left(\dfrac{z_{\alpha/2}\sigma}{0.05}\right)^2$

Además: $1 - \alpha = 0.9 \Rightarrow \alpha = 0.1 \Rightarrow 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - \dfrac{0.1}{2} = 0.95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1.645$.

$n > \left(\dfrac{1.645 \cdot 0.2}{0.05}\right)^2 = 43.296$. Por tanto, el mínimo valor de n válido es $\boxed{n = 44}$.

NOMBRE: ____

1) a) **(1.25 puntos)** Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral. Sabiendo que $P(A) = 0.5$, que $P(B) = 0.4$ y que $P(A \cup B) = 0.8$, determine $P(A/B)$.
   b) **(1.25 puntos)** Sean C y D dos sucesos de un mismo espacio muestral. Sabiendo que $P(C) = 0.3$, que $P(D) = 0.8$ y que C y D son independientes, determine $P(C \cup D)$.

2) En una universidad española el 30% de los estudiantes son extranjeros y, de éstos, el 15% están becados. De los estudiantes españoles, sólo el 8% tienen beca. Si se elige, al azar, un alumno de esa universidad:
   a) **(1 punto)** ¿Cuál es la probabilidad de que sea español y no tenga beca?
   b) **(1.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que sea extranjero, sabiendo que tiene beca.

3) **(2 puntos)** Dada la población , escriba todas las muestras de tamaño 2 mediante muestreo aleatorio simple y calcule la media y la desviación típica de las medias muestrales. $\{10, 12, 17\}$

4) Se sabe que el tiempo de reacción a un determinado estímulo se distribuye según una ley Normal de media desconocida y desviación típica 0.2 segundos.
   a) **(1.25 puntos)** Observada una muestra aleatoria de tamaño 25 se ha obtenido una media muestral de 0.3 segundos. Obtenga un intervalo de confianza para la media de la población con un nivel de confianza del 94%.
   b) **(1.25 puntos)** A un nivel de confianza del 90%, ¿cuál será el tamaño muestral mínimo si el error cometido es inferior a 0.05?

SOLUCIONES

1) a) **(1.25 puntos)** Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral. Sabiendo que $P(A) = 0.5$, que $P(B) = 0.4$ y que $P(A \cup B) = 0.8$, determine $P(A/B)$.

Según la fórmula que proporciona el axioma de la probabilidad condicionada:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Pero desconocemos la probabilidad de la intersección. Usamos la fórmula que la relaciona con la de la unión, que sí tenemos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0.5 + 0.4 - 0.8 = 0.1$$

Por tanto:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.1}{0.4} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

b) **(1.25 puntos)** Sean C y D dos sucesos de un mismo espacio muestral. Sabiendo que $P(C) = 0.3$, que $P(D) = 0.8$ y que C y D son independientes, determine $P(C \cup D)$.

Para utilizar la fórmula anterior, que liga unión e intersección de sucesos, precisamos conocer la probabilidad de la intersección. Como son independientes, según la fórmula de la probabilidad condicionada:

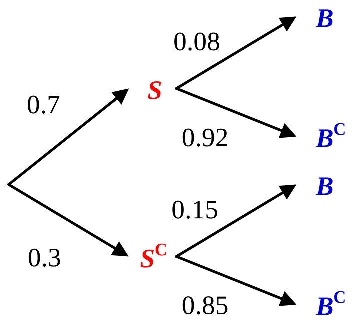
$$P(C \cap D) = P(C/D)\,P(D) = P(C)\,P(D) = 0.3 \cdot 0.8 = 0.24$$

Por tanto:

$$P(C \cup D) = P(C) + P(D) - P(C \cap D) = 0.3 + 0.8 - 0.24 = \boxed{0.86}$$

2) En una universidad española el 30% de los estudiantes son extranjeros y, de éstos, el 15% están becados. De los estudiantes españoles, sólo el 8% tienen beca. Si se elige, al azar, un alumno de esa universidad:

a) **(1 punto)** ¿Cuál es la probabilidad de que sea español y no tenga beca?



