MATEMÁTICAS 1º BACH. C. N. Y S. 25 de enero de 2010

Geometría y Logaritmos

1) Tomar logaritmos, y desarrollar, en la siguiente expresión: $A = \dfrac{x^3 y z^2}{a b^4}$ *(1 punto)*

2) Quitar logaritmos: $\log A = \dfrac{3\log x - \log b - 4\log a + \log y}{3}$ *(1 punto)*

3) Resolver: $5^{2x+2} - 626 \cdot 5^x + 25 = 0$ *(2 puntos)*

4) Resolver: $\left.\begin{array}{r} 2\log x + \log y = 3 \\ xy^2 = 1 \end{array}\right\}$ *(2 puntos)*

5) Dados los vectores $\vec{a} = (-3, 1)$ y $\vec{b} = (4, -2)$, se pide:
   a) Coordenadas de $3\vec{a} - 4\vec{b}$ *(0,5 puntos)*
   b) Ángulo que forman, en grados. *(1 punto)*
   c) ¿Forman base? *(0,5 puntos)*

6) Si tenemos dos vectores tales que $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = 7$, siendo $|\vec{a}| = 4$, hallar $|\vec{b}|$ *(2 puntos)*

SOLUCIONES

1) Tomar logaritmos, y desarrollar, en la siguiente expresión: $A = \dfrac{x^3yz^2}{ab^4}$ *(1 punto)*

$$A = \frac{x^3yz^2}{ab^4} \Rightarrow \boxed{\log A =} \log\frac{x^3yz^2}{ab^4} = \log(x^3y\,z^2) - \log(ab^4) =$$
$$= \log x^3 + \log y + \log z^2 - (\log a + \log b^4) = \boxed{3\log x + \log y + 2\log z - \log a - 4\log b}$$

2) Quitar logaritmos: $\log A = \dfrac{3\log x - \log b - 4\log a + \log y}{3}$ *(1 punto)*

$$\log A = \frac{3\log x - \log b - 4\log a + \log y}{3} = \frac{1}{3}(\log x^3 + \log y - \log a^4 - \log b) =$$
$$= \frac{1}{3}[\log x^3 y - (\log a^4 + \log b)] = \frac{1}{3}(\log x^3 y - \log a^4 b) = \frac{1}{3}\log\frac{x^3y}{a^4b} = \log\sqrt[3]{\frac{x^3y}{a^4b}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \boxed{A = \sqrt[3]{\frac{x^3y}{a^4b}}}$$

3) Resolver: $5^{2x+2} - 626 \cdot 5^x + 25 = 0$ *(2 puntos)*

$$5^{2x+2} - 626 \cdot 5^x + 25 = 0 \Rightarrow 5^{2x}5^2 - 626 \cdot 5^x + 25 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (5^x)^2\,25 - 626 \cdot 5^x + 25 = 0$$

Hacemos el cambio de variable $\boxed{t = 5^x}$:

$$25\,t^2 - 626\,t + 25 = 0 \Rightarrow t = \frac{626 \pm \sqrt{626^2 - 4\cdot25\cdot25}}{2\cdot25} = \left\langle \begin{array}{l} = 0{,}04 = \dfrac{1}{25} \\ = 25 \end{array}\right.$$

Deshacemos el cambio:

- Si $t = \dfrac{1}{25} \Rightarrow 5^x = \dfrac{1}{25} \Rightarrow 5^x = 5^{-2} \Rightarrow \boxed{x = -2}$
- Si $t = 25 \Rightarrow 5^x = 25 \Rightarrow 5^x = 5^2 \Rightarrow \boxed{x = 2}$

4) Resolver: $\left.\begin{array}{r} 2\log x + \log y = 3 \\ xy^2 = 1 \end{array}\right\}$ *(2 puntos)*

Tomamos logaritmos en la segunda ecuación y, considerando que $\log 1 = 0$, nos queda:

$$\left.\begin{array}{r} 2\log x + \log y = 3 \\ \log x + 2\log y = 0 \end{array}\right\}$$

Hacemos los cambios: $\boxed{a = \log x \quad b = \log y}$:

$$\left.\begin{array}{r} 2a + b = 3 \\ a + 2b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow a = -2b \quad \text{Sustituimos:} \quad \begin{array}{l} 2(-2b) + b = 3 \Rightarrow -4b + b = 3 \Rightarrow -3b = 3 \Rightarrow b = -1 \\ \text{Al sustituir:} \quad a = -2b = -2(-1) = 2 \end{array}$$

Deshaciendo el cambio:

- $a = 2 \Rightarrow \log x = 2 \Rightarrow \boxed{x = 10^2 = 100}$
- $b = -1 \Rightarrow \log y = -1 \Rightarrow \boxed{y = 10^{-1} = 1/10}$

