IES Fernando de Herrera **Curso 2014 / 15**

Primer trimestre - Primer examen – 1º Bach CT

NOMBRE: ____

1) Calcular y simplificar (sin calculadora, denominadores racionalizados, exponentes positivos):

   a) $\dfrac{2^8 6^{-6}(-3)^8}{(-12)^{-3}18^4}$ *(1 punto)*

   b) $\dfrac{3\sqrt{8}+4\sqrt{32}-5\sqrt{50}+\sqrt{12}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}$ *(1 punto)*

2) Siendo $a > 0$, $a \neq 1$, hallar el valor de: $\dfrac{\log\frac{1}{a}+\log\sqrt{a}}{\log a^3-\log\sqrt[4]{a}}$ *(1,5 puntos)*

3) A y B juegan dos partidas consecutivas, apostando dinero. En la primera, A gana un 10% y B pierde un 10%. En la segunda A pierde un 10% y B gana un 10%. ¿Qué tanto por ciento ha ganado o perdido finalmente cada uno de ellos, respecto del dinero inicial? *(1 punto)*

4) Escribir en notación científica: a) 0,000 000 235; b) 35.280.000.000.000.000 *(1 punto)*

5) Factorizar: $15x^3 + 26x^2 - x - 12$ *(1 punto)*

6) Resolver la ecuación: $\dfrac{x-3}{x^2-x-2}-\dfrac{2}{2x+2}=\dfrac{4}{x+1}$ *(1 punto)*

7) Resolver la ecuación: $2^{2x+1} = 17\cdot 2^x - 8$ *(1,5 puntos)*

8) Realizar la división entera de los siguientes polinomios, indicando cociente y resto: $(-6x^5 + 3x - 2x^3 - 2 + 4x^2) : (2x^2 - x + 1)$ *(1 punto)*

SOLUCIONES

1) Calcular y simplificar (sin calculadora, denominadores racionalizados, exponentes positivos):

a) $\dfrac{2^8 6^{-6}(-3)^8}{(-12)^{-3}18^4}$ *(1 punto)*

$$\frac{2^8 6^{-6}(-3)^8}{(-12)^{-3}18^4} = \frac{2^8(2\cdot 3)^{-6}3^8}{-(2^2 3)^{-3}(3^2 2)^4} = -\frac{2^8 2^{-6}3^{-6}3^8}{(2^2)^{-3}3^{-3}(3^2)^4 2^4} = -\frac{2^2 3^2}{2^{-6}3^{-3}3^8 2^4} =$$

$$= -\frac{2^2 3^2}{2^{-2}3^5} = -\frac{2^{2+2}}{3^{5-2}} = -\frac{2^4}{3^3} = \boxed{-\frac{16}{27}}$$

b) $\dfrac{3\sqrt{8}+4\sqrt{32}-5\sqrt{50}+\sqrt{12}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}$ *(1 punto)*

$$\frac{3\sqrt{8}+4\sqrt{32}-5\sqrt{50}+\sqrt{12}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2^3}+4\sqrt{2^5}-5\sqrt{5^2 2}+\sqrt{2^2 3}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{3\cdot 2\sqrt{2}+4\cdot 2^2\sqrt{2}-5\cdot 5\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}+16\sqrt{2}-25\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}\,\frac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}} = \frac{(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})^2}{(2\sqrt{3})^2-(3\sqrt{2})^2} =$$

$$= \frac{(2\sqrt{3})^2-2\cdot 2\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{2}+(3\sqrt{2})^2}{2^2(\sqrt{3})^2-3^2(\sqrt{2})^2} = \frac{12-12\sqrt{6}+18}{12-18} = \frac{30-12\sqrt{6}}{-6} =$$

$$= -\frac{6(5-2\sqrt{6})}{6} = \boxed{2\sqrt{6}-5}$$

2) Siendo $a>0$, $a\neq 1$, hallar el valor de: $\dfrac{\log\frac{1}{a}+\log\sqrt{a}}{\log a^3-\log\sqrt[4]{a}}$ *(1,5 puntos)*

$$\frac{\log\frac{1}{a}+\log\sqrt{a}}{\log a^3-\log\sqrt[4]{a}} = \frac{\log 1-\log a+\frac{1}{2}\log a}{3\log a-\frac{1}{4}\log a} = \frac{0+(\log a)\left(-1+\frac{1}{2}\right)}{\left(3-\frac{1}{4}\right)\log a} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{11}{4}} = -\frac{4}{11\cdot 2} =$$

$$= \boxed{-\frac{2}{11}}$$

3) A y B juegan dos partidas consecutivas, apostando dinero. En la primera, A gana un 10% y B pierde un 10%. En la segunda A pierde un 10% y B gana un 10%. ¿Qué tanto por ciento ha ganado o perdido finalmente cada uno de ellos, respecto del dinero inicial? *(1 punto)*