Al tratarse de dos características que se miden consecutivamente, que son dependientes, creamos un árbol que esquematice el problema y nos ayude a solucionarlo. En cada rama, la probabilidad del suceso terminal de la misma condicionado al suceso de partida de dicha rama. De este modo, resulta el árbol adjunto.

En él, hemos llamado S = Ser español, y S^C = Ser extranjero, así como B = Tener beca y B^C = No estar becado.

La probabilidad de una intersección es el producto de las probabilidades de las ramas que hay que recorrer desde el inicio del árbol, a la izquierda, hasta el final que contiene los sucesos que queremos que sucedan a la vez:

$$P(S \cap B^C) = P(S) \cdot P(B^C/S) = 0.7 \cdot 0.92 = \boxed{0.644}$$

b) **(1.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que sea extranjero, sabiendo que tiene beca.

Nos piden $P(S^C/B)$. Usamos la fórmula de Bayes, que no es más que aplicar la fórmula de la Probabilidad Condicionada, y teniendo en cuenta que la probabilidad, sin condicionar, de un suceso de la segunda característica del árbol (B ó

B^C) es, según el Teorema de la Probabilidad Total, la suma de los productos de todas las ramas que conducen desde el inicio del árbol hasta dicho suceso. Así:

$$P(S^C/B) = \frac{P(S^C \cap B)}{P(B)} = \frac{0.3 \cdot 0.15}{0.7 \cdot 0.08 + 0.3 \cdot 0.15} = \frac{45}{101} \approx \boxed{0.4455}$$

3) **(2 puntos)** Dada la población , escriba todas las muestras de tamaño 2 mediante muestreo aleatorio simple y calcule la media y la desviación típica de las medias muestrales. {10, 12, 17}

Todas las muestras posibles de tamaño 2 extraídas mediante muestreo aleatorio simple, que se hace con reemplazamiento, son:

(10, 10) (10, 12) (10, 17) (12, 10) (12, 12) (12, 17) (17, 10) (17, 12) (17, 17)

Las medias de cada muestra son:

10 11 13.5 11 12 14.5 13.5 14.5 17

La media y la desviación típica de esta serie valen:

$$\bar{x} = \frac{10 + 11 + ... + 17}{9} = \boxed{13} \qquad s = \sqrt{\frac{10^2 + 11^2 + ... + 17^2}{9} - \bar{x}^2} = \boxed{2.082}$$

4) Se sabe que el tiempo de reacción a un determinado estímulo se distribuye según una ley Normal de media desconocida y desviación típica 0.2 segundos.

a) **(1.25 puntos)** Observada una muestra aleatoria de tamaño 25 se ha obtenido una media muestral de 0.3 segundos. Obtenga un intervalo de confianza para la media de la población con un nivel de confianza del 94%.

Como la población de partida es Normal podemos crear el intervalo de confianza, teniendo en cuenta que $\bar{x} \in N\left(\mu; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$. Así, como $\sigma = 0.2$, $\bar{x} = 0.3$, $n = 25$ y $1 - \alpha = 0.94 \Rightarrow \alpha = 0.06 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{0.06}{2} = 0.97 \Rightarrow$ Buscando este valor en el interior de las tablas de la N(0;1): $z_{\alpha/2} = 1.88$, se tiene que el intervalo de confianza al 94% es:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \boxed{(0.2248, 0.3752)}$$

b) **(1.25 puntos)** A un nivel de confianza del 90%, ¿cuál será el tamaño muestral mínimo si el error cometido es inferior a 0.05?

$1 - \alpha = 0.90 \Rightarrow \alpha = 0.10 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{0.10}{2} = 0.95 \Rightarrow$ Buscando este valor en el interior de las tablas de la N(0;1): $z_{\alpha/2} = 1.645$.