5) Dados los vectores $\vec{a} = (-3, 1)$ y $\vec{b} = (4, -2)$, se pide:

a) Coordenadas de $3\vec{a} - 4\vec{b}$ *(0,5 puntos)*

$$3\vec{a} - 4\vec{b} = 3\,(-3, 1) - 4\,(4, -2) = (-9, 3) + (-16, 8) = \boxed{(-25, 11)}$$

b) Ángulo que forman, en grados. *(1 punto)*

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{-3\cdot 4 + 1(-2)}{\sqrt{(-3)^2+1^2}\sqrt{4^2+(-2)^2}} = \frac{-12-2}{\sqrt{10}\sqrt{20}} = \frac{-14}{\sqrt{200}} \qquad \boxed{\alpha = 171{,}87^{\circ}}$$

c) ¿Forman base? *(0,5 puntos)*

Sí, puesto que son no nulos y no son proporcionales, con lo que tienen distinta dirección. Lo sabemos porque:

$$\frac{-3}{4} \neq \frac{1}{-2}$$

6) Si tenemos dos vectores tales que $(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b}) = 7$, siendo $|\vec{a}| = 4$, hallar $|\vec{b}|$ *(2 puntos)*

Como $(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b}) = 7 \Rightarrow \vec{a}^{\,2} - \vec{b}^{\,2} = 7 \Rightarrow$ Y como $\vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2$, se tiene:

$$|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 7 \Rightarrow 16 - |\vec{b}|^2 = 7 \Rightarrow 16 - 7 = |\vec{b}|^2 \Rightarrow 9 = |\vec{b}|^2 \Rightarrow \boxed{|\vec{b}| = 3}$$

Ya que el módulo de un vector sólo puede ser positivo o nulo (o sea, que no puede valer –3).

MATEMÁTICAS 1º BACH. C. N. Y S. 10 de febrero de 2010

Geometría y Logaritmos

1) Resolver: $9^{x+1} - 3^{x+2} - 54 = 0$ *(2 puntos)*

2) Resolver: $\left.\begin{array}{r} \log x^2 + \log\sqrt{y} = -3/2 \\ xy^2 = 10 \end{array}\right\}$ *(2 puntos)*

3) Hallar los puntos que dividen al segmento PQ en tres partes iguales, siendo $P(-3, 1)$ y $Q(-6, 7)$. *(1 punto)*

4) Hallar el ángulo que forman las rectas $r \equiv 5x + 12y = 0$, $s \equiv -3x + 4y - 1 = 0$. *(1,5 puntos)*

5) Hallar una recta paralela a otra recta cuya pendiente es –1, sabiendo que debe pasar por (2, 3). Escribir la ecuación resultante de todas las formas que conozcas, escribiendo sus nombres respectivos. *(1,5 puntos)*

6) Hallar el simétrico de $P(-2, 4)$ respecto de $r \equiv 3x - 2y + 1 = 0$ *(2 puntos)*

SOLUCIONES

1) Resolver: $9^{x+1} - 3^{x+2} - 54 = 0$ *(2 puntos)*

Aplicamos propiedades de potencias:

$$9^{x+1} - 3^{x+2} - 54 = 0 \Rightarrow 9^x \cdot 9 - 3^x \cdot 3^2 - 54 = 0 \Rightarrow (3^2)^x \cdot 9 - 3^x \cdot 9 - 54 = 0 \Rightarrow (3^x)^2 \cdot 9 - 3^x \cdot 9 - 54 = 0.$$

Hacemos el cambio de incógnita $\boxed{t = 3^x}$:

$$t^2 \cdot 9 - t \cdot 9 - 54 = 0 \Rightarrow 9t^2 - 9t - 54 = 0 \Rightarrow \text{Simplificando entre 9: } t^2 - t - 6 = 0$$

$$\Rightarrow t = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \left\langle \begin{array}{l} = \frac{1-5}{2} = -2 \\ = \frac{1+5}{2} = 3 \end{array} \right.$$

Deshaciendo el cambio :

- Si $t = -2 \Rightarrow 3^x = -2$, lo que no es posible, pues $3^x > 0, \forall x$
- Si $t = 3 \Rightarrow 3^x = 3 \Rightarrow \boxed{x = 1}$, que resulta ser la única solución.

2) Resolver: $\left.\begin{array}{r} \log x^2 + \log\sqrt{y} = -3/2 \\ xy^2 = 10 \end{array}\right\}$ *(2 puntos)*

Aplicando propiedades de logaritmos, desarrollamos la primera ecuación, a la vez que tomamos logaritmos en la segunda:

$$\left.\begin{array}{r} \log x^2 + \log\sqrt{y} = -3/2 \\ xy^2 = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2\log x + \frac{1}{2}\log y = -\frac{3}{2} \Rightarrow 4\log x + \log y = -3 \\ \log xy^2 = \log 10 \Rightarrow \log x + 2\log y = 1 \end{array}\right.$$

donde hemos multiplicado por 2 la primera ecuación en el último paso. La resolvemos por reducción, para lo que multiplicamos la primera ecuación por –2:

$$\begin{cases} -8\log x - 2\log y = 6 \\ \log x + 2\log y = 1 \end{cases}$$
$$-7\log x = 7 \Rightarrow \log x = -1 \Rightarrow x = 1/10$$

Sustituyendo en la segunda ecuación:

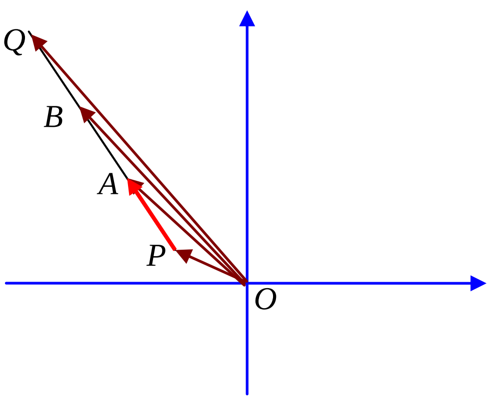
$$-1 + 2\log y = 1 \Rightarrow 2\log y = 2 \Rightarrow \log y = 1 \Rightarrow y = 100$$

Si sustituimos la solución obtenida en el sistema original, vemos que no se anula ningún argumento de logaritmos, por lo que resulta válida:

$$\boxed{x = 1/10 \text{ con } y = 100}$$

3) Hallar los puntos que dividen al segmento PQ en tres partes iguales, siendo $P(-3, 1)$ y $Q(-6, 7)$. *(1 punto)*

Hallar las coordenadas de un punto es calcular la de su vector de posición. Luego nos piden $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$.