- A gana, primero, un 10% y, después, pierde un 10%. Si disponía de x euros, su capital final será: $x\cdot 1{,}10\cdot 0{,}90 = x\cdot 0{,}99$. Es decir, ha perdido un 1%. (Recordar que si un cantidad C aumenta en un p %, se convierte en $C\,(1+p/100)$, siendo $(1+p/100)$ el "*coeficiente de aumento*", y si disminuye en un p %, se transforma en $C\,(1–p/100)$, siendo $(1–p/100)$ el "*coeficiente de disminución*").

- *B* pierde inicialmente un 10%. Si tenía, al comienzo y €, tras esto tendrá $y\cdot 0{,}9$. Después, gana un 10% de lo que tenía, es decir, de $y\cdot 0{,}9$. Por tanto, tendrá $y\cdot 0{,}9\cdot 1{,}10 = y\cdot 0{,}99$. Luego también ha perdido un 1%.

$\boxed{\text{Ambos han perdido un 1\%}}$.

4) Escribir en notación científica: a) 0,000 000 235; b) 35.280.000.000.000.000

a) $0{,}000\ 000\ 235 = \boxed{2{,}35\cdot 10^{-7}}$; b) $35.280.000.000.000.000 = \boxed{3{,}528\cdot 10^{16}}$ *(1 punto)*

5) Factorizar: $15x^3 + 26x^2 - x - 12$ *(1 punto)*

Intentamos una primera división por Ruffini:

	15	26	– 1	– 12
– 1		– 15	– 11	12
	15	11	– 12	0

Como no encontramos raíces por Ruffini, probamos a igualar el polinomio cociente a cero y resolver la ecuación de 2º grado resultante:

$$15x^2 + 11x - 12 = 0 \Rightarrow x = \frac{-11 \pm \sqrt{121 + 720}}{30} = \frac{-11 \pm 29}{30} = \left\langle \begin{array}{l} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5} \\ = \frac{-40}{30} = -\frac{4}{3} \end{array} \right.$$

Por tanto, según el *Teorema de Descomposición Factorial de Polinomios*:

$$\boxed{15x^3 + 26x^2 - x - 12 = 15(x+1)\left(x - \frac{3}{5}\right)\left(x + \frac{4}{3}\right)}$$

6) Resolver la ecuación: $\frac{x-3}{x^2 - x - 2} - \frac{2}{2x+2} = \frac{4}{x+1}$ *(1 punto)*

Como $x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \left\langle \begin{array}{l} = -1 \\ = 2 \end{array} \right. \Rightarrow x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$

Y $2x + 2 = 2(x+1)$, se tiene:

$$\frac{x-3}{x^2 - x - 2} - \frac{2}{2x+2} = \frac{4}{x+1} \Rightarrow \frac{x-3}{(x+1)(x-2)} - \frac{2}{2(x+1)} = \frac{4}{x+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x-3}{(x+1)(x-2)} - \frac{1}{x+1} - \frac{4}{x+1} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x-3}{(x+1)(x-2)} - \frac{x-2}{(x+1)(x-2)} - \frac{4(x-2)}{(x+1)(x-2)} = 0 \Rightarrow \frac{x - 3 - (x-2) - 4(x-2)}{(x+1)(x-2)} = 0$$

Un cociente vale 0 si, y sólo si se anula el numerador pero no el denominador. Así que igualamos el numerador a cero, resolvemos la ecuación resultante y comprobamos que las soluciones son válidas porque no coinciden ni con -1 ni con 2, que son los valores que hacen cero el denominador:

$$x - 3 - x + 2 - 4x + 8 = 0 \Rightarrow -4x + 7 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 7/4}.$$

Que <u>es válida</u>, porque no anula ningún denominador de la ecuación inicial.

