Tercer trimestre - Prueba de observación continua nº 1 – 2º Bach CCSS

NOMBRE: ____

Instrucciones: **1)** Todos los **folios** deben tener el **nombre** y estar **numerados** en la parte superior. **2)** Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. **3)** No se puede usar **corrector ni lápiz**, y el bolígrafo debe ser de **tinta indeleble**. Se aconseja no usar borrador. **4)** Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar** la respuesta a una pregunta con las de otras. **5)** **Desatender las instrucciones puede penalizarse con hasta 1 punto** o la **anulación** en caso de usar tinta corregible.

1) El 32% de los habitantes de una ciudad lee el diario *A*, el 13% el diario *B*, y el 6% ambos diarios.
   a) ¿Qué porcentaje de habitantes de esta ciudad no lee ninguno de los diarios? *(1.2 ptos)*
   b) Si se elige al azar un habitante de esta ciudad de entre los no lectores del diario *B*, ¿cuál es la probabilidad de que lea el diario *A*? *(1.3 ptos)*

2) El 70% de los clientes de un supermercado realizan las compras en el local y el resto de los clientes las realizan por internet. De las compras realizadas en el local, sólo el 30% supera los 100 €, mientras que de las realizadas por internet el 80% supera esa cantidad.
   a) Elegida una compra al azar, ¿cuál es la probabilidad de que supere los 100 €? *(1.5 ptos)*
   b) Si se sabe que una compra supera los 100 €, ¿cuál es la probabilidad de que se haya hecho en el local? *(1 pto)*

3) Sean dos sucesos A y B tales que $P(A) = 0.25$, $P(B) = 0.6$, $P(A \cap B^C) = 0.1$.
   a) Calcular la probabilidad de que ocurra *A* y ocurra *B*. *(0.7 ptos)*
   b) Calcular la probabilidad de que no ocurra *A* pero sí ocurra *B*. *(0.8 ptos)*
   c) Calcular la probabilidad de que ocurra *A* sabiendo que ha ocurrido *B*. *(0.5 ptos)*
   d) ¿Son independientes *A* y *B*? *(0.5 ptos)*

4) Se sabe que un tirador tiene una probabilidad de 0.25 de acertar en el blanco. Si dispara 40 veces:
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que acierte al menos una vez? *(1 pto)*
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que acierte al menos en 20 ocasiones? *(1 pto)*
   c) ¿Cuál es el valor esperado de aciertos? *(0.5 ptos)*

SOLUCIONES

1) El 32% de los habitantes de una ciudad lee el diario *A*, el 13% el diario *B*, y el 6% ambos diarios.

a) ¿Qué porcentaje de habitantes de esta ciudad no lee ninguno de los diarios? *(1.2 ptos)*

Si no lee ninguno de los diarios, no lee A y no lee B. Por las *Leyes de Morgan*:

$$P(A^C \cap B^C) = P[(A \cup B)^C] = 1 - P(A \cup B)$$

Y como:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.32 + 0.13 - 0.06 = 0.39$$

se tiene que:

$$P(A^C \cap B^C) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.39 = 0.61$$

Como nos piden la respuesta en tantos por ciento, tenemos de contestar que el 61% no lee ninguno de los dos diarios.

b) Si se elige al azar un habitante de esta ciudad de entre los no lectores del diario *B*, ¿cuál es la probabilidad de que lea el diario *A*? *(1.3 ptos)*

Sabemos seguro que el habitante no lee el diario B. Por tanto, nos piden:

$$\boxed{P(A / B^C) =} \frac{P(A \cap B^C)}{P(B^C)} = \frac{P(A - B)}{1 - P(B)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)} =$$

$$= \frac{0.32 - 0.06}{1 - 0.13} = \boxed{0.2989}$$

2) El 70% de los clientes de un supermercado realizan las compras en el local y el resto de los clientes las realizan por internet. De las compras realizadas en el local, sólo el 30% supera los 100 €, mientras que de las realizadas por internet el 80% supera esa cantidad.

