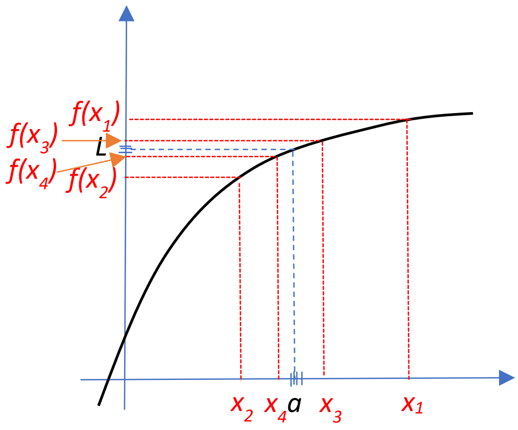
INTRODUCCIÓN AL CONCEPTO DE LÍMITES DE FUNCIONES

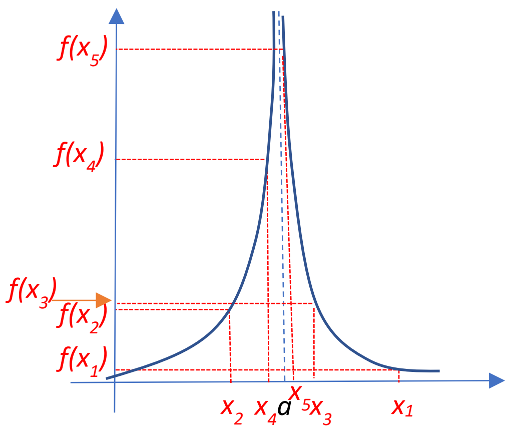


La *idea* de límite de una función en un punto es la siguiente. Se dice que "*el límite de f(x) cuando x tiende hacia a vale L*", y se escribe $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ si (y sólo si) para toda sucesión de valores de x que tienda hacia a, se crea una sucesión de imágenes de esos x que tiende hacia L.

Vamos a intentar explicar esto con ayuda del gráfico adjunto. Una sucesión es una secuencia de valores, de manera que se sabe cuál es el primero, el segundo, etc. El número de valores de la sucesión es infinito. Que $x \to a$ significa que tenemos infinitos valores de x que se van aproximando a a cada vez más. Por ejemplo, los que hemos dibujado en el gráfico: x_1, x_2, x_3, x_4, …, y hemos querido indicar que la sucesión continúa marcando algunos puntos más, cada vez más próximos a a. El total de puntos de la sucesión es infinito, por lo que debería verse una mancha de puntos en las proximidades de a, que ya no podemos dibujar. La sucesión tiene la particularidad de que *ninguno de los valores de la sucesión vale a*.

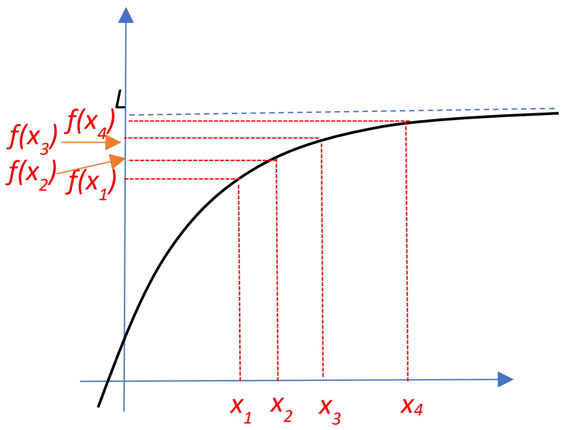
Pues bien, para cada valor de la sucesión, la función proporciona una *imagen*. Así, tenemos señalados, igualmente, $f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4)$, …. Es decir, que en el eje OY se ha creado una segunda sucesión de valores que se van aproximando infinitamente a L.

De forma análoga, pueden presentarse, entre otros, los siguientes casos para límites de funciones:



Cuando la sucesión de valores de x se va acercando a a, la sucesión de las correspondientes imágenes crece y crece desmesuradamente, es decir, tiende a *infinito*. Esto significa:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$



Ahora, los valores de x crecen sin fin, es decir, tienden a infinito, mientras que sus imágenes se van acercando infinitamente a L. Por tanto:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

LÍMITES LATERALES

Si hacemos tender x hacia a sólo por un lado de a, por ejemplo, por la izquierda de a, el límite que se obtiene es el *límite por la izquierda*; análogo para el *límite por la derecha*. La notación es:

- Límite cuando x tiende a a por la izquierda, de *f*(*x*): $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$
- Límite cuando x tiende a a por la derecha, de *f*(*x*): $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$

La relación entre límites laterales y el límite completo es la siguiente:

- *El límite completo existe y vale* L *si, y sólo si los dos límites laterales existen y valen* L.
- *El límite completo da un resultado si, y sólo si los dos límites laterales dan ese mismo resultado*.

Hay que puntualizar que *el límite completo, si existe, es único*.
Según lo anterior:

- Si calculamos los límites laterales de una función en un punto y coinciden, el límite completo vale ese resultado coincidente.
- Si al calcular los límites laterales no coinciden, o alguno de ellos no existe, el límite completo no existe.
- Si un límite da *infinito* como resultado, decimos que dicho límite *no existe*, porque *infinito* no es un número y, por tanto, decimos que no existe. De hecho, que sepamos, a día de hoy no hay ninguna confirmación de nada que sea infinito. El Universo que podemos observar no es infinito.
- El infinito con signo no es más que añadir información de en qué dirección nos estamos acercando al infinito, entendiendo como tal el punto del plano más alejado del origen de coordenadas en cualquier dirección. Podemos acercarnos al infinito cuando nos alejamos del origen por uno de los ejes de coordenadas. Y podemos hacerlo sólo moviéndonos por el lado positivo del eje (decimos que tendemos a $+\infty$), por el negativo (tendemos a $-\infty$), o alternativamente, montando una sucesión que se aleje del origen siendo un valor de la sucesión positivo y el siguiente negativo, volviendo a ser positivo el que continúe la sucesión, y así sucesivamente (tendemos a ∞ *sin signo*). Si no queremos precisar y, por ejemplo, en lugar de $+\infty$ decimos sólo ∞, será verdad, aunque proporcionando menos información. Por tanto, *infinito sin signo engloba a +infinito y a –infinito*. De este modo, si un límite lateral resulta $+\infty$ y el otro, $-\infty$, es también cierto que ambos valen ∞ *sin signo*. Por tanto, al dar un resultado coincidente, el límite completo valdrá, en tal caso, ∞ sin signo.

Cuando trabajemos con asíntotas y con continuidad de funciones, usaremos el instrumento *límite de funciones*, del que hemos dado una introducción en este documento. Exhortamos a estudiar los documentos de continuidad y de asíntotas que tenemos en nuestra web para familiarizarse más con la forma en que trabajan los límites.