7) Resolver la ecuación: $2^{2x+1} = 17\cdot 2^x - 8$ *(1,5 puntos)*

$$2^{2x+1} = 17\cdot 2^x - 8 \Rightarrow 2^{2x}\cdot 2 - 17\cdot 2^x + 8 = 0 \Rightarrow 2\cdot(2^x)^2 - 17\cdot 2^x + 8 = 0 \Rightarrow$$

Haciendo el cambio de incógnita $t = 2^x$:

$$2t^2 - 17t + 8 = 0 \Rightarrow t = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 64}}{4} = \frac{17 \pm 15}{4} = \left\langle \begin{array}{l} = \frac{1}{2} \\ = 8 \end{array} \right.$$

Deshacemos el cambio:

- $t = ½ \Rightarrow 2^x = ½ \Rightarrow 2^x = 2^{-1} \Rightarrow \boxed{x = -1}$
- $t = 8 \Rightarrow 2^x = 8 \Rightarrow 2^x = 2^3 \Rightarrow \boxed{x = 3}$

8) Realizar la división entera de los siguientes polinomios, indicando cociente y resto: $(-6x^5 + 3x - 2x^3 - 2 + 4x^2) : (2x^2 - x + 1)$ *(1 punto)*

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
-6x^5 & & -2x^3 & +4x^2 & +3x & -2 & 2x^2 - x + 1 \\
\cline{7-7}
6x^5 & -3x^4 & +3x^3 & & & & -3x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{21}{8} \\
\hline
 & -3x^4 & +x^3 & +4x^2 & +3x & -2 & \\
 & 3x^4 & -\frac{3}{2}x^3 & +\frac{3}{2}x^2 & & & \\
\hline
 & & -\frac{1}{2}x^3 & +\frac{11}{2}x^2 & +3x & -2 & \\
 & & \frac{1}{2}x^3 & -\frac{1}{4}x^2 & +\frac{1}{4}x & & \\
\hline
 & & & \frac{21}{4}x^2 & +\frac{13}{4}x & -2 & \\
 & & & -\frac{21}{4}x^2 & +\frac{21}{8}x & -\frac{21}{8} & \\
\hline
 & & & & \frac{47}{8}x & -\frac{37}{8} &
\end{array}
$$

$$\boxed{\text{Cociente: } -3x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{21}{8}.\ \text{ Resto: } \frac{47}{8}x - \frac{37}{8}}$$

IES Fernando de Herrera **Curso 2014 / 15**
Primer trimestre - Examen Global – 1º Bach CT

NOMBRE: ____

Instrucciones: 1) Todos los folios deben tener el nombre y estar numerados en la parte superior. 2) Todas las respuestas deben estar justificadas y simplificadas. 3) No se puede usar corrector ni lápiz. Se aconseja no usar borrador. 4) Se puede alterar el orden de las respuestas, pero no se puede intercalar la respuesta a una pregunta con las de otras.

1) Clasificar y resolver el siguiente sistema, aplicando el método de Gauss en su forma matricial. Si tuviese más de una solución, escribir dos soluciones concretas: *(1,5 ptos)*

$$\left.\begin{array}{r} 4x+3y+2z=4 \\ -3x+2y+5z=8 \\ -5x+9y+17z=28 \end{array}\right\}$$

2) Resolver la ecuación: $\sqrt{x^2-\sqrt{2x+1}}=2-x$ *(1,5 puntos)*

3) Hallar el 4º término del desarrollo del binomio siguiente: $\left(3x^2y-\dfrac{2}{x}\right)^5$ *(1 punto)*

4) Resolver la ecuación: $\dfrac{2x-4}{x^2-2x}-\dfrac{5}{3x+6}=\dfrac{4}{x^2-4}$ *(1,5 puntos)*

5) Resolver la ecuación: $\dfrac{4^{x+1}+6}{2^{x-1}}=28$ *(1,5 puntos)*

6) Resolver el sistema: $\left.\begin{array}{r} -x^2-4x-3<0 \\ 3x-2\leq\dfrac{x}{3}+4 \end{array}\right\}$ *(1,5 puntos)*

7) Simplificar la expresión: $\dfrac{\ln a^4+\ln\sqrt{a}}{\ln\dfrac{1}{a}}$ *(1,5 puntos)*

SOLUCIONES

1) Clasificar y resolver el siguiente sistema, aplicando el método de Gauss en su forma matricial. Si tuviese más de una solución, escribir dos soluciones concretas: *(1,5 ptos)*

$$\left.\begin{array}{r} 4x+3y+\ \ 2z=\ \ 4 \\ -3x+2y+\ \ 5z=\ \ 8 \\ -5x+9y+17z=28 \end{array}\right\}$$

