CONJUNTOS – CONJUNTOS NUMÉRICOS

1. CONJUNTOS

Un conjunto es una colección de elementos de cualquier índole.
Describimos el conjunto escribiendo sus elementos *entre llaves* y *separados por comas*. Por ejemplo, las letras vocales pueden formar un conjunto:

$$\{a, e, i, o, u\}$$

Si el conjunto consta de infinitos elementos, habría que describirlos de forma adecuada. Por ejemplo, todos los números que sean mayores que 2:

$$\{\text{números reales mayores que } 2\} \quad \text{ó} \quad \{x \,/\, x > 2\}$$

Comentamos esta segunda forma. El símbolo / significa “tal que” o “tales que”. De modo que es el conjunto de los elementos *x* tales que *x* es mayor que 2. O sea, cualquier número mayor que 2.
Para referirnos al conjunto sin tener que escribirlo completo, le damos un nombre, consistente en una letra mayúscula. Parece adecuado elegir V para el de las vocales:

$$V = \{a, e, i, o, u\}$$

Los integrantes de un conjunto se llaman ***elementos***. Así, a es uno de los elementos de V. Esto se expresa mediante el símbolo $\in$ que se lee “*pertenece a*” o “*perteneciente a*” “*es elemento de*”. De modo que es correcto escribir:

$$a \in V$$

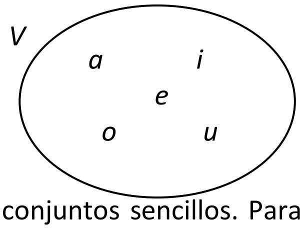
El conjunto de todos los números reales se designa siempre por la letra R. Así, el conjunto anterior, de todos los números reales mayores que 2, al que podemos designar por la letra A, por ejemplo, se describiría más precisamente así:

$$A = \{x \in \mathrm{R} \,/\, x > 2\}$$

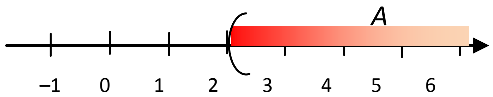
Con ello, es cierto que $6 \in A$ y que $\pi \in A$. Pero 2 no pertenece a A, puesto que 2 no es mayor que 2 (si hubiésemos elegido como condición para pertenecer a A que los números fuesen *mayores o iguales que 2*, entonces sí que sería 2 un elemento de *A*). Para escribir que 2 no pertenece a A lo hacemos así: $2 \notin A$.
Hay un conjunto especial que no contiene ningún elemento. Se le conoce como **conjunto vacío** y su símbolo es, siempre: $\varnothing$.

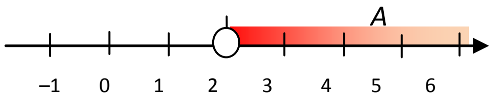
2. REPRESENTACIÓN GRÁFICA

Una forma sencilla de representar gráficamente un conjunto es mediante un óvalo que encierre todos sus elementos. Esto es un *diagrama de Venn*. Por ejemplo:

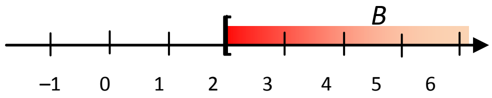


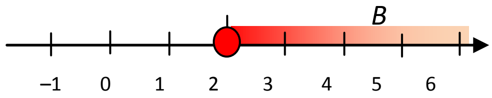
Esto funciona bien para conjuntos sencillos. Para el conjunto A anterior puede que no sea muy apropiado un diagrama de Venn y haya que recurrir a otras formas. Por ejemplo, usando una recta donde representamos todos los números reales, *A* sería:





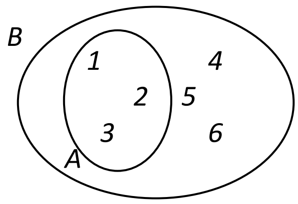
Hemos utilizado dos tipos de gráficos para A. En el primero, un paréntesis en el 2 resalta que $2 \notin A$. Aunque sí pertenece a A cualquier número mayor que 2, por cercano que esté a 2. En el segundo, un punto hueco designa lo mismo.
Para un conjunto $B = \{x \in R \ / \ x \geq 2\}$, usaremos un corchete o un punto relleno para recalcar que 2 está dentro del conjunto dibujado:





3. SUBCONJUNTOS

Si todos los elementos de un conjunto A están también en otro conjunto B, se dice que A es *subconjunto* de B o que *A está incluido en B*. Se escribe simbólicamente: $A \subset B$. O, también: $B \supset A$ (en el lado abierto del símbolo está el conjunto que tiene más elementos).
Por ejemplo, si $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, se tiene que $A \subset B$. Gráficamente:

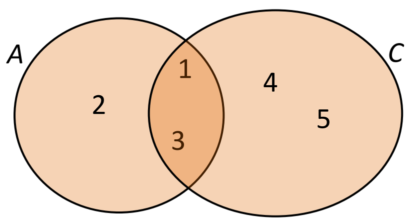


Observar que la relación de *inclusión* $\subset$ lo es de conjunto a conjunto, mientras que la de *pertenencia* lo es de elemento a conjunto.
Siendo A y B los anteriores, es correcto escribir $2 \in A \subset B$ (lo que implica, necesariamente, que $2 \in B$). Pero es incorrecto decir que $2 \subset A$ (porque 2 no es un conjunto, con lo cual no puede ser subconjunto de A), o que $A \in B$ (porque A no es uno de los elementos de B, que son, exclusivamente: 1, 2, 3, 4, 5 y 6).

4. OPERACIONES CON CONJUNTOS

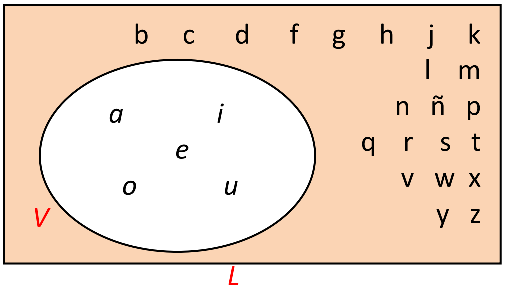
Hay tres operaciones principales, y una cuarta operación derivada de las tres primeras. Veámoslas.

a) **UNIÓN**. Al *unir* dos conjuntos, formamos un nuevo conjunto con todos los elementos que estén en uno u otro de los dos conjuntos originales, aunque estén repetidos. El símbolo de la operación es $\cup$.
Por ejemplo, la unión de $A = \{1, 2, 3\}$ con $C = \{1, 3, 4, 5\}$ es: $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
Gráficamente, sería toda la zona coloreada, incluida la zona común.

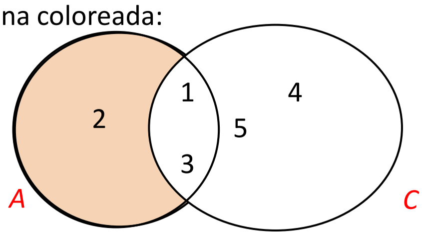


b) **INTERSECCIÓN**. La intersección de dos conjuntos es un nuevo conjunto formado por todos los elementos comunes a ambos. El símbolo de la operación es $\cap$. Así, para el ejemplo anterior, $A \cap C = \{1, 3\}$. Gráficamente, es la zona de color más fuerte.

c) **CONJUNTO COMPLEMENTARIO**. Dado un conjunto A su conjunto complementario consta de todos los elementos que no están en A. Para poder construirlo, hay que tener claro cuáles son "*todos los elementos*", de manera que hay que tener definido un conjunto, denominado **conjunto universal** que contiene a *todos los elementos* con los que estemos trabajando. El complementario de A se designa de cualquiera de las tres formas siguientes: $\overline{A}$, A^C ó A'.
Por ejemplo, si tomamos como conjunto universal del las letras: $L = \{a, b, c, ..., z\}$ y V son las vocales, entonces $\overline{V} = \{b, c, d, f, ..., z\}$, es decir, las consonantes. Gráficamente $\overline{V}$ está coloreado.



d) **DIFERENCIA DE CONJUNTOS**. Dados dos conjuntos A y B, la diferencia A menos B, que se designa por $A - B$ es un conjunto formado por todos los elementos de A que no estén en B. Por ejemplo, si $A = \{1, 2, 3\}$ y $C = \{1, 3, 4, 5\}$, entonces $A - C = \{2\}$. Gráficamente, es la zona coloreada:



Observar que $A - B = A \cap \overline{B}$. Por eso decimos que esta última operación de conjuntos se deriva de las tres anteriores.