$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Queremos que $E < 0.05 \Rightarrow z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < 0.05 \Rightarrow \frac{z_{\alpha/2}\sigma}{0.05} < \sqrt{n}$

$\Rightarrow$ (Elevando al cuadrado ambos miembros):

$$n > \left(\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{0.05}\right)^2 = \left(\frac{1.645 \cdot 0.2}{0.05}\right)^2 = 43.2964 \Rightarrow \boxed{n = 44}$$

Como debe ser mayor que el dicho resultado para garantizar el nivel de error, tomamos el primer valor posible, pues el tamaño muestral no puede ser decimal.

NOMBRE: ____

ALUMNOS CON LA 1ª Y 2ª EVALUACIÓN SUSPENDIDA

1) a) **(1.5 puntos)** Dibuje el recinto del plano definido por el siguiente sistema de inecuaciones y determine sus vértices:

$$y \geq 200 - 2x, \quad x - 100 \leq 3y, \quad x + 2y \leq 600, \quad x \geq 0.$$

b) **(1 punto)** Sabiendo que A(0, 2), B(1, 4), C(3, 4), D(4, 2) y E(2, 1) son los vértices de una región factible, determine en ella el mínimo y el máximo de la función $F(x, y) = 10x + 5y + 21$, e indique los puntos donde se alcanzan.

2) Sea la función $f(x) = \begin{cases} 1-2x^2 & si \quad x \leq 1 \\ x^2 - 2ax + 3 & si \quad 1 < x \leq 3 \\ -x^2 + 8x - 15 & si \quad x > 3 \end{cases}$

a) **(0.75 puntos)** Calcule el valor de a para que f sea continua en $x = 1$.

b) **(1.75 puntos)** Para $a = 2$ estudie la continuidad y la derivabilidad de f.

3) Una bolsa contiene 5 bolas blancas, 3 rojas y 4 negras. Ana y Manolo practican el siguiente juego: Ana saca una bola, anota su color y la devuelve a la bolsa, a continuación Manolo extrae una bola y anota su color. Si las dos bolas extraídas tienen el mismo color gana Ana, si sólo hay una bola blanca gana Manolo, y en otro caso hay empate.

a) **(1.25 puntos)** Calcule la probabilidad de que gane Ana.
b) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que gane Manolo.
c) **(0.25 puntos)** Calcule la probabilidad de que haya empate.

4) **(2.5 puntos)** Un estudio sociológico afirma que el 70% de las familias cena viendo la televisión. Se desea contrastar la veracidad de esta afirmación y, para ello, se toma una muestra de 500 familias, en la que se observa que 340 ven la televisión mientras cenan. Decida, mediante un contraste de hipótesis, si la afirmación es cierta con un nivel de significación de 0.01.

SOLUCIONES

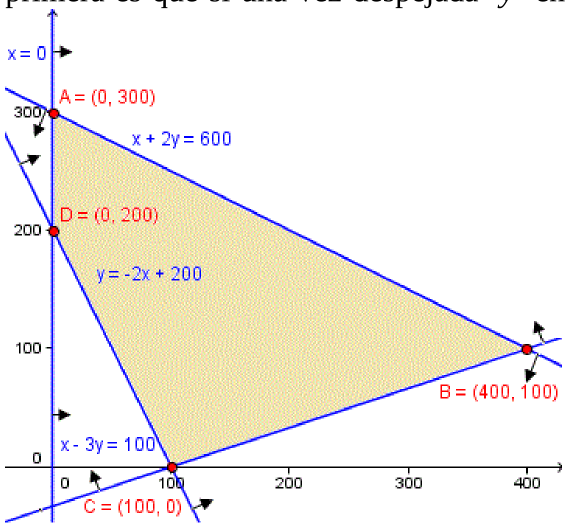
1) a) **(1.5 puntos)** Dibuje el recinto del plano definido por el siguiente sistema de inecuaciones y determine sus vértices:

$$y \geq 200 - 2x, \quad x - 100 \leq 3y, \quad x + 2y \leq 600, \quad x \geq 0.$$

Mediante una pequeña tabla de valores, representamos las rectas resultantes de sustituir el signo de desigualdad por un = en las cuatro inecuaciones. La última de ellas $x = 0$, es una recta vertical (porque su ecuación es $x =$ número), concretamente el eje OY. Para el resto, usamos una pequeña tabla de valores; normalmente, hacemos $x = 0$ y averiguamos el correspondiente y, y también $y = 0$ y hallamos su x.

Una vez dibujada cada recta, hay que decidir cuál de los dos semiplanos en los que queda dividido el plano mediante ella es el que verifica la inecuación. Podemos hacerlo de dos formas. La primera es que si una vez despejada y en la inecuación resulta ser $\geq$ que el resto de la misma (que estará en el otro miembro), el semiplano que nos interesa es el que está por encima de la recta. Y es el otro, en caso contrario. La segunda consiste en tomar un punto que no esté sobre la recta, por ejemplo, el (0, 0), y sustituirlo en la inecuación: si la verifica, el semiplano que buscamos es el que contiene al punto elegido, y es el otro si no la verifica.

Con todo esto, el recinto es el que recogemos en el gráfico.



Hay que calcular los vértices. Para A y D no es necesario realizar muchos cálculos puesto que están sobre los ejes de coordenadas. Los otros son intersecciones de rectas, y requieren la resolución del sistema que forman las ecuaciones correspondientes (de ninguna manera se pueden calcular por el gráfico). Así:

- B: Intersección de $x + 2y = 600$ con $x - 3y = 100$:

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y = 600 \\ \underline{x - 3y = 100} \end{array}\right\} \text{Restando:} \qquad \begin{array}{c} \text{Se sustituye en la 2ª ec:} \\ x - 300 = 100 \Rightarrow x = 400 \end{array}$$

$$5y = 500 \Rightarrow y = 100$$

- C: Intersección de $2x + y = 200$ con $x - 3y = 100$:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y = 200 \\ x - 3y = 100 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x + \ \ y = \ \ 200 \\ \underline{-2x + 6y = -200} \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{c} \text{Se sustituye en la 2ª ec:} \\ x - 0 = 100 \Rightarrow x = 100 \end{array}$$

$$7y = 0 \Rightarrow y = 0$$

Así: $\boxed{A(0, 300),\ B(400, 100),\ C(100, 0),\ D(0, 200)}$.

b) **(1 punto)** Sabiendo que A(0, 2), B(1, 4), C(3, 4), D(4, 2) y E(2, 1) son los vértices de una región factible, determine en ella el mínimo y el máximo de la función $F(x, y) = 10x + 5y + 21$, e indique los puntos donde se alcanzan.

$F(A) = F(0, 2) = 10\cdot 0 + 5\cdot 2 + 21 = 31$

$F(B) = F(1, 4) = 10\cdot 1 + 5\cdot 4 + 21 = 51$
$F(C) = F(3, 4) = 10\cdot 3 + 5\cdot 4 + 21 = 71$
$F(D) = F(4, 2) = 10\cdot 4 + 5\cdot 2 + 21 = 71$
$F(E) = F(2, 1) = 10\cdot 2 + 5\cdot 1 + 21 = 46$

El máximo se alcanza en cualquier punto del segmento que une $C(3, 4)$ con $D(4, 2)$, ambos incluido, y vale 71. El mínimo se alcanza en $A(0, 2)$ y vale 31.

2) Sea la función $f(x) = \begin{cases} 1-2x^2 & si \quad x \le 1 \\ x^2 - 2ax + 3 & si \quad 1 < x \le 3 \\ -x^2 + 8x - 15 & si \quad x > 3 \end{cases}$

a) **(0.75 puntos)** Calcule el valor de a para que f sea continua en $x = 1$.

En $(-\infty, 1) \cup (1, 3) \cup (3, +\infty)$ la función es continua, por tener expresión polinómica, independientemente de lo que valga a.

En $x = 1$ será continua cuando coincidan los siguientes resultados:

$f(1) = 1 - 2\cdot 1^2 = -1$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(1-2x^2) = 1 - 2\cdot 1^2 = -1$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(x^2 - 2ax + 3) = 1 - 2a + 3 = 4 - 2a$

Luego debe ocurrir: $4 - 2a = -1 \Rightarrow -2a = -1 - 4 \Rightarrow -2a = -5 \Rightarrow \boxed{a = 5/2}$.

b) **(1.75 puntos)** Para $a = 2$ estudie la continuidad y la derivabilidad de f.

$$f(x) = \begin{cases} 1-2x^2 & si \quad x \le 1 \\ x^2 - 4x + 3 & si \quad 1 < x \le 3 \\ -x^2 + 8x - 15 & si \quad x > 3 \end{cases}$$

Continuidad

Como la expresión de las tres expresiones es polinómica, f es, como hemos dicho, continua en $(-\infty, 1) \cup (1, 3) \cup (3, +\infty)$.

- $x = 1$:

  $f(1) = 1 - 2\cdot 1^2 = -1$

  $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(1-2x^2) = 1 - 2\cdot 1^2 = -1$

  $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(x^2 - 4x + 3) = 1 - 4 + 3 = 0$

  Como los laterales no coinciden, no existe el límite cuando $x \to 1$ de $f(x)$, por lo que no es continua en $x = 1$. Como los límites laterales existen y no coinciden se trata de una discontinuidad de salto finito.

- $x = 3$:

  $f(3) = 3^2 - 4\cdot 3 + 3 = 0$

  $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-}(x^2 - 4x + 3) = 9 - 12 + 3 = 0$

  $\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+}(-x^2 + 8x - 15) = -9 + 24 - 15 = 0$

  Como los tres resultados coinciden, f es continua en $x = 3$.

Derivabilidad

Derivamos directamente en intervalos abiertos y, como no es continua en $x = 1$ ya sabemos que ahí no va a ser derivable:

$$f'(x) = \begin{cases} -4x & si \quad x<1 \\ 2x-4 & si \quad 1<x<3 \\ -2x+8 & si \quad x>3 \end{cases}$$

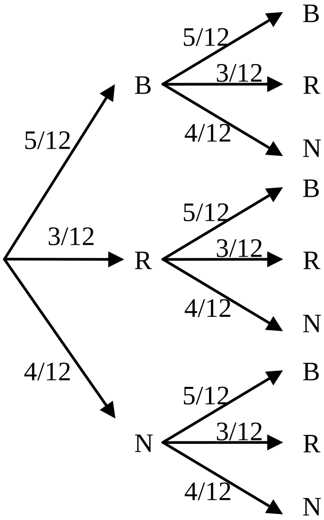
Como $f'(3^-) = 2\cdot 3 - 4 = 2$ y $f'(3^+) = -6+8 = 2 \Rightarrow \exists f'(3) = 2$. Por tanto, la expresión final de la derivada es (el = para $x = 3$ lo podemos poner en cualquiera de las dos expresiones, porque el resultado va a ser 2 en ambas):

$$\boxed{f'(x) = \begin{cases} -4x & si \quad x<1 \\ 2x-4 & si \quad 1<x\le 3 \\ -2x+8 & si \quad x>3 \end{cases}}$$

3) Una bolsa contiene 5 bolas blancas, 3 rojas y 4 negras. Ana y Manolo practican el siguiente juego: Ana saca una bola, anota su color y la devuelve a la bolsa, a continuación Manolo extrae una bola y anota su color. Si las dos bolas extraídas tienen el mismo color gana Ana, si sólo hay una bola blanca gana Manolo, y en otro caso hay empate.

a) **(1.25 puntos)** Calcule la probabilidad de que gane Ana.