Escribimos la matriz ampliada y aplicamos las transformaciones lineales de filas que indicamos:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 4 \\ -3 & 2 & 5 & 8 \\ -5 & 9 & 17 & 28 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-3F_1]{3F_2-2F_1} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 4 \\ -17 & 0 & 11 & 16 \\ -17 & 0 & 11 & 16 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-F_2} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 4 \\ -17 & 0 & 11 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como tenemos *triangularizada* la matriz y podemos eliminar la F_3 por ser toda de 0, nos quedan menos ecuaciones (2) que incógnitas (3), por lo que estamos ante un **<u>sistema compatible indeterminado</u>**. Lo reconstruimos:

$$\left.\begin{array}{r} 4x+3y+2z=4 \\ -17x\qquad +11z=16 \end{array}\right\}$$

Llamamos $z = t$, siendo t un número arbitrario (ya no es incógnita), y lo pasamos al segundo miembro (también podríamos haber llamado $x = t$, pero no deberíamos hacerlo con y, porque perderíamos la triangularización):

$$\left.\begin{array}{r} 4x+3y=4-2t \\ -17x\qquad =16-11t \end{array}\right\} \Rightarrow (2^{\text{a}}\text{ ec.}):\ x=\frac{16-11t}{-17}=\frac{-16+11t}{17}$$

Nunca debe dejarse, en una expresión final, un denominador negativo, por lo que hemos multiplicado numerador y denominador por –1 para evitarlo (al hacerlo, la expresión que tenemos tiene el mismo valor, pues –1/(–1) =1). Sustituimos en la 1ª ec:

$$4\frac{-16+11t}{17}+3y=4-2t \Rightarrow 4(-16+11t)+51y=68-34t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -64+44t+51y=68-34t \Rightarrow 51t=68+64-34t-44t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=\frac{132-78t}{51}=\frac{44-26t}{17}$$

Así, la estructura general de las soluciones es: $\boxed{\left(\frac{-16+11t}{17},\frac{44-26t}{17},t\right)}$.

Obtendremos dos soluciones concretas dando valores arbitrarios a t. Por ejemplo:

- $t = 3$: (1, –2, 3)
- $t = 0$: (–16/17, 44/17, 0)

2) Resolver la ecuación: $\sqrt{x^2-\sqrt{2x+1}}=2-x$ *(1,5 puntos)*

Ya tenemos una raíz en un único sumando aislada en el primer miembro. Elevamos al cuadrado los dos miembros:

$$\left(\sqrt{x^2-\sqrt{2x+1}}\right)^2=(2-x)^2 \Rightarrow x^2-\sqrt{2x+1}=4-4x+x^2 \Rightarrow 4x-4=\sqrt{2x+1}$$

Tenemos la raíz, en un único sumando, aislada en el segundo miembro. Volvemos a elevar ambos miembros de la ecuación al cuadrado:

$$16x^2-32x+16=2x+1 \Rightarrow 16x^2-34x+15=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x=\frac{34\pm\sqrt{1156-960}}{32}=\frac{34\pm\sqrt{196}}{32}=\frac{34\pm14}{32}=\left\langle\begin{array}{l}=\frac{20}{32}=\frac{5}{8}\\[4pt]=\frac{48}{32}=\frac{3}{2}\end{array}\right.$$

La primera solución no es válida, pero la segunda, sí. Se obtiene dicha conclusión sustituyéndolas en la ecuación original, lo que hacemos con ayuda de la calculadora. Por tanto, la solución única es: $\boxed{x=3/2}$.

3) Hallar el 4º término del desarrollo del binomio siguiente: $\left(3x^2y-\frac{2}{x}\right)^5$ *(1 punto)*

Por la fórmula del *Binomio de Newton*, dicho término será:

$$(-1)^3\binom{5}{3}(3x^2y)^2\left(\frac{2}{x}\right)^3=-\frac{5\cdot4}{2}9x^4y^2\frac{8}{x^3}=\boxed{-720\,xy^2}$$

4) Resolver la ecuación: $\frac{2x-4}{x^2-2x}-\frac{5}{3x+6}=\frac{4}{x^2-4}$ *(1,5 puntos)*