Comenzamos calculando:

$$\overrightarrow{PA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}) =$$

$$= \frac{1}{3}[(-6, 7) - (-3, 1)] = \frac{1}{3}(-3, 6) = (-1, 2)$$

Pues bien:

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA} = (-3,\ 1) + (-1,\ 2) = \boxed{(-4,\ 3)}$$
$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OP} + 2\overrightarrow{PA} = (-3,\ 1) + 2(-1,\ 2) = \boxed{(-5,\ 5)}$$

4) Hallar el ángulo que forman las rectas $r \equiv 5x + 12y = 0$, $s \equiv -3x + 4y - 1 = 0$. *(1,5 ptos)*

Las rectas son secantes, y dicho ángulo es el mismo que el que forman sus respectivos vectores de dirección, o sus vectores normales. Trabajaremos con estos últimos: $\overrightarrow{n_r}$ = (5, 12) y $\overrightarrow{n_s}$ = (–3, 4). Llamando α a dicho ángulo, y despejando en la fórmula del producto escalar (tomamos éste en valor absoluto para que nos resulte el menor de los dos ángulos que forman las dos rectas al cortarse), tenemos:

$$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{n_r}\cdot\overrightarrow{n_s}|}{|\overrightarrow{n_r}|\cdot|\overrightarrow{n_s}|} = \frac{|5(-3)+12\cdot 4|}{\sqrt{25+144}\sqrt{9+16}} = \frac{|-15+48|}{13\cdot 5} = \frac{33}{65} \Rightarrow \boxed{\alpha = 59{,}49^{\circ}}$$

5) Hallar una recta paralela a otra recta cuya pendiente es –1, sabiendo que debe pasar por (2, 3). Escribir la ecuación resultante de todas las formas que conozcas, escribiendo sus nombres respectivos. *(1,5 puntos)*

Es inmediato usando la forma *punto-pendiente*: $\boxed{y - 3 = -1(x - 2)}$

Simplificando: $y = -x + 2 + 3 \Rightarrow \boxed{y = -x + 5}$ *explícita*.

Despejando: $\boxed{x + y - 5 = 0}$ *general o implícita*.

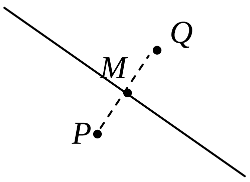
De aquí obtenemos el vector normal: (1, 1), por lo que la ecuación en forma *normal* es: $\boxed{1\cdot(x - 2) + 1\cdot(y - 3) = 0}$.

Un vector de dirección es (1, m) = (1, –1). Por tanto, en forma *continua*: $\boxed{\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-3}{-1}}$

Usando el mismo vector de dirección, tenemos:

$\boxed{(x,\ y) = (2,\ 3) + t(1,\ -1)}$ *vectorial* y $\boxed{\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - t \end{cases}}$ *paramétricas*

6) Hallar el simétrico de $P(-2,\ 4)$ respecto de $r \equiv 3x - 2y + 1 = 0$ *(2 puntos)*



Comenzamos por calcular la recta perpendicular a r que contiene a P (la que está en trazo discontinuo en el gráfico). El vector normal de r, $\overrightarrow{n_r}$ = (3, –2) es de dirección de dicha recta (a la que llamaremos s). Por tanto:

$$s \equiv \frac{x+2}{3} = \frac{y-4}{-2} \Rightarrow -2x - 4 = 3y - 12 \Rightarrow \boxed{0 = 2x + 3y - 8} \equiv s$$

Calculamos, seguidamente, la intersección de ambas rectas, que será el punto M del gráfico:

$$\begin{cases} 3x - 2y + 1 = 0 \\ 2x + 3y - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} (\cdot 3):\ 9x - 6y + 3 = 0 \\ (\cdot 2):\ \underline{4x + 6y - 16 = 0} \end{array}$$

$$\text{Sumando} \qquad 13x \quad -13 = 0 \Rightarrow x = 1$$

Sustituyendo en s: $2 + 3y - 8 = 0 \Rightarrow 3y = 6 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow \boxed{M(1,\ 2)}$.