Este problema no tiene por qué resolverse con un árbol, puesto que los sucesos de *sacar la 1ª bola* y *sacar la 2ª* son independientes, ya que se reemplaza la 1ª bola. Sin embargo, el árbol nos hace fácil y automática la resolución. Así, como no es posible que salgan a la vez las dos bolas blancas y las dos rojas, o blancas y negras o rojas y negras (es decir, son incompatibles), se tiene:



$$P(\text{Gana Ana}) = P(\text{B}\cap\text{B}) + P(\text{R}\cap\text{R}) + P(\text{N}\cap\text{N}) =$$
$$= \frac{5}{12}\frac{5}{12} + \frac{3}{12}\frac{3}{12} + \frac{4}{12}\frac{4}{12} = \boxed{\frac{25}{72} = 0.3472}$$

b) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que gane Manolo.

$$P(\text{Gana Manolo}) = P(\text{B}\cap\text{R}) + P(\text{B}\cap\text{N}) + P(\text{R}\cap\text{B}) + P(\text{N}\cap\text{B}) =$$
$$= \frac{5}{12}\frac{3}{12} + \frac{5}{12}\frac{4}{12} + \frac{3}{12}\frac{5}{12} + \frac{4}{12}\frac{5}{12} = \boxed{\frac{35}{72} = 0.4861}$$

c) **(0.25 puntos)** Calcule la probabilidad de que haya empate.

Es lo contrario de que gane alguno de los dos. Y no pueden ganar Ana y Manolo simultáneamente. Por tanto:

$$P(\text{empate}) = 1 - P(\text{Gana Ana} \cup \text{Gana Manolo}) =$$
$$= 1 - [P(\text{Gana Ana}) + P(\text{Gana Manolo})] = 1 - \left(\frac{25}{72} + \frac{35}{72}\right) = \boxed{\frac{1}{6}}$$

4) **(2.5 puntos)** Un estudio sociológico afirma que el 70% de las familias cena viendo la televisión. Se desea contrastar la veracidad de esta afirmación y, para ello, se toma una muestra de 500 familias, en la que se observa que 340 ven la televisión mientras cenan. Decida, mediante un contraste de hipótesis, si la afirmación es cierta con un nivel de significación de 0.01.

Hemos de crear un contraste de hipótesis de proporciones. Las bases teóricas de su construcción pasan por aproximar una Binomial mediante una Normal, por lo que el tamaño muestral debe ser, como mínimo, de 30. Se cumple así, por lo que podemos proceder.

$$\left.\begin{array}{l} H_0: p = 0.70 \\ H_1: p \neq 0.70 \end{array}\right\}$$

Estamos ante un contraste *bilateral* de proporciones. Y tenemos:

- $n = 500$
- $\alpha = 0.01 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.005 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.995 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2.575$
- $RA_{0.01} = \left(0.7 - 2.575\sqrt{\frac{0.7 \cdot 0.3}{500}},\ 0.7 + 2.575\sqrt{\frac{0.7 \cdot 0.3}{500}}\right) = (0.6472, 0.7528)$
- Como $\hat{p} = \frac{340}{500} = 0.68 \in RA_{0.01} \Rightarrow \boxed{\textit{No rechazamos } H_0}$.

Es decir, con el nivel de significación del 0.01 no hay evidencias para rechazar la hipótesis nula, admitiendo, pues, la veracidad de la afirmación.

NOMBRE: ____

ALUMNOS CON LA 1ª Y 2ª EVALUACIÓN APROBADA

1) Una bolsa contiene 5 bolas blancas, 3 rojas y 4 negras. Ana y Manolo practican el siguiente juego: Ana saca una bola, anota su color y la devuelve a la bolsa, a continuación Manolo extrae una bola y anota su color. Si las dos bolas extraídas tienen el mismo color gana Ana, si sólo hay una bola blanca gana Manolo, y en otro caso hay empate.
a) **(1.7 puntos)** Calcule la probabilidad de que gane Ana.
b) **(1.3 puntos)** Calcule la probabilidad de que gane Manolo.
c) **(0.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que haya empate.