Factorizamos los denominadores, que podemos hacer de memoria, dada su sencillez. En la primera fracción, si factorizásemos el numerador, se podría simplificar, pero después habría que deshacer la simplificación, porque el factor eliminado debe restablecerse, dado que forma parte del mcm de los denominadores:

$$\frac{2x-4}{x(x-2)}-\frac{5}{3(x+2)}=\frac{4}{(x-2)(x+2)}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \frac{(2x-4)3(x+2)}{3x(x-2)(x+2)}-\frac{5x(x-2)}{3x(x-2)(x+2)}=\frac{4\cdot3x}{3x(x-2)(x+2)}\ \Rightarrow$$

Las fracciones coincidirán si lo hacen sus numeradores, pues tienen el mismo denominador. Además, las soluciones que encontremos no pueden anular los numeradores (es decir, descartaríamos 0, 2 y –2):

$$(2x-4)(3x+6)-5x(x-2)=12x\ \Rightarrow\ 6x^2+12x-12x-24-5x^2+10x=12x\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x^2-2x-24=0\ \Rightarrow\ x=\frac{2\pm\sqrt{4+96}}{2}=\frac{2\pm10}{2}=\left\langle\begin{array}{l}=-4\\ \ \ 6\end{array}\right.$$

Como no anulan denominadores, ambas son válidas: $\boxed{x=-4\ \text{ ó }\ x=6}$.

5) Resolver la ecuación: $\frac{4^{x+1}+6}{2^{x-1}}=28$ *(1,5 puntos)*

$$\frac{4^{x+1}+6}{2^{x-1}}=28\ \Rightarrow\ \frac{4^x4+6}{\frac{2^x}{2}}=28\ \Rightarrow\ (2^2)^x4+6=28\frac{2^x}{2}\ \Rightarrow\ 2^{2x}4+6=14\cdot2^x\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (2^x)^2 4-14\cdot2^x+6=0$$

Hacemos el cambio de incógnita $t=2^x$:

$$4t^2-14t+6=0\ \Rightarrow\ 2t^2-7x+3=0\ \Rightarrow\ t=\frac{7\pm\sqrt{49-24}}{4}=\frac{7\pm5}{4}=\left\langle\begin{array}{l}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\\[4pt]=\frac{12}{4}=3\end{array}\right.$$

Deshacemos el cambio:

- $t=1/2\ \Rightarrow\ 2^x=2^{-1}\ \Rightarrow\ \boxed{x=-1}$

- $t = 3 \Rightarrow 2^x = 3 \Rightarrow \log 2^x = \log 3 \Rightarrow x \log 2 = \log 3 \Rightarrow \boxed{x = \dfrac{\log 3}{\log 2}}$

La ecuación tiene, por tanto, dos soluciones.

6) Resolver el sistema: $\left.\begin{array}{l} -x^2 - 4x - 3 < 0 \\ 3x - 2 \le \dfrac{x}{3} + 4 \end{array}\right\}$ *(1,5 puntos)*

Las soluciones del sistema serán los valores de x que resuelven ambas inecuaciones simultáneamente.

Para resolver la primera, empezamos por desembarazarnos de los signos –, multiplicando ambos miembros por -1, lo que hace cambiar el sentido de la desigualdad:

$$x^2 + 4x + 3 > 0$$

Llamamos $y = x^2 + 4x + 3$. Buscamos los valores de x que hacen $y > 0$. Como la relación entre x e y, dada por la ecuación anterior, se puede representar gráficamente mediante una parábola *convexa* (pues el coeficiente de x^2 es positivo) cuyos cortes con el eje OX son:

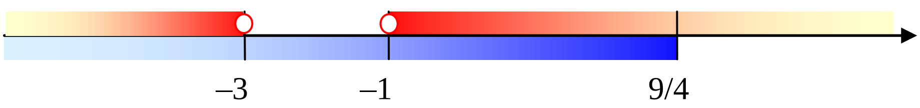
$$0 = x^2 + 4x + 3 \Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} = \left\langle \begin{array}{l} = -3 \Rightarrow (-3, 0) \\ -1 \Rightarrow (-1, 0) \end{array} \right.$$

podemos trazar una gráfica aproximada, de donde deducimos que los valores de x que ocasionan que y sea positivo estrictamente son: $\boxed{(-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)}$.