$M(1,\ 2)$ es el punto medio entre $P(-2,\ 4)$ y su simétrico $Q(a,\ b)$. Por tanto:

$$\begin{cases} \dfrac{-2+a}{2} = 1 \Rightarrow -2 + a = 2 \Rightarrow a = 4 \\ \dfrac{4+b}{2} = 2 \Rightarrow 4 + b = 4 \Rightarrow b = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{Q(4,\ 0)}.$$

MATEMÁTICAS 1º BACH. C. N. Y S. 8 de marzo de 2010
Geometría y Logaritmos

1) Resolver la ecuación: $\frac{1}{2}\log(2x+3) = \log x$ *(1 punto)*
2) Hallar la paralela a $r : x - 3y + 5 = 0$ que pasa por (–3, 2) *(0,5 puntos)*
3) Dados los vectores $\vec{a}$ =(2, –4) y $\vec{b}$ =(x, 3), se pide hallar x para que sean: *(1 punto)*
   a) Paralelos
   b) Perpendiculares
4) Hallar la mediatriz del segmento delimitado por los puntos (–3, 2) y (5, –4) *(1 pto)*
5) Hallar la distancia entre las rectas $r : x - 3y + 5 = 0$ y $s : 2x - 6y + 1 = 0$ *(1 punto)*
6) Poner la ecuación de la recta r: $x - 3y + 5 = 0$ de todas las formas posibles, escribiendo el nombre de cada ecuación. *(1 punto)*
7) Hallar el área del triángulo delimitado por (–3, 2), (1, 4) y (5, –4). Para ello, considerar como base los dos últimos puntos, y como altura, la distancia del primer punto a la recta que pasa por los otros dos. *(1,5 puntos)*
8) Encontrar el simétrico de (2, –1) respecto de $x - 4y + 11=0$ *(1,5 puntos)*
9) Hallar la ecuación de la circunferencia concéntrica con $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ y tangente a la recta $4x - 3y + 7 = 0$ *(1,5 puntos)*

Como siempre, los resultados deben estar simplificados, y las ecuaciones finales de las rectas que se pidan se deben dar en forma explícita o general.

SOLUCIONES

1) Resolver la ecuación: $\frac{1}{2}\log(2x+3)=\log x$ *(1 punto)*

Como no podemos simplificar el logaritmo de una suma, y lo tenemos en el primer miembro, no tenemos más opción que quitar logaritmos:

$$\frac{1}{2}\log(2x+3)=\log x \;\Rightarrow\; \log(2x+3)=2\,\log x \;\Rightarrow\; \log(2x+3)=\log x^2 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 2x+3=x^2 \;\Rightarrow\; 0=x^2-2x-3 \;\Rightarrow\; x=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{2\pm 4}{2}=\left\langle \begin{array}{l} =\frac{-2}{2}=-1 \\ =\frac{6}{2}=3 \end{array}\right.$$

En ecuaciones logarítmicas siempre hay que comprobar que las soluciones no hacen negativo ningún argumento de logaritmos. En este caso, –1 no es válida por esa razón. Luego la única solución es $\boxed{x=3}$.

2) Hallar la paralela a $r: x-3y+5=0$ que pasa por (–3, 2) *(0,5 puntos)*

Usando la ecuación en forma normal, dado que $\vec{n}=(1,-3)$:

$$1(x+3)-3(y-2)=0 \;\Rightarrow\; x+3-3y+6=0 \;\Rightarrow\; \boxed{x-3y+9=0}.$$

3) Dados los vectores $\vec{a}=(2,-4)$ y $\vec{b}=(x,3)$, se pide hallar x para que sean: *(1 punto)*

a) Paralelos

Lo serán si, y sólo si son proporcionales: $\frac{x}{2}=\frac{3}{-4} \;\Rightarrow\; x=-\frac{6}{4} \;\Rightarrow\; \boxed{x=-\frac{3}{2}}$

b) Perpendiculares

En este caso la condición necesaria y suficiente es que el producto escalar sea cero:
$(2,-4)\cdot(x,3)=0 \;\Rightarrow\; 2x-12=0 \;\Rightarrow\; \boxed{x=6}$.

4) Hallar la mediatriz del segmento delimitado por los puntos (–3, 2) y (5, –4) *(1 pto)*

La mediatriz es el *lugar geométrico* (conjunto) de los puntos que equidistan (están a la misma distancia) de los dos puntos dados. Si $P(x, y)$ es un punto genérico de la mediatriz, y llamamos A y B a los dos puntos dados, respectivamente:

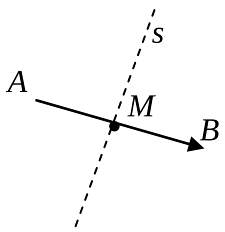
$$d(P,A)=d(P,B) \;\Rightarrow\; \sqrt{(x+3)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x-5)^2+(y+4)^2} \;\Rightarrow$$

Elevando al cuadrado ambos miembros y desarrollando:

$$\Rightarrow\; x^2+6x+9+y^2-4y+4=x^2-10x+25+y^2+8y+16 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 6x-4y+13=-10x+8y+41 \;\Rightarrow\; 16x-12y-28=0 \;\Rightarrow\; \boxed{4x-3y-7=0}$$

Otra forma de resolver este problema es considerando que la mediatriz es la perpendicular al segmento en su punto medio. Éste es:



$$M=\left(\frac{-3+5}{2},\frac{2+(-4)}{2}\right)=(1,-1)$$

Y un vector normal a la mediatriz buscada (s) es:

$$\vec{n}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(5,-4)-(-3,2)=(8,-6)\;\;\|\;\;(4,-3)$$

Hemos multiplicado el resultado por ½ para obtener un vector proporcional (que conserva la dirección, por tanto) pero más simple. Usando la forma normal, la mediatriz s será:

$$4(x-1)-3(y+1)=0 \;\Rightarrow\; 4x-3y-4-3=0 \;\Rightarrow\; \boxed{4x-3y-7=0}.$$