2) **(3 puntos)** Un estudio sociológico afirma que el 70% de las familias cena viendo la televisión. Se desea contrastar la veracidad de esta afirmación y, para ello, se toma una muestra de 500 familias, en la que se observa que 340 ven la televisión mientras cenan. Decida, mediante un contraste de hipótesis, si la afirmación es cierta con un nivel de significación de 0.01.

3) Con el fin de estudiar el peso medio de los perros recién nacidos de una determinada raza, se tomó una muestra en una clínica veterinaria y se obtuvieron los siguientes pesos, medidos en kg:

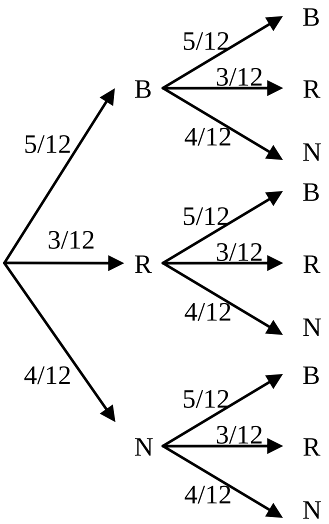
1.2 0.9 1 1.2 1.1 1 0.8 1.1

Se sabe que el peso de los cachorros de esta raza se distribuye según una ley Normal con desviación típica 0.25 kg.
a) **(2 puntos)** Obtenga un intervalo de confianza para estimar la media poblacional, al 95%.
b) **(0.7 puntos)** Halle el error máximo que se cometería usando el intervalo anterior.
c) **(0.8 puntos)** Razone cómo variaría la amplitud del intervalo de confianza si, manteniendo el mismo nivel de confianza, aumentásemos el tamaño de la muestra.

SOLUCIONES

1) Una bolsa contiene 5 bolas blancas, 3 rojas y 4 negras. Ana y Manolo practican el siguiente juego: Ana saca una bola, anota su color y la devuelve a la bolsa, a continuación Manolo extrae una bola y anota su color. Si las dos bolas extraídas tienen el mismo color gana Ana, si sólo hay una bola blanca gana Manolo, y en otro caso hay empate.

a) **(1.7 puntos)** Calcule la probabilidad de que gane Ana.
Este problema no tiene por qué resolverse con un árbol, puesto que los sucesos de *sacar la 1ª bola* y *sacar la 2ª* son independientes, ya que se reemplaza la 1ª bola. Sin embargo, el árbol nos hace fácil y automática la resolución. Así, como no es posible que salgan a la vez las dos bolas blancas y las dos rojas, o blancas y negras o rojas y negras (es decir, son incompatibles), se tiene:



$$P(\text{Gana Ana}) = P(\text{B}\cap\text{B}) + P(\text{R}\cap\text{R}) + P(\text{N}\cap\text{N}) =$$
$$= \frac{5}{12}\frac{5}{12} + \frac{3}{12}\frac{3}{12} + \frac{4}{12}\frac{4}{12} = \boxed{\frac{25}{72} = 0.3472}$$

b) **(1.3 puntos)** Calcule la probabilidad de que gane Manolo.

$$P(\text{Gana Manolo}) = P(\text{B}\cap\text{R}) + P(\text{B}\cap\text{N}) + P(\text{R}\cap\text{B}) + P(\text{N}\cap\text{B}) =$$
$$= \frac{5}{12}\frac{3}{12} + \frac{5}{12}\frac{4}{12} + \frac{3}{12}\frac{5}{12} + \frac{4}{12}\frac{5}{12} = \boxed{\frac{35}{72} = 0.4861}$$

c) **(0.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que haya empate.
Es lo contrario de que gane alguno de los dos. Y no pueden ganar Ana y Manolo simultáneamente. Por tanto:

$$P(\text{empate}) = 1 - P(\text{Gana Ana} \cup \text{Gana Manolo}) =$$
$$= 1 - [P(\text{Gana Ana}) + P(\text{Gana Manolo})] = 1 - \left(\frac{25}{72} + \frac{35}{72}\right) = \boxed{\frac{1}{6}}$$

2) **(3 puntos)** Un estudio sociológico afirma que el 70% de las familias cena viendo la televisión. Se desea contrastar la veracidad de esta afirmación y, para ello, se toma una muestra de 500 familias, en la que se observa que 340 ven la televisión mientras cenan. Decida, mediante un contraste de hipótesis, si la afirmación es cierta con un nivel de significación de 0.01.