Ejemplo. Si $A = \{a, b, c, d, e\}$ y $B = \{a, e, i, o, u\}$, entonces $A \cap B = \{a, e\}$; $A \cup B = \{a, b, c, d, e, i, o, u\}$; $A - B = \{b, c, d\}$; $B - A = \{i, o, u\}$. Si el *conjunto universal* es el formado por todas las letras, entonces $\overline{A} = \{f, g, h, i, ..., z\}$ y $\overline{B} = \{b, c, d, f, g, h, j, ..., ñ, p, ..., t, v, ..., z\}$.

5. CONJUNTOS NUMÉRICOS

Clasificamos los números en varios conjuntos.

- Números **naturales**: Se designan siempre por N. Son todos los números positivos (incluido el cero, que es tanto positivo como negativo, y es el único número al que le ocurre esto) y que no tienen decimales: **N = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, … }**. Tiene infinitos elementos.
- Números **enteros**: Se designan por Z. Son todos los números sin decimales, tanto positivos como negativos: **Z = {…, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, …}**. Observar que todos los números naturales son, también, enteros. Por tanto, $N \subset Z$.
- Números **racionales**: Se designan por Q. Son todos los números que pueden escribirse como fracción. Por ejemplo 0,5 = 1/2 = 2/4. O, también, –3 = – 3/1 = – 6/2. De esta manera, todo número entero, también es racional. Por tanto, $Z \subset Q$.
  Tener en cuenta que el número racional no es la fracción, porque hay infinitas fracciones que expresan la misma cantidad. Tampoco es la expresión decimal, porque, si bien es única, podemos escribir la misma cantidad en forma de fracción. El número racional *es la cantidad que expresan*, y puede escribirse tanto por su expresión decimal, como hicimos con 0.5, o con infinitas fracciones, tales como 1/2 = 2/4 = 3/6 = …

No podemos escribir el conjunto de los números racionales como hicimos antes con N ó Z, enumerando sus elementos en orden, puesto que dada una fracción determinada, no hay otro número racional que sea el que le sigue: entre dos números racionales cualesquiera siempre hay otro número racional (basta sumarlos y dividir el resultado entre 2). Por tanto, entre dos números racionales, por próximos que estén, hay infinitos números racionales.
Así **Q = {números que pueden expresarse en forma de fracción}**

Desde una fracción, podemos convertir un número racional a su expresión decimal dividiendo numerador entre denominador. Por otra parte, es posible reconocer si un número es racional, o si no lo es, viendo cuál es su expresión decimal: los números racionales son aquéllos, y sólo aquéllos cuya expresión decimal es:

- *Finita*: Tiene un número *finito* (no infinito) de decimales. Por ejemplo, –3, que tiene cero decimales. O también 7.56, que consta de dos decimales.
- *Infinita periódica*: La expresión decimal se dice *periódica* si hay un grupo de decimales que se repite constantemente, hasta el infinito. Por ejemplo:

  $4,\widehat{123} = 4,123123123\ldots$; $\quad -5,31\widehat{17} = -5,31171717\ldots$

  El primer número tiene una expresión decimal *infinita periódica pura*, puesto que el período comienza justo detrás de la coma decimal. El segundo es, en cambio, *periódico mixto*. Pero ambos son *periódicos* y pueden expresarse como fracción. Concretamente,

  $$4,\widehat{123} = \frac{4119}{999} \quad \text{y} \quad -5,31\widehat{17} = \frac{52586}{9900}$$

Todo número cuya expresión decimal no sea ni finita ni infinita periódica no puede ser racional; es decir, no puede escribirse en forma de fracción.

- Números **irracionales**: Se designan por I. Son los que no se pueden escribir en forma de fracción. Por lo dicho antes, su expresión decimal consta de infinitos decimales y no son periódicos. La inmensa mayoría de los números son irracionales. Así:

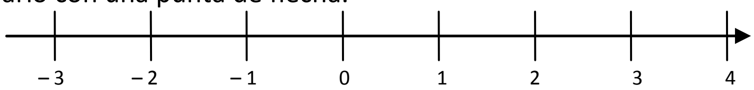
  I = {números que no se pueden escribir en forma de fracción}

