CONVERTIR VALOR ABSOLUTO EN FUNCIÓN DEFINIDA A TROZOS

En Selectividad no es infrecuente trabajar con funciones en las que aparecen valores absolutos. Pero si hay que dibujarlas o derivarlas, por ejemplo, precisan ser convertidas en funciones definidas a trozos. Y esto se hace recurriendo a la definición de valor absoluto:

$$|a| = \begin{cases} -a & \text{si} \quad a < 0 \\ a & \text{si} \quad a \geq 0 \end{cases}$$

Para comprender cómo trabajan las funciones definidas a trozos, tenemos en la web otro documento titulado así (*Funciones definidas a trozos*), ubicado en el Tercer Trimestre. Suponiendo que se conoce dicho funcionamiento, vamos a resolver algunos ejemplos, algunos de ellos procedentes de problemas de Selectividad.

1) Escribir sin valor absoluto la función $f(x) = x|2 - x|$ (Selectividad 2010).
Recurriendo a la definición (llamando a a lo que está dentro del valor absoluto, en este caso $a = 2 - x$:

$$|2 - x| = \begin{cases} -(2-x) & \text{si} \quad 2-x<0 \\ 2-x & \text{si} \quad 2-x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} -2+x & \text{si} \quad 2<x \\ 2-x & \text{si} \quad 2 \geq x \end{cases}$$

donde hemos despejado en las inecuaciones que condicionan el resultado de la función. Por tanto:

$$f(x) = x|2 - x| = x\cdot \begin{cases} -2+x & \text{si} \quad x>2 \\ 2-x & \text{si} \quad x \leq 2 \end{cases} = \begin{cases} x(2-x) & \text{si} \quad x \leq 2 \\ x(-2+x) & \text{si} \quad x>2 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 2x-x^2 & \text{si} \quad x \leq 2 \\ -2x+x^2 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$

2) Escribir sin valor absoluto la función $f(x) = x^2|x - 3|$ (Selectividad 2009).
Al igual que antes:

$$f(x) = x^2|x-3| = x^2 \begin{cases} -(x-3) & \text{si} \quad x-3<0 \\ x-3 & \text{si} \quad x-3 \geq 0 \end{cases} = x^2 \begin{cases} -x+3 & \text{si} \quad x<3 \\ x-3 & \text{si} \quad x \geq 3 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} x^2(-x+3) & \text{si} \quad x<3 \\ x^2(x-3) & \text{si} \quad x \geq 3 \end{cases} = \begin{cases} -x^3+3x^2 & \text{si} \quad x<3 \\ x^3-3x^2 & \text{si} \quad x \geq 3 \end{cases}$$

3) Escribir sin valor absoluto $f(x) = 2x - |2x - 3|$
Como en los ejercicios anteriores:

$$f(x) = 2x - |2x-3| = 2x - \begin{cases} -(2x-3) & \text{si} \quad 2x-3<0 \\ 2x-3 & \text{si} \quad 2x-3 \geq 0 \end{cases} =$$

$$= 2x - \begin{cases} -2x+3 & \text{si} \quad x<3/2 \\ 2x-3 & \text{si} \quad x \geq 3/2 \end{cases} = \begin{cases} 2x-(-2x+3) & \text{si} \quad x<3/2 \\ 2x-(2x-3) & \text{si} \quad x \geq 3/2 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 2x+2x-3 & \text{si} \quad x<3/2 \\ 2x-2x+3 & \text{si} \quad x \geq 3/2 \end{cases} = \begin{cases} 4x-3 & \text{si} \quad x<3/2 \\ 3 & \text{si} \quad x \geq 3/2 \end{cases}$$

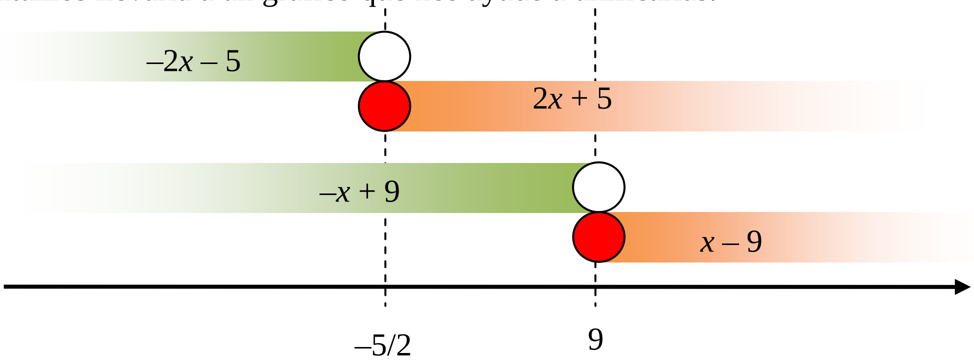
4) Escribir sin valor absoluto $f(x) = 3x - |2x + 5| + |x - 9|$
Este problema es algo más complicado porque hay que combinar el funcionamiento de dos valores absolutos simultáneamente. No procede de Selectividad.

$$f(x) = 3x - |2x+5| + |x-9| =$$

$$= 3x - \begin{cases} -(2x+5) & \text{si} \quad 2x+5<0 \\ 2x+5 & \text{si} \quad 2x+5\geq 0 \end{cases} + \begin{cases} -(x-9) & \text{si} \quad x-9<0 \\ x-9 & \text{si} \quad x-9\geq 0 \end{cases} =$$

$$= 3x - \begin{cases} -2x-5 & \text{si} \quad x<-5/2 \\ 2x+5 & \text{si} \quad x\geq 5/2 \end{cases} + \begin{cases} -x+9 & \text{si} \quad x<9 \\ x-9 & \text{si} \quad x\geq 9 \end{cases} =$$

La primera función definida a trozos que aparece en la expresión anterior cambia de fórmula al pasar –5/2 de izquierda a derecha. La segunda lo hace al pasar por 9. Intentamos llevarla a un gráfico que nos ayude a unificarlas:



Arriba hemos puesto la primera función definida a trozos, indicando cuánto vale según las zonas. El "*punto grueso*" hueco significa que en ese punto *no* vale esa fórmula sino la otra, la que lleva el *punto* relleno. Así puede verse que para valores inferiores a –5/2, excluido éste, la primera función vale $-2x-5$ y la otra, $-x+9$. Entre –5/2 inclusive y 9 exclusive, la primera vale $2x+5$ y la segunda, $-x+9$. A partir de 9, incluido, la primera vale $2x+5$ y la otra $x-9$. De este modo (hay que considerar, además, que la primera va precedida en la expresión completa de signo –):

$$= 3x + \begin{cases} -(-2x-5)+(-x+9) & \text{si} \quad x<-5/2 \\ -(2x+5)+(-x+9) & \text{si} \quad -5/2\leq x<9 \\ -(2x+5)+(x-9) & \text{si} \quad x\geq 9 \end{cases} =$$

$$= 3x + \begin{cases} 2x+5-x+9 & \text{si} \quad x<-5/2 \\ -2x-5-x+9 & \text{si} \quad -5/2\leq x<9 \\ -2x-5+x-9 & \text{si} \quad x\geq 9 \end{cases} = 3x + \begin{cases} x+14 & \text{si} \quad x<-5/2 \\ -3x+4 & \text{si} \quad -5/2\leq x<9 \\ -x-14 & \text{si} \quad x\geq 9 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 3x+(x+14) & \text{si} \quad x<-5/2 \\ 3x+(-3x+4) & \text{si} \quad -5/2\leq x<9 \\ 3x+(-x-14) & \text{si} \quad x\geq 9 \end{cases} = \begin{cases} 4x+14 & \text{si} \quad x<-5/2 \\ 4 & \text{si} \quad -5/2\leq x<9 \\ 2x-14 & \text{si} \quad x\geq 9 \end{cases}$$

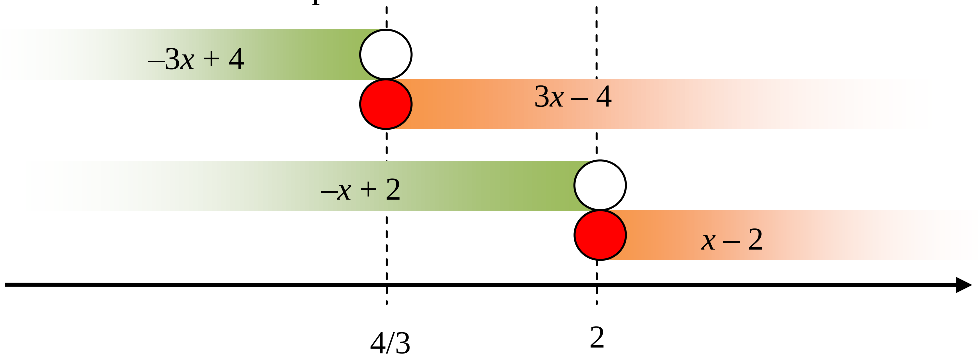
5) Escribir sin valor absoluto $f(x) = 2x + |3x-4| + |x-2|$

$$f(x) = 2x + |3x-4| + |x-2| =$$

$$= 2x + \begin{cases} -(3x-4) & \text{si} \quad 3x-4<0 \\ 3x-4 & \text{si} \quad 3x-4\geq 0 \end{cases} + \begin{cases} -(x-2) & \text{si} \quad x-2<0 \\ x-2 & \text{si} \quad x-2\geq 0 \end{cases} =$$

$$= 2x + \begin{cases} -3x+4 & \text{si} \quad x<4/3 \\ 3x-4 & \text{si} \quad x\geq 4/3 \end{cases} + \begin{cases} -x+2 & \text{si} \quad x<2 \\ x-2 & \text{si} \quad x\geq 2 \end{cases} =$$

La primera función definida a trozos cambia de fórmula al traspasar $x = 4/3$. La segunda, al atravesar $x = 2$. Considerando que $4/3 < 2$, un gráfico nos ayuda a unificarlas en solo una expresión:



$$= 2x + \begin{cases} (-3x+4)+(-x+2) & \text{si} \quad x<4/3 \\ (3x-4)+(-x+2) & \text{si} \quad 4/3 \le x < 2 \\ (3x-4)+(x-2) & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases} =$$

$$= 2x + \begin{cases} -3x+4-x+2 & \text{si} \quad x<4/3 \\ 3x-4-x+2 & \text{si} \quad 4/3 \le x < 2 \\ 3x-4+x-2 & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases} =$$

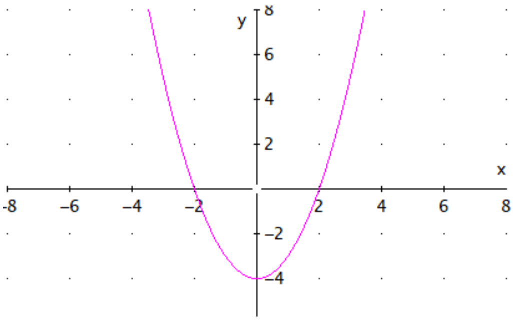
$$= 2x + \begin{cases} -4x+6 & \text{si} \quad x<4/3 \\ 2x-2 & \text{si} \quad 4/3 \le x < 2 \\ 4x-6 & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases} = \begin{cases} 2x-4x+6 & \text{si} \quad x<4/3 \\ 2x+2x-2 & \text{si} \quad 4/3 \le x < 2 \\ 2x+4x-6 & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} -2x+6 & \text{si} \quad x<4/3 \\ 4x-2 & \text{si} \quad 4/3 \le x < 2 \\ 6x-6 & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases}$$

6) Escribir sin valor absoluto $f(x) = |x^2 - 4|$ (Selectividad 2016 y 2015)

$$f(x) = |x^2 - 4| = \begin{cases} -(x^2-4) & \text{si} \quad x^2-4<0 \\ x^2-4 & \text{si} \quad x^2-4 \ge 0 \end{cases}$$

Para resolver la ecuación $x^2 - 4 < 0$, dibujamos la parábola $y = x^2 - 4$. Al hacerlo, vemos que los valores de x para los cuales $y < 0$ son los del intervalo $(-2, 2)$. Como $y = x^2 - 4$, los valores de x para los que $x^2 - 4 < 0$ son los de dicho intervalo. Por tanto:



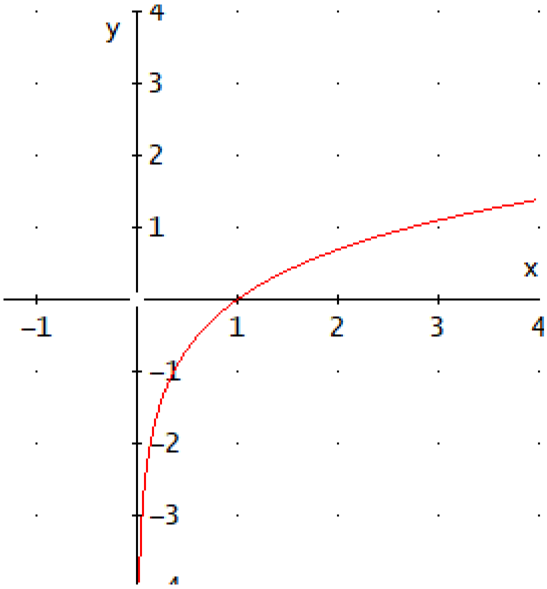
$f(x) =$

$$= \begin{cases} -x^2+4 & \text{si} \quad x \in (-2, 2) \\ x^2-4 & \text{si} \quad x \in (-\infty,-2] \cup [2,+\infty) \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} x^2-4 & \text{si} \quad x \le -2 \\ -x^2+4 & \text{si} \quad -2 < x < 2 \\ x^2-4 & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases}$$

7) Escribir sin valor absoluto $f(x) = |\ln x|$ (Selectividad 2015 y 2013)

Para resolver este problema hay que conocer cómo es la gráfica de la función $y = \ln x$, que tenemos dibujada aquí.



Del gráfico podemos obtener la información de cuándo $\ln x < 0$ y cuando $\ln x \geq 0$. Por tanto (hay que considerar que $y = \ln x$ sólo existe cuando $x > 0$):

$$f(x) = \begin{cases} -\ln x & \text{si} \quad \ln x < 0 \\ \ln x & \text{si} \quad \ln x \geq 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} -\ln x & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ \ln x & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Por otra parte, dada una función cualquiera $y = g(x)$, la gráfica de la función $y = |g(x)|$ es la misma pero cambiando los ramales que queden bajo el eje OX por sus simétricos respecto al mismo eje, dado que el valor absoluto cambia a positivos los valores negativos. De este modo, la gráfica de nuestra función es la del gráfico siguiente: