ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Para resolver ecuaciones exponenciales (la incógnita está en el exponente, con la base positiva y distinta de 1), suelen ser útiles las siguientes estrategias:

- Hacer que la incógnita aparezca en única potencia igualada a un número ($a^{f(x)}=b$), tomar logaritmos y despejar x.
- Lo mismo, igualada a otra potencia ($a^{f(x)}=b^{g(x)}$), tomar logaritmos y despejar x.
- Igualar dos potencias de la misma base ($a^{f(x)} = a^{g(x)}$) e igualar los exponentes (porque $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$, siendo $a > 0$, $a \neq 1$).
- Hacer que la incógnita aparezca con la misma base y exponente ($a^{f(x)}$) en más de un lugar de la ecuación, y realizar un cambio de incógnita ($t = a^{f(x)}$), y deshacer, después de resuelto, el cambio.

Para resolver ecuaciones logarítmicas, hay que quitar logaritmos, empleando que $\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y$, siendo $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, $y > 0$. También se puede realizar un cambio de incógnita, haciendo la nueva incógnita igual a una expresión con logaritmos, y deshacer, después de resuelto, el cambio. **En las ecuaciones logarítmicas hay que comprobar siempre la validez de las soluciones, porque los argumentos de los logaritmos en la ecuación original no pueden hacerse cero ni negativos.**

Resolver las siguientes ecuaciones y sistemas exponenciales y logarítmicos:

1) $3^{x-1} = 3^{2x+1}$ *Sol: –2*
2) $2^{x+1} = 4\cdot 8^x$ *Sol: –1/2*
3) $3^{-x+1} = 3^{2x+3}$ *Sol: –2/3*
4) $12\cdot 4^{x+1} = 3\cdot 8^x$ *Sol: 4*
5) $2^{1-x^2} = \dfrac{1}{256}$ *Sol: ±3*
6) $2^{1+x} = 4^{2-x}$ *Sol: 1*
7) $(4^{3-x})^{2-x} = 1$ *Sol: 2; 3*
8) $(10^{5-x})^{6-x} = 100$ *Sol: 4; 7*
9) $128^{x+1} = 2^{x^2-x-2}$ *Sol: –1; 9*
10) $3^x\cdot 9^x = 9^3$ *Sol: 2*
11) $\dfrac{81^2(3^x)^x}{9^{3x}} = 1$ *Sol: 2; 4*
12) $4^x\cdot 16^x = 2$ *Sol: 1/6*
13) $\dfrac{6^