  Son irracionales números muy importantes:
  - π = 3,14159265358979323846264338327950… (lo solemos abreviar a 3,14 ó 3,1416, pero son aproximaciones, puesto que debe tener infinitos decimales no periódicos).
  - *e* = 2,7182818284… Número que aparece en multitud de fenómenos naturales, tanto físicos como biológicos, estadísticos o financieros.
  - $\varnothing = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ = 1,6180339887… conocido como *número de oro* o *número áureo* o *proporción áurea*. Número que aparece en muchas figuras geométricas y tal que se suele atribuir la mejor forma posible, desde el punto de vista estético, a aquellos objetos que siguen la proporción áurea.
  - Toda raíz que no dé exacta: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, …
- Números **reales**: Se designan por R. Comprenden a todos los números, racionales o irracionales. Concretamente: **R = Q ∪ I**.

De esta forma: $\boxed{N \subset Z \subset Q \subset R; \quad I \subset R; \quad R = Q \cup I; \quad Q \cap I = \varnothing}$.
Observar que no hay ningún número que sea *racional* e *irracional* al mismo tiempo, porque ello significaría que se puede expresar como fracción y que no se puede expresar como fracción.
Además, $0 \in N \subset Z \subset Q \subset R$.

6. RECTA REAL

Los números se representan sobre una recta. En ella, se marcan el 0 y el 1. A intervalos regulares se ponen marcas, que corresponden al 2, 3, etc. El sentido creciente es hacia la derecha, y solemos recordarlo con una punta de flecha.

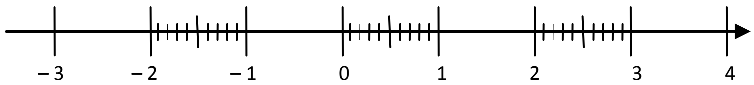


Para representar decimales, dividimos las unidades (por ejemplo, el espacio entre 0 y 1, ó entre 1 y 2, ó entre – 2 y – 3) en diez partes iguales (con 9 marcas divisorias). Cada una corresponde a una décima.

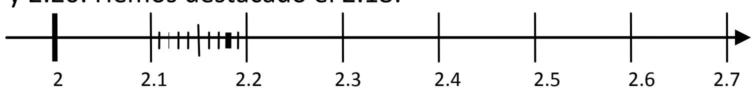
En el gráfico siguiente, las marcas que están entre 0 y 1, de izquierda a derecha representan al: 0 (la primera, la que correspondía ya al 0), 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5 (la que hemos resaltado poniéndola algo mayor), 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0 = 1.

Las que están entre 2 y 3 son 2.0, 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6, 2.7, 2.8, 2.9 y 3.0.

Las que están entre –2 y –1 son, de izquierda a derecha: –2.0, –1.9, –1.8, –1.7, –1.6, –1.5, –1.4, –1.3, –1.2, –1.1 y –1.0. Observar que todo número que esté en la recta a la derecha de otro, es mayor que ese otro (recordar que la flecha marca el sentido creciente):



Si queremos llegar a las centésimas, dividiríamos el espacio entre dos décimas consecutivas (por ejemplo, entre 2.1 y 2.2) en diez partes iguales (con 9 marcas intermedias). Cada una de ellas sería (empezando en 2.1 y terminando en 2.2): 2.10, 2.11, 2.12, 2.13, 2.14, 2.15, 2.16, 2.17, 2.18, 2.19 y 2.20. Hemos destacado el 2.18:



También podemos representar fracciones sin necesidad de dividir numerador y denominador para obtener su expresión decimal. En una fracción, el denominador designa en cuántas partes iguales se divide cada unidad (el espacio entre 0 y 1, o entre 1 y 2, etc). El numerador señala cuántas de esas partes tomamos. Así, en el siguiente gráfico, $b = 13/4$, porque cada unidad se ha dividido en 4 partes iguales mediante tres marcas intermedias equidistantes. Así, desde 0 y hacia la derecha, al llegar a 1 hemos recorrido 4 de esas partes ($1 = 4/4$); al 2, 8 de esas partes ($2 = 8/4$); en 3 llevamos 12 de esas partes iguales (cada una de ellas es $1/4$), por lo que $3 = 12/4$. El número b está sobre una parte más, luego es $13/4$.

De la misma forma, $a = -7/3$: Del 0 al –1, cada marca representa –1/3, –2/3 y –3/3 = –1; Al llegar a –2 estamos en –2 = –6/3. Una marca más a la izquierda es, entonces, –7/3.