5) Hallar la distancia entre las rectas $r: x-3y+5=0$ y $s: 2x-6y+1=0$ *(1 punto)*

Son paralelas, porque sus respectivos vectores normales (1, –3) y (2, –6) son proporcionales (el segundo es el doble del primero). Para usar la fórmula que conocemos, los coeficientes de x y de y en ambas ecuaciones deben coincidir. Para ello, multiplicamos por 2 la ecuación de r. Entonces:

$r: 2x-6y+10=0$

$s: 2x-6y+1=0$

De donde: $d(r,s)=\dfrac{|10-1|}{\sqrt{2^2+(-6)^2}}=\dfrac{9}{\sqrt{4+36}}=\boxed{\dfrac{9}{\sqrt{40}}}\ u$

6) Poner la ecuación de la recta r: $x-3y+5=0$ de todas las formas posibles, escribiendo el nombre de cada ecuación. *(1 punto)*

$\boxed{x-3y+5=0}$ *General* o *implícita*.

Despejando: $3y=x+5 \;\Rightarrow\; \boxed{y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{5}{3}}$ *Explícita*

De esta última, obtenemos un punto dando a x un valor arbitrario. Por ej.: (1, 2). Como la pendiente es 1/3, obtenemos:

$\boxed{y-2=\dfrac{1}{3}(x-1)}$ *Punto pendiente*

De la general, tenemos un vector normal: (1, –3). De donde, usando el mismo punto:

$\boxed{1(x-1)-3(y-2)=0}$ *Normal*

También deducimos un vector de dirección (invirtiendo el orden de las coordenadas del vector normal y cambiando el signo de una de ellas): (3, 1). En consecuencia, con el mismo punto anterior:

$\boxed{\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{1}}$ *Continua*

Y usando el vector de dirección y el punto:

$\boxed{(x,y)=(1,2)+t(3,1)}$ *Vectorial*

$\boxed{\begin{cases} x=1+3t \\ y=2+t \end{cases}}$ *Paramétricas*

7) Hallar el área del triángulo delimitado por (–3, 2), (1, 4) y (5, –4). Para ello, considerar como base los dos últimos puntos, y como altura, la distancia del primer punto a la recta que pasa por los otros dos. *(1,5 puntos)*

La base del triángulo es la distancia entre los dos puntos que la constituyen:

$$b=\sqrt{(5-1)^2+(-4-4)^2}=\sqrt{16+64}=\sqrt{80}=\sqrt{16\cdot 5}=4\sqrt{5}\ u$$

La ecuación de la recta que pasa por los dos puntos de la base es (en forma continua):

$$\frac{x-4}{5-1}=\frac{y-4}{-4-4} \;\Rightarrow\; \frac{x-1}{4}=\frac{y-4}{-8} \;\Rightarrow\; \frac{-8}{4}(x-1)=y-4 \;\Rightarrow\; -2x+2=y-4 \;\Rightarrow$$

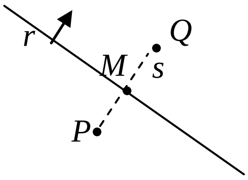
$$\Rightarrow\; 0=2x+y-6$$

La distancia del primer punto a esta recta es la altura del triángulo:

$$h=\frac{|2(-3)+2-6|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{10}{\sqrt{5}}\ u$$

Luego $A = \dfrac{b\cdot h}{2} = \dfrac{4\sqrt{5}\,\dfrac{10}{\sqrt{5}}}{2} = \boxed{20\ u^2}$

8) Encontrar el simétrico de (2, –1) respecto de $x - 4y + 11=0$ *(1,5 puntos)*



Llamemos P al punto y r a la recta. Comenzamos por calcular la recta perpendicular a r que contiene a P (la que está en trazo discontinuo en el gráfico y que llamaremos s). El vector normal de r, $\overrightarrow{n_r} = (1, -4)$ es de dirección de dicha recta s. Por tanto:

$$s \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-4} \Rightarrow -4x + 8 = y + 1 \Rightarrow \boxed{0 = 4x + y - 7} \equiv s$$

Calculamos, seguidamente, la intersección de ambas rectas, que será el punto M del gráfico:

$$\begin{cases} x - 4y + 11 = 0 \\ 4x + y - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{r} \cdot(-4): -4x + 16y - 44 = 0 \\ \underline{4x + \quad y - 7 = 0} \end{array}$$

Sumando $\qquad 17y - 51 = 0 \Rightarrow y = 3$

Sustituyendo en r: $x - 12 + 11 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow \boxed{M(1, 3)}$.

$M(1, 3)$ es el punto medio entre $P(2, -1)$ y su simétrico $Q(a, b)$. Por tanto:

$$\begin{cases} \dfrac{2+a}{2} = 1 \Rightarrow 2 + a = 2 \Rightarrow a = 0 \\ \dfrac{-1+b}{2} = 3 \Rightarrow -1 + b = 6 \Rightarrow b = 7 \end{cases} \Rightarrow \boxed{Q(0, 7)}$$

9) Hallar la ecuación de la circunferencia concéntrica con $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ y tangente a la recta $4x - 3y + 7 = 0$ *(1,5 puntos)*

Completando los binomios al cuadrado en la ecuación de la circunferencia, tenemos:

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + y^2 + 4y + 1 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 - 2\cdot x\cdot 1 + 1 - 1 + y^2 + 2\cdot y\cdot 2 + 4 - 4 + 1 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x-1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$$

De donde deducimos que su centro es (1, –2) y su radio, $\sqrt{4} = 2$.