Por otra parte, $3x - 2 \le \dfrac{x}{3} + 4 \Rightarrow$ (mult. por $3 > 0$ ambos miembros): $9x - 6 \le x + 12$

$\Rightarrow 9x - x \le 12 + 6 \Rightarrow 8x \le 18 \Rightarrow \boxed{x \le 9/4}$.

Llevamos a un gráfico de la recta real ambas soluciones:



De donde deducimos que se verifican a la vez y, constituyen la solución del sistema, los puntos de:

$$\boxed{(-\infty, -3) \cup (-1, 9/4]}$$

7) Simplificar la expresión: $\dfrac{\ln a^4 + \ln \sqrt{a}}{\ln \dfrac{1}{a}}$ *(1,5 puntos)*

$$\frac{\ln a^4 + \ln \sqrt{a}}{\ln \dfrac{1}{a}} = \frac{4 \ln a + \dfrac{1}{2} \ln a}{\ln 1 - \ln a} = \frac{\left(4 + \dfrac{1}{2}\right) \ln a}{0 - \ln a} = \frac{\dfrac{9}{2} \ln a}{-\ln a} = -\frac{\dfrac{9}{2} \ln a}{\ln a} = \boxed{-\frac{9}{2}}$$

IES Fernando de Herrera **Curso 2014 / 15**
Primer trimestre - Recuperación – 1º Bach CT

NOMBRE: ____

Instrucciones: **1)** Todos los **folios** deben tener el **nombre** y estar **numerados** en la parte superior. **2)** Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. **3)** No se puede usar **corrector ni lápiz**. Se aconseja no usar borrador. **4)** Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar** la respuesta a una pregunta con las de otras.

1) Dado el polinomio $x^3 + ax^2 + bx + 4$, calcular a y b para que el polinomio sea divisible entre $x + 2$ y dé resto 3 al dividirlo entre $x + 1$. *(1,5 puntos)*

2) Resolver la ecuación: $\dfrac{(x-1)^2-(x-2)^2}{x^2-1}+\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{x-1}{x+1}$ *(1,5 puntos)*

3) Resolver la ecuación: $\dfrac{5^{2x-1}}{25^{x^2-\frac{1}{4}}}=1$ *(1 punto)*

4) Resolver el sistema: $\left.\begin{array}{r} \log x^2 + 3\log y = 5 \\ \log \dfrac{y^3}{x^4} = -1 \end{array}\right\}$ *(1,5 puntos)*

5) Hallar el antepenúltimo término del desarrollo de $\left(a^2 b - \dfrac{\sqrt{a}}{b^3}\right)^{13}$ *(1,5 puntos)*

6) Resolver la ecuación: $2\dbinom{x}{3} = 4x$ *(1,5 puntos)*

7) Resolver el sistema: $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{-2x^2+4x+6}{x-2} \leq 0 \\ 2x - 3 < 0 \end{array}\right.$ *(1,5 puntos)*

SOLUCIONES

1) Dado el polinomio $x^3 + ax^2 + bx + 4$, calcular a y b para que el polinomio sea divisible entre $x + 2$ y dé resto 3 al dividirlo entre $x + 1$. *(1,5 puntos)*

Si es divisible entre $x + 2$, el resto de la división es 0. Según el *Teorema del Resto*, el resto de dividir un polinomio $P(x)$ entre otro de la forma $x – a$ es $P(a)$. Por tanto, esto nos lleva a que $P(–2) = 0$, es decir:

$$-8 + 4a - 2b + 4 = 0 \Leftrightarrow 4a - 2b = 4 \Leftrightarrow 2a - b = 2 \quad (1)$$

De igual forma, la otra condición nos lleva a que $P(–1) = 3$:

$$-1 + a - b + 4 = 3 \Leftrightarrow a - b = 0 \quad (2)$$

Las dos condiciones, (1) y (2) nos producen un sistema de ecuaciones que nos resolverá el problema:

$$\left.\begin{array}{r} 2a - b = 2 \\ a - b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} 2a - b = 2 \\ -a + b = 0 \end{array}\right\} \\ \hline a \quad\ = 2 \end{array} \Rightarrow 2^{\text{a}} \text{ ecuación: } b = a \Rightarrow b = 2$$

Luego $\boxed{a = b = 2}$, y el polinomio es: $x^3 + 2x^2 + 2x + 4$.