Hemos de crear un contraste de hipótesis de proporciones. Las bases teóricas de su construcción pasan por aproximar una Binomial mediante una Normal, por lo que el tamaño muestral debe ser, como mínimo, de 30. Se cumple así, por lo que podemos proceder.

$$\left.\begin{array}{l} H_0: p = 0.70 \\ H_1: p \neq 0.70 \end{array}\right\}$$

Estamos ante un contraste *bilateral* de proporciones. Y tenemos:

- $n = 500$
- $\alpha = 0.01 \;\Rightarrow\; \frac{\alpha}{2} = 0.005 \;\Rightarrow\; 1-\frac{\alpha}{2} = 0.995 \;\Rightarrow\; z_{\alpha/2} = 2.575$

- $RA_{0.01} = \left(0.7 - 2.575\sqrt{\frac{0.7\cdot 0.3}{500}},\ 0.7 + 2.575\sqrt{\frac{0.7\cdot 0.3}{500}}\right) = (0.6472,\ 0.7528)$
- Como $\hat{p} = \frac{340}{500} = 0.68 \in RA_{0.01} \quad \Rightarrow$ $\boxed{\text{No rechazamos } H_0}$.

Es decir, con el nivel de significación del 0.01 no hay evidencias para rechazar la hipótesis nula, admitiendo, pues, la veracidad de la afirmación.

3) Con el fin de estudiar el peso medio de los perros recién nacidos de una determinada raza, se tomó una muestra en una clínica veterinaria y se obtuvieron los siguientes pesos, medidos en kg:

1.2 0.9 1 1.2 1.1 1 0.8 1.1

Se sabe que el peso de los cachorros de esta raza se distribuye según una ley Normal con desviación típica 0.25 kg.

a) **(2 puntos)** Obtenga un intervalo de confianza para estimar la media poblacional, al 95%.

Como la población original es Normal, podemos construir el intervalo de confianza, en base a que $\bar{x} \in N\left(\mu; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

Sabemos que σ = 0.25, que $n = 8$ y la media muestral obtenida es:

$$\bar{x} = \frac{1.2+0.9+1+1.2+1.1+1+0.8+1.1}{8} = 1.0375$$

Como $1 - \alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$

Por tanto, el intervalo de confianza para μ al 95% es:

$$\left(1.0375 - 1.96\frac{0.25}{\sqrt{8}},\ 1.0375 + 1.96\frac{0.25}{\sqrt{8}}\right) = \boxed{(0.8643,\ 1.2107)}$$

b) **(0.7 puntos)** Halle el error máximo que se cometería usando el intervalo anterior.

$$E = 1.96\frac{0.25}{\sqrt{8}} = \boxed{0.1732 \text{ kg}}$$

c) **(0.8 puntos)** Razone cómo variaría la amplitud del intervalo de confianza si, manteniendo el mismo nivel de confianza, aumentásemos el tamaño de la muestra.

Para formar el intervalo de confianza, a la media muestral se le suma y resta el error máximo, cuya expresión es:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Y es lo que hemos hecho. Como el tamaño muestral n figura en el denominador, al aumentarlo estamos dividiendo entre un número mayor, por lo que el resultado (el error) es más pequeño. Por tanto, sumamos y restamos a la media muestral un número inferior, por lo que, al hacerlo, <u>la amplitud del intervalo de confianza decrece</u>.