Como la circunferencia que nos piden es concéntrica con ésta, tiene su mismo centro: (1, 2). Y si la recta dada es tangente, el radio de la que nos piden es la distancia de dicho centro a esa recta:

$$r = \frac{|4 - 3(-2) + 7|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{17}{5}$$

Y como $\left(\dfrac{17}{5}\right)^2 = \dfrac{289}{25}$ Luego la circunferencia que buscamos es:

$$\boxed{(x-1)^2 + (y-2)^2 = \frac{289}{25}}$$

MATEMÁTICAS 1º BACH. C. N. Y S. 18 de marzo de 2010
Geometría y Logaritmos

1) Resolver la ecuación: $2 \log x - \log (x - 16) = 2$ *(1 punto)*
2) Hallar la paralela a $r : 4x - y + 1 = 0$ que pasa por $(3, -2)$ *(0,5 puntos)*
3) Dados los vectores $\vec{a} = (2, -4)$ y $\vec{b} = (1, x)$, se pide hallar x para que sean: *(1 punto)*
    a) Perpendiculares
    b) Paralelos
4) Hallar la mediatriz del segmento delimitado por los puntos $(3, 2)$ y $(-5, -4)$ *(1 pto)*
5) Hallar la distancia entre las rectas $r : 4x - 6y + 1 = 0$ y $s : 2x - 3y + 4 = 0$ *(1 punto)*
6) Poner la ecuación de la recta r: $4x - y + 1 = 0$ de todas las formas posibles, escribiendo el nombre de cada ecuación. *(1 punto)*
7) Hallar el área del triángulo delimitado por $A(-3, 0)$, $B(5, 1)$ y $C(1, 6)$. Para ello, considerar como base el segmento AB, y como altura, la distancia de C a la recta que pasa por A y B. *(1,5 puntos)*
8) Encontrar el simétrico de $(-3, 1)$ respecto de $x + y - 2 = 0$ *(1,5 puntos)*
9) Hallar la ecuación de la circunferencia concéntrica con $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0$ y tangente a la recta $4x - 3y + 2 = 0$ *(1,5 puntos)*

Como siempre, los resultados deben estar simplificados, y las ecuaciones finales de las rectas que se pidan se deben dar en forma explícita o general.

SOLUCIONES

1) Resolver la ecuación: $2 \log x - \log (x - 16) = 2$ *(1 punto)*

Ya que no podemos desarrollar $\log (x - 16)$, lo único que podemos hacer es quitar logaritmos.

$$2 \log x - \log (x-16) = 2 \Rightarrow \log x^2 - \log (x-16) = \log 100 \Rightarrow \log \frac{x^2}{x-16} = \log 100$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{x-16} = 100 \Rightarrow x^2 = 100(x-16) \Rightarrow x^2 = 100x - 1600 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 100x + 1600 = 0 \Rightarrow x = \frac{100 \pm \sqrt{10000-6400}}{2} = \frac{100 \pm \sqrt{3600}}{2} =$$

$$= \frac{100 \pm 60}{2} = \left\langle \begin{array}{l} = \dfrac{100-60}{2} = \dfrac{40}{2} = 20 \\ = \dfrac{100+60}{2} = \dfrac{160}{2} = 80 \end{array} \right.$$

Y ambas soluciones son válidas, puesto que no anulan ni hacen negativo ninguno de los argumentos de logaritmos en la ecuación original.

2) Hallar la paralela a $r: 4x - y + 1 = 0$ que pasa por $(3, -2)$ *(0,5 puntos)*

El vector normal de r: $(4, -1)$, también lo es de su paralela. Por tanto, empleando la forma normal, la recta pedida es:

$$4(x-3) - 1(y+2) = 0 \Rightarrow 4x - 12 - y - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{4x - y - 14 = 0}$$

3) Dados los vectores $\vec{a} = (2, -4)$ y $\vec{b} = (1, x)$, se pide hallar x para que sean: *(1 punto)*

a) Perpendiculares

Serán perpendiculares si, y sólo si su producto escalar es cero: $(2, -4) \cdot (1, x) = 0$

$\Rightarrow 2\cdot 1 + (-4)x = 0 \Rightarrow 2 - 4x = 0 \Rightarrow 2 = 4x \Rightarrow \boxed{x = ½}$

b) Paralelos

Serán paralelos si, y sólo si son proporcionales:

$$\frac{1}{2} = \frac{x}{-4} \Rightarrow -4 = 2x \Rightarrow \boxed{x = -2}$$

4) Hallar la mediatriz del segmento delimitado por los puntos $(3, 2)$ y $(-5, -4)$ *(1 pto)*

La mediatriz es el *lugar geométrico* (conjunto) de los puntos que equidistan (están a la misma distancia) de los dos puntos dados. Si $P(x, y)$ es un punto genérico de la mediatriz, y llamamos A y B a los dos puntos dados, respectivamente:

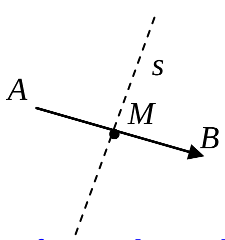
$$d(P, A) = d(P, B) \Rightarrow \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x+5)^2 + (y+4)^2} \Rightarrow$$

Elevando al cuadrado ambos miembros y desarrollando:

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = x^2 + 10x + 25 + y^2 + 8y + 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -6x - 4y + 13 = 10x + 8y + 41 \Rightarrow 0 = 16x + 12y + 28 = 0 \Rightarrow \boxed{4x + 3y + 7 = 0}$$

Otra forma de resolver este problema es considerando que la mediatriz es la perpendicular al segmento en su punto medio. Éste es:



$$M = \left(\frac{3+(-5)}{2}, \frac{2+(-4)}{2} \right) = (-1, -1)$$

Y un vector normal a la mediatriz buscada (s) es:

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (-5, -4) - (3, 2) = (-8, -6) \quad \| \quad (4, 3)$$

Hemos multiplicado el resultado por ½ para obtener un vector proporcional (que conserva la dirección, por tanto) pero más simple. Usando la forma normal, la mediatriz s será:

$$4(x + 1) + 3(y + 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x + 3y + 4 + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{4x + 3y + 7 = 0}.$$

5) Hallar la distancia entre las rectas $r : 4x - 6y + 1 = 0$ y $s : 2x - 3y + 4 = 0$ *(1 punto)*

Son paralelas, porque sus respectivos vectores normales (4, –6) y (2, –3) son proporcionales (el primero es el doble del segundo). Para usar la fórmula que conocemos, los coeficientes de x y de y en ambas ecuaciones deben coincidir. Para ello, multiplicamos por 2 la ecuación de s. Entonces:

$r : 4x - 6y + 1 = 0$

$s : 4x - 6y + 8 = 0$

De donde: $d(r, s) = \dfrac{|1-8|}{\sqrt{4^2+(-6)^2}} = \dfrac{7}{\sqrt{16+36}} = \boxed{\dfrac{7}{\sqrt{52}}}\ u$

6) Poner la ecuación de la recta r: $4x - y + 1 = 0$ de todas las formas posibles, escribiendo el nombre de cada ecuación. *(1 punto)*

La ecuación dada $\boxed{4x - y + 1 = 0}$ está en forma *general* o *implícita*.

Despejando: $\boxed{y = 4x + 1}$ es la ecuación *explícita*.

De aquí obtenemos la pendiente $m = 4$ y un punto, dando un valor arbitrario a x, por ejemplo (0, 1). Con estos datos tenemos la ecuación *punto-pendiente*: $\boxed{y - 1 = 4(x - 0)}$

De la ecuación general extraemos un vector normal: (4, –1). La ecuación en forma *normal*, con ayuda del punto anterior, es: $\boxed{4(x - 0) - 1(y - 1) = 0}$

Un vector de dirección lo deducimos invirtiendo el orden de las coordenadas del vector normal y cambiando el signo de una de ellas: (1, 4). Con él y el punto anterior completamos las ecuaciones que nos restan:

Continua: $\boxed{\dfrac{x-0}{1} = \dfrac{y-1}{4}}$

Vectorial: $\boxed{(x, y) = (0, 1) + t\,(1, 4)}$

Paramétricas: $\boxed{\begin{cases} x = t \\ y = 1 + 4t \end{cases}}$

7) Hallar el área del triángulo delimitado por $A(-3, 0)$, $B(5, 1)$ y $C(1, 6)$. Para ello, considerar como base el segmento AB, y como altura, la distancia de C a la recta que pasa por A y B. *(1,5 puntos)*

La base del triángulo es la distancia entre A y B:

$$b = \sqrt{(5-(-3))^2 + (1-0)^2} = \sqrt{64+1} = \boxed{\sqrt{65}}\ u$$

La ecuación de la recta que pasa por los dos puntos de la base es (en forma continua):

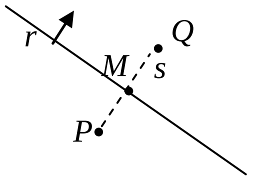
$$\frac{x+3}{5+3} = \frac{y-0}{1-0} \quad \Rightarrow \quad \frac{x+3}{8} = y \quad \Rightarrow \quad x + 3 = 8y \quad \Rightarrow \quad \boxed{x - 8y + 3 = 0}$$

La distancia de C a esta recta es la altura del triángulo:

$$h = \frac{|1-8\cdot 6+3|}{\sqrt{1^2+(-8)^2}} = \boxed{\frac{44}{\sqrt{65}}}\ u$$

$$\text{Luego } A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{\sqrt{65}\,\dfrac{44}{\sqrt{65}}}{2} = \boxed{22\ u^2}$$

8) Encontrar el simétrico de (–3, 1) respecto de $x + y - 2 = 0$ *(1,5 puntos)*



Llamemos P al punto y r a la recta. Comenzamos por calcular la recta perpendicular a r que contiene a P (la que está en trazo discontinuo en el gráfico y que llamaremos s). El vector normal de r, $\overrightarrow{n_r} = (1, 1)$ es de dirección de dicha recta s. Por tanto:

$$s \equiv \frac{x+3}{1} = \frac{y-1}{1} \Rightarrow x - y + 3 + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x - y + 4 = 0} \equiv s$$

Calculamos, seguidamente, la intersección de ambas rectas, que será el punto M del gráfico:

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x - y + 4 = 0 \end{cases}$$

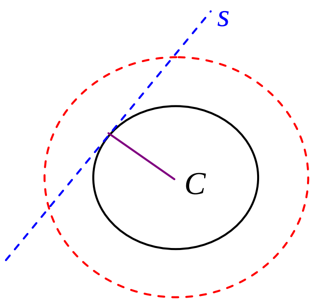
$$\text{Sumando: } 2x \quad + 2 = 0 \Rightarrow x = -1$$

Sustituyendo en r: $-1 + y - 2 = 0 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow \boxed{M(-1, 3)}$.