2) Resolver la ecuación: $\dfrac{(x-1)^2 - (x-2)^2}{x^2 - 1} + \dfrac{x+1}{x-1} = \dfrac{x-1}{x+1}$ *(1,5 puntos)*

$$\frac{(x-1)^2 - (x-2)^2}{x^2-1} + \frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1}{x+1} \Rightarrow \frac{x^2 - 2x + 1 - (x^2 - 4x + 4)}{(x-1)(x+1)} + \frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1}{x+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - 2x + 1 - x^2 + 4x - 4}{(x-1)(x+1)} + \frac{(x+1)^2}{(x-1)(x+1)} = \frac{(x-1)^2}{(x+1)(x-1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2x-3}{(x-1)(x+1)} + \frac{x^2+2x+1}{(x-1)(x+1)} - \frac{x^2-2x+1}{(x+1)(x-1)} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2x - 3 + x^2 + 2x + 1 - (x^2 - 2x + 1)}{(x-1)(x+1)} = 0$$

Un cociente se anula si lo hace el numerador pero no el denominador. Así que igualamos el numerador a 0 y si nos sale alguna de las soluciones que hacen 0 el denominador, esto es, 1 ó –1, las descartaríamos:

$$2x - 3 + x^2 + 2x + 1 - x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow 6x - 3 = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{2}}$$

que es válida porque no anula el denominador mencionado.

3) Resolver la ecuación: $\dfrac{5^{2x-1}}{25^{x^2 - \frac{1}{4}}} = 1$ *(1 punto)*

Despejando:

$$5^{2x-1} = 25^{x^2-\frac{1}{4}} \Leftrightarrow 5^{2x-1} = (5^2)^{x^2-\frac{1}{4}} \Leftrightarrow 5^{2x-1} = 5^{2\left(x^2-\frac{1}{4}\right)} \Leftrightarrow 2x - 1 = 2\left(x^2 - \frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x - 1 = 2x^2 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4x - 2 = 4x^2 - 1 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{8} = \frac{1}{2} \text{ (solución doble). Así, la única solución es } \boxed{x = \frac{1}{2}}.$$

4) Resolver el sistema: $\left.\begin{array}{r} \log x^2 + 3\log y = 5 \\ \log \dfrac{y^3}{x^4} = -1 \end{array}\right\}$ *(1,5 puntos)*

Si fuera posible *no* quitar logaritmos, las ecuaciones serían más sencillas. Vamos a intentarlo:

$$\left.\begin{array}{r} \log x^2 + 3\log y = 5 \\ \log \dfrac{y^3}{x^4} = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2\log x + 3\log y = 5 \\ \log y^3 - \log x^4 = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2\log x + 3\log y = 5 \\ -4\log x + 3\log y = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2\log x + 3\log y = 5 \\ 4\log x - 3\log y = 1 \end{array}\right\}$$
$$6\log x = 6 \Rightarrow \log x = 1$$

Sustituyendo en la primera ecuación, en esta última forma del sistema:

$$2\cdot 1 + 3\log y = 5 \Rightarrow 3\log y = 3 \Rightarrow \log y = 1$$

- $\log x = 1 \Rightarrow x = 10^1 = 10$
- $\log y = 1 \Rightarrow y = 10^1 = 10$

La solución del sistema es, pues: $\boxed{x = 10 \text{ con } y = 10}$. Válida, pues ni anula ni hace negativo ningún argumento de logaritmo en las ecuaciones originales.

5) Hallar el antepenúltimo término del desarrollo de $\left(a^2 b - \dfrac{\sqrt{a}}{b^3}\right)^{13}$ *(1,5 puntos)*

Según el *Binomio de Newton*, y considerando que $\binom{13}{11} = \binom{13}{2}$, ya que 11 + 2 = 13, el antepenúltimo término de dicho desarrollo será:

$$(-1)^{11}\binom{13}{11}(a^2b)^{13-11}\left(\frac{\sqrt{a}}{b^3}\right)^{11} = -\binom{13}{2}(a^2b)^2\frac{\sqrt{a^{11}}}{b^{33}} = -\frac{13\cdot 12}{2\cdot 1}a^4b^2\frac{\sqrt{a^{10}a}}{b^{33}} =$$

$$= -13\cdot 6a^4\frac{a^5\sqrt{a}}{b^{33-2}} = \boxed{-78\frac{a^9\sqrt{a}}{b^{31}}}$$

6) Resolver la ecuación: $2\binom{x}{3} = 4x$ *(1,5 puntos)*

Desarrollamos el número combinatorio:

$$2\frac{x(x-1)(x-2)}{3\cdot 2\cdot 1} = 4x \Rightarrow \frac{(x^2-x)(x-2)}{3} = 4x \Rightarrow x^3 - 2x^2 - x^2 + 2x = 12x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3 - 3x^2 - 10x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 3x - 10) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ó } x^2 - 3x - 10 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9+40}}{2} = \frac{3 \pm 7}{2} = \left\langle \begin{array}{l} = -2 \\ = 5 \end{array}\right.$$

De las tres soluciones: –2, 0 ó 5, la única válida es $\boxed{x = 5}$, porque en un *número combinatorio* el *antecedente* tiene que ser positivo estrictamente.

7) Resolver el sistema: $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{-2x^2 + 4x + 6}{x-2} \le 0 \\ 2x - 3 < 0 \end{array}\right.$ *(1,5 puntos)*

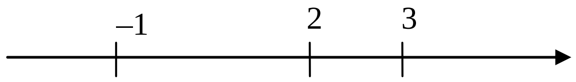
Para resolver la inecuación $\dfrac{-2x^2+4x+6}{x-2} \leq 0$, procedemos así:

- Factorizamos y hallamos las raíces de numerador y denominador.
  - $-2x^2+4x+6=0 \iff x^2-2x-3=0 \iff x=\dfrac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\dfrac{2\pm 4}{2}=\left\langle\begin{array}{l}=-1\\=3\end{array}\right.$

    Por lo que, como conocemos las dos raíces del polinomio de grado 2, aplicando el Teorema de Descomposición Factorial tenemos que:

    $$\boxed{-2x^2+4x+6=-2(x+1)(x-3) \text{ y sus raíces son } -1 \text{ y } 3}.$$
  - $x-2=0 \iff x=2$, que es su única raíz, y el polinomio ya está factorizado.
- Inecuación simplificada:

  La inecuación se transforma en: $\dfrac{-2(x+1)(x-3)}{x-2} \leq 0 \iff \boxed{\dfrac{(x+1)(x-3)}{x-2} \geq 0}$
- Cuadro de signos. Dividimos R en intervalos mediante las raíces obtenidas, una vez ordenadas, y creamos el cuadro de signos: ninguno de los factores intervinientes cambiará de signo dentro de dichos intervalos, por lo que basta tomar un punto cualquiera de cada uno de ellos para evaluar los signos (cualquier otro punto ofrecerá el mismo signo):



	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 2)$	2	$(2, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$x+1$	–	0	+	…	+	…	+
$x-2$	–	…	–	0	+	…	+
$x-3$	–	…	–	…	–	0	+
$\dfrac{(x+1)(x-3)}{x-2}$	–	0	+	$\nexists$	–	0	+
¿Sirven? →	No	Si	Si	No	No	Si	Si

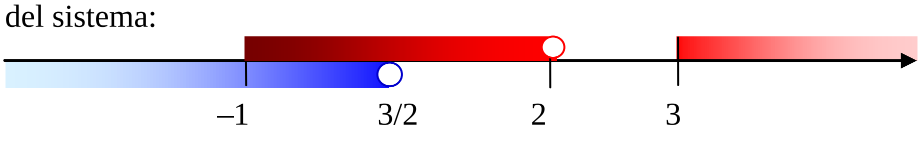
Los signos de la última fila, que son los que nos interesan, los obtenemos mediante la regla de los signos con los que están en su misma columna. Los valores que anulan el denominador provocan que no se pueda completar la operación, por lo que los descartamos. Al estudiar las tres raíces, sólo nos interesan los factores que se anulan, de entre los tres que investigamos. Es por ello que ponemos puntos suspensivos en los otros, porque 0 multiplicado por lo que den, resulta 0. De este modo:

$$\boxed{[-1, 2) \cup [3, +\infty)}$$

Resolver la segunda inecuación del sistema consiste, únicamente, en despejar:

$$2x-3<0 \iff 2x<3 \iff x<3/2 \iff \boxed{x \in (-\infty, 3/2)}$$

Llevamos a un gráfico sobre la *recta real* las soluciones de las dos inecuaciones, para ver dónde se verifican *simultáneamente* y llegar, de esta manera, a la solución del sistema:



Por tanto, la solución del sistema es: $\boxed{[-1, 3/2)}$.