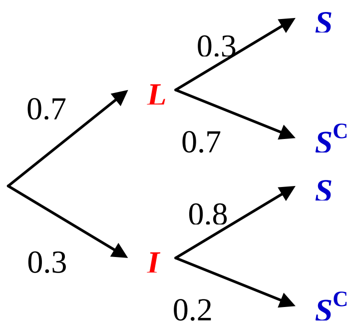
a) Elegida una compra al azar, ¿cuál es la probabilidad de que supere los 100 €? *(1.5 ptos)*

Podemos representar los datos en un *diagrama de árbol*, denominando a los sucesos, relativos a un cliente elegido al azar:

$L \equiv$ *realiza las compras en el local*
$I \equiv$ *las realiza por internet*
$S \equiv$ *la compra supera los 100€*

Utilizando el *Teorema de la Probabilidad Total*:

$$\boxed{P(S) =} \ 0.7 \cdot 0.3 + 0.3 \cdot 0.8 = \boxed{0.45}$$



b) Si se sabe que una compra supera los 100 €, ¿cuál es la probabilidad de que se haya hecho en el local? *(1 pto)*

Nos piden la probabilidad del suceso L / S. Por el *Axioma de la Probabilidad Condicionada*, del que se deduce la *Fórmula de Bayes*:

$$\boxed{P(L / S) =} \frac{P(L \cap S)}{P(S)} = \frac{0.7 \cdot 0.3}{0.45} = \boxed{0.4667}$$

3) Sean dos sucesos A y B tales que $P(A) = 0.25$, $P(B) = 0.6$, $P(A \cap B^C) = 0.1$.

a) Calcular la probabilidad de que ocurra *A* y ocurra *B*. *(0.7 ptos)*

Nos piden la probabilidad de que ocurran simultáneamente A y B, o sea, la probabilidad del suceso *intersección*. Esta probabilidad aparece en la fórmula

del suceso *unión*, pero no conocemos ésta, por lo que no parece que sea el camino a seguir.
Pero, por otro lado, tenemos la probabilidad del suceso $A\cap B^C = A - B$. Y sabemos que:

$$P(A - B) = P(A) - P(A\cap B) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 0.1 = 0.25 - P(A\cap B) \Rightarrow \boxed{P(A\cap B) =} 0.25 - 0.1 = \boxed{0.15}$$

b) Calcular la probabilidad de que no ocurra A pero sí ocurra B. *(0.8 ptos)*
Tienen que no darse A y, a la vez, ocurrir B, esto es:

$$\boxed{P(A^C\cap B) =} P(B\cap A^C) = P(B - A) = P(B) - P(B\cap A) = 0.6 - 0.15 = \boxed{0.45}$$

c) Calcular la probabilidad de que ocurra A sabiendo que ha ocurrido B. *(0.5 ptos)*

$$\boxed{P(A / B) =} \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{0.15}{0.6} = \boxed{0.25}$$

d) ¿Son independientes A y B? *(0.5 ptos)*
Como $P(A/B) = P(A) = 0.25$, $\boxed{\text{los sucesos } A \text{ y } B \text{ son independientes}}$.

4) Se sabe que un tirador tiene una probabilidad de 0.25 de acertar en el blanco. Si dispara 40 veces:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que acierte al menos una vez? *(1 pto)*
Cada vez que tira, hay sólo dos sucesos posibles y mutuamente excluyentes: que *acierte* (que llamaremos A) o que *no acierte* o *falle* (o sea, A^C). Cada disparo es, pues, una prueba de Bernoulli.
Al disparar 40 veces, realiza 40 pruebas independientes de Bernoulli en las que se están midiendo el número de aciertos. Si $X \equiv$ *número de aciertos en los 40 disparos*, esto significa que ésta es una variable *binomial*:

$$X \in B(40; 0.25)$$

Lo contrario de que acierte al menos una vez es que no acierte ninguna. Así:

$$\boxed{P(\text{acierte al menos una vez}) =} P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) =$$
$$= 1 - \binom{40}{0} 0{,}25^0 0{,}75^{40-0} = 1 - 1\cdot 1\cdot 0{,}75^{40} = 1 - 0.0000100566 = \boxed{0.9999899}$$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que acierte al menos en 20 ocasiones? *(1 pto)*
Nos piden $P(X \geq 20)$. Calcular esto directamente por la fórmula de la Binomial es bastante penoso. Por ello, vamos a *aproximar la Binomial* X *mediante una Normal* X'. Ello es posible porque $n = 40 \geq 30$ y, además, $np = 40\cdot 0.25 = 10 \geq 5$ y $nq = 40\cdot 0.75 = 30 \geq 5$ lo que nos indica que la aproximación que hagamos será fiable ($p = 0.25$, probabilidad de éxito, $q = 1 - p$). Como $np = 10$ y $\sqrt{npq} = \sqrt{40\cdot 0{,}25\cdot 0{,}75} = 2{,}74$, la variable Normal que usaremos como aproximación será:

$$X' \in N(10; 2{,}74)$$

Además, hemos de usar la *corrección de Yates* o *de Fisher*, porque aproximamos una variable aleatoria discreta mediante una continua.
Por todo ello, y tipificando para poder usar las tablas de la N(0;1):

$$\boxed{P(X \geq 20) =} P(X' \geq 19.5) = P\left(\frac{X'-10}{2{,}74} \geq \frac{19{,}5-10}{2{,}74}\right) = P(Z \geq 3{,}47) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 3{,}47) = 1 - 0{,}99974 = \boxed{0{,}00026}$$

c) ¿Cuál es el valor esperado de aciertos? *(0.5 ptos)*
El *valor esperado* es la *media poblacional*, por definición. Y en la *ley Binomial* se calcula así:

$$\boxed{\mu =} n \cdot p = 40 \cdot 0{,}25 = \boxed{10}$$

NOMBRE: ____

Instrucciones: **1)** Todos los **folios** deben tener el **nombre** y estar **numerados** en la parte superior. **2)** Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. **3)** No se puede usar **corrector ni lápiz**, y el bolígrafo debe ser de **tinta indeleble**. Se aconseja no usar borrador. **4)** Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar** la respuesta a una pregunta con las de otras. **5)** **Desatender las instrucciones puede penalizarse con hasta 1 punto** o la **anulación** en caso de usar tinta corregible.

1) Lucía quiere ir de vacaciones a la costa. En su guía de viajes lee que en esa época del año llueve dos días a la semana y que hace viento el 25% de los días que llueve y el 40% de los días que no llueve. Elegido un día de esa época,
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que haga viento? *(1 punto)*
   b) Si hace viento, ¿cuál es la probabilidad de que esté lloviendo? *(0,8 puntos)*
   c) ¿Cuál es la probabilidad de que no llueva y no haga viento? *(0,7 puntos)*

2) a) En un centro docente, la tercera parte de los alumnos estudia el idioma A, la mitad el idioma B y el resto, el idioma C. Cada alumno estudia sólo uno de estos idiomas. En una muestra seleccionada mediante muestreo estratificado con afijación proporcional al número de los alumnos de cada idioma, el número de alumnos tomados del idioma A es de 28. Determinar cuántos se han elegido de los otros dos idiomas y el tamaño de la muestra. *(1 punto)*
   b) Una población tiene 6 elementos. Mediante muestreo aleatorio simple se seleccionan muestras de tamaño 3, siendo la desviación típica de sus medias 2 y la media de las medias muestrales, 7. ¿Cuánto valen la media y la varianza de la población? *(1,5 puntos)*

3) De una población se ha extraído una muestra de 400 personas y 72 de ellas poseen un determinado gen.
   a) Calcular un intervalo de confianza, al 99.2%, para la proporción de personas de la población que poseen dicho gen. *(1,5 puntos)*
   b) Calcular el error máximo admisible cometido con ese intervalo. *(1 punto)*

4) El peso medio de los pájaros de una determinada especie que habita en un parque natural se consideraba no inferior a 110 g, pero los biólogos del parque sostienen ahora la hipótesis de que dicho peso medio ha disminuido a consecuencia del cambio climático. Se ha tomado una muestra de 100 pájaros de esta especie y se ha obtenido un peso medio de 108 g. Se sabe que la variable que mide el peso de los pájaros de esta especie sigue una distribución Normal con desviación típica igual a 6 g. Plantear un contraste de hipótesis, con un nivel de significación del 5%, para decidir si la hipótesis que se consideraba como cierta lo continúa siendo o bien tienen razón los biólogos, determine la región crítica de este contraste y, utilizando ésta, razone si con ese nivel se puede aceptar que los biólogos del parque están en lo cierto. *(2,5 puntos)*