$M(-1, 3)$ es el punto medio entre $P(-3, 1)$ y su simétrico $Q(a, b)$. Por tanto:

$$\begin{cases} \dfrac{-3+a}{2} = -1 \Rightarrow -3 + a = -2 \Rightarrow a = 1 \\ \dfrac{1+b}{2} = 3 \Rightarrow 1 + b = 6 \Rightarrow b = 5 \end{cases} \Rightarrow \boxed{Q(1, 5)}$$

9) Hallar la ecuación de la circunferencia concéntrica con $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0$ y tangente a la recta $4x - 3y + 2 = 0$ *(1,5 puntos)*



Cuando los coeficientes de x^2 y de y^2 valen 1 en la ecuación desarrollada de una circunferencia, el centro es:

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{-D}{2} = \frac{-(-2)}{2} = 1 \\ b &= \frac{-E}{2} = \frac{-(-6)}{2} = 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{C(1, 3)}$$

El radio de la circunferencia dada no nos hace falta, pero sería $r = \sqrt{a^2 + b^2 - F} = \sqrt{1 + 9 + 15} = \sqrt{25} = 5$.

Como la circunferencia que nos piden es concéntrica con ésta, tiene su mismo centro: (1, –3). Y si la recta dada es tangente, el radio de la que nos piden es la distancia de dicho centro a esa recta:

$$r = \frac{|4 \cdot 1 - 3 \cdot 3 + 2|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \boxed{\frac{3}{5}}$$

Luego la circunferencia que buscamos es:

$$\boxed{(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = \frac{9}{25}}$$

MATEMÁTICAS 1º BACH. C. N. Y S. 25 de marzo de 2010

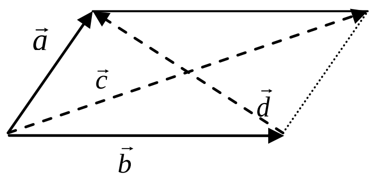
Geometría y Logaritmos (Recuperación)

1) Hallar a para que las dos rectas siguientes sean a) perpendiculares; b) paralelas: r : $3x - 2y + 5 = 0$; s : $ax + 4y = 0$ *(1 punto)*
2) Hallar la paralela y la perpendicular a r : $4x - 3y + 5 = 0$ que pasan por $(-3, 2)$ *(1 pto)*
3) Hallar la recta que pasa por los puntos $(1, 3)$ y $(-2, -1)$ *(1 punto)*
4) Hallar la mediatriz del segmento delimitado por los puntos $(3, 2)$ y $(-5, -4)$ *(1,5 ptos)*
5) Hallar la distancia entre las rectas r : $3x - 2y + 5 = 0$ y s : $6x - 4y + 1 = 0$ *(1 punto)*
6) Hallar la distancia entre los puntos $(3, 2)$ y $(-5, -4)$ *(1 punto)*
7) Calcular analíticamente las coordenadas de los puntos que dividen al segmento cuyos extremos son $(1,5)$ y $(5,1)$ en cuatro partes iguales. *(1 punto)*
8) Resolver: $2\log x - \log (x+6) = 3\log 2$ *(1,5 puntos)*
9) Hallar el ángulo que forman las rectas $y=3x+5$, $y=-2x+1$ *(1 punto)*

MATEMÁTICAS 1º BACH. C. N. Y S. 11 de junio de 2010

Geometría y Logaritmos (Recuperación)

1) Hallar a para que las dos rectas siguientes sean a) perpendiculares; b) paralelas: r : 3x – 2y + 5 = 0; s : ax + 4y = 0 (1 punto)
2) Hallar la paralela y la perpendicular a r : $4x - 3y + 5 = 0$ que pasan por (–3, 2) *(1 pto)*
3) Hallar la recta que pasa por los puntos (1, 3) y (–2, –1) *(1 punto)*
4) Hallar la mediatriz del segmento delimitado por los puntos (3, 2) y (–5, –4) *(1,5 ptos)*
5) Hallar la distancia entre las rectas r : $3x - 2y + 5 = 0$ y s : $6x - 4y + 1 = 0$ *(1 punto)*
6) Hallar la distancia entre los puntos (3, 2) y (–5, –4) *(1 punto)*
7) Resolver: $2\log x - \log(x+6) = 3\log 2$ *(1,5 puntos)*
8) Siendo $\vec{a}=(2,3)$ y $\vec{b}=(5,1)$, calcular $\vec{c}$, $\vec{d}$, $|\vec{c}|$ y $|\vec{d}|$ *(1 punto)*



9) Hallar el ángulo que forman las rectas $y = 3x+5$, $y = -2x+1$ *(1 punto)*