SOLUCIONES

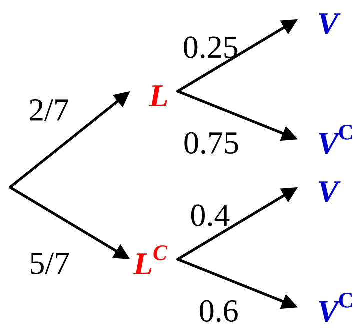
1) Lucía quiere ir de vacaciones a la costa. En su guía de viajes lee que en esa época del año llueve dos días a la semana y que hace viento el 25% de los días que llueve y el 40% de los días que no llueve. Elegido un día de esa época,

a) ¿Cuál es la probabilidad de que haga viento? *(1 punto)*

Los datos de este problema se pueden organizar en un diagrama de árbol, como el adjunto, donde, para un día elegido al azar, se han designado los siguientes sucesos: $L \equiv$ "llueve"; $V \equiv$ "hace viento"

Nos piden $P(V)$. Por el *Teorema de la Probabilidad Total*, se tiene:

$$\boxed{P(V) =} P(V/L)\cdot P(L) + P(V/L^C)\cdot P(L^C) =$$
$$= 0.25\cdot\frac{2}{7} + 0.4\cdot\frac{5}{7} = \boxed{\frac{5}{14}}$$



b) Si hace viento, ¿cuál es la probabilidad de que esté lloviendo? *(0,8 puntos)*

Por el *axioma de la Probabilidad Condicionada*, del que se deduce el *Teorema de Bayes*, se tiene:

$$P(L/V) = \frac{P(L\cap V)}{P(V)} = \frac{0.25\cdot\frac{2}{7}}{\frac{5}{14}} = \boxed{\frac{1}{5}}$$

c) ¿Cuál es la probabilidad de que no llueva y no haga viento? *(0,7 puntos)*

$$\boxed{P(L^C\cap V^C) =} P(V^C/L^C)\cdot P(L^C) = 0.6\cdot\frac{5}{7} = \boxed{\frac{3}{7}}$$

2) a) En un centro docente, la tercera parte de los alumnos estudia el idioma A, la mitad el idioma B y el resto, el idioma C. Cada alumno estudia sólo uno de estos idiomas. En una muestra seleccionada mediante muestreo estratificado con afijación proporcional al número de los alumnos de cada idioma, el número de alumnos tomados del idioma A es de 28. Determinar cuántos se han elegido de los otros dos idiomas y el tamaño de la muestra. *(1 punto)*

La proporción de estudiantes del idioma C es:

$$1-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right) = 1-\frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$

Por tanto, tenemos el siguiente esquema:

Idioma	Población	Muestra
A	1/3	28
B	1/2	*x*
C	1/6	*y*
Total:	1	*n*

Un tercio del total de componentes de la muestra (n) resulta valer 28. Por tanto:

$$\frac{1}{3}n = 28 \Rightarrow \boxed{n =} 28\cdot 3 = \boxed{84 \text{ individuos}}$$

Por tanto:

Estudiantes de B: $\boxed{x =} \frac{1}{2}84 = \boxed{42 \text{ individuos}}$

Estudiantes de C: $\boxed{y =} \frac{1}{6} \cdot 84 = \boxed{14 \text{ individuos}}$

Nótese que $28 + 42 + 14 = 84$ (tamaño muestral)

b) Una población tiene 6 elementos. Mediante muestreo aleatorio simple se seleccionan muestras de tamaño 3, siendo la desviación típica de sus medias $\sqrt{2}$ y la media de las medias muestrales, 7. ¿Cuánto valen la media y la varianza de la población? *(1,5 puntos)*

En una población finita cuya *media poblacional* vale μ y cuya *desviación típica poblacional* es σ, la media de las medias muestrales vale:

$$\mu_{\bar{x}} = \mu$$

y la desviación típica de las medias muestrales vale:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

donde n = tamaño de las muestras. En nuestro caso, $n = 3$. Y nos dan $\mu_{\bar{x}} = 7$ y $\sigma_{\bar{x}} = 2$. Por tanto:

$$\boxed{\mu = 7}$$

$$\frac{\sigma}{\sqrt{3}} = 2 \Rightarrow \sigma = 2\sqrt{3} \Rightarrow \boxed{\sigma^2 =} (2\sqrt{3})^2 = 4 \cdot 3 = \boxed{12}$$

3) De una población se ha extraído una muestra de 400 personas y 72 de ellas poseen un determinado gen.

a) Calcular un intervalo de confianza, al 99.2%, para la proporción de personas de la población que poseen dicho gen. *(1,5 puntos)*

El intervalo de confianza se puede construir porque $n = 400 \geq 30$, y es fiable la aproximación que se hace en virtud del *Teorema Central del Límite*.

Como $1 - \alpha = 0.992 \Rightarrow \alpha = 0.008 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{0.008}{2} = 0.996$. Y de aquí:

$P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 0.996 \Rightarrow \underline{z_{\alpha/2} = 2.65}$ (proporcionado por las tablas de la N(0;1))

Por último, la proporción observada en la muestra es:

$$\hat{p} = \frac{72}{400} = \frac{9}{50}$$

En consecuencia, el intervalo de confianza al 99.2% es (sustituyendo los valores calculados):

$$\left(\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\ \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right) = \boxed{(0.1291,\ 0.2309)}$$

b) Calcular el error máximo admisible cometido con ese intervalo. *(1 punto)*

El *error máximo* es la mitad de la *amplitud* del intervalo de confianza:

$$E = \frac{0.2309 - 0.1291}{2} = \boxed{0.0509}$$

4) El peso medio de los pájaros de una determinada especie que habita en un parque natural se consideraba no inferior a 110 g, pero los biólogos del parque sostienen ahora la hipótesis de que dicho peso medio ha disminuido a consecuencia del cambio climático. Se ha tomado una muestra de 100 pájaros de esta especie y se ha obtenido un peso me-

dio de 108 g. Se sabe que la variable que mide el peso de los pájaros de esta especie sigue una distribución Normal con desviación típica igual a 6 g. Plantear un contraste de hipótesis, con un nivel de significación del 5%, para decidir si la hipótesis que se consideraba como cierta lo continúa siendo o bien tienen razón los biólogos, determine la región crítica de este contraste y, utilizando ésta, razone si con ese nivel se puede aceptar que los biólogos del parque están en lo cierto. *(2,5 puntos)*

<u>El contraste se puede realizar porque los datos proceden de una población con distribución Normal</u>. Las hipótesis del contraste son:

$$\begin{cases} H_0 : \mu \geq 110 \\ H_1 : \mu < 110 \end{cases}$$

Nótese que la hipótesis que contiene el = debe ser la *nula*. Y es la creencia inicial. La *alternativa* es lo que afirman los biólogos. Y se trata de un *contraste unilateral de medias*.

Como $\alpha = 0.05 \Rightarrow 1 - \alpha = 0.95$. De aquí, y buscando en las tablas de la N(0;1):

$$P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 0.95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1.645$$

Como es un contraste unilateral en el que la *hipótesis nula* afirma que $\mu \geq 110$, valores grandes de su estimador $\bar{x}$ corroborarán dicha hipótesis, y serán admisibles valores un poco menor que la media supuesta, siendo la diferencia achacable a diferencias aleatorias. Por tanto, traducido esto a una variable Normal *tipificada* (en la que la *media* se transforma en 0), la *región de aceptación* será:

$$RA_{0.05} = (-1.645, +\infty) \Rightarrow \boxed{RC_{0.05} = (-\infty, -1.645)}$$

El valor del *estadístico del contraste* es, según los datos de que disponemos:

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{108 - 110}{6 / \sqrt{100}} = -3.33$$

Como se verifica que este valor $Z \in RC_{0.05} \Rightarrow$ Rechazamos la *hipótesis nula*.

Por tanto, concluimos que $\boxed{\text{tienen razón los biólogos}}$, con un nivel de significación del 5% (es decir, ésta es la probabilidad de equivocarnos, porque es la de aceptar la *hipótesis alternativa*, que es lo que hemos hecho, suponiendo que la verdaderamente cierta fuera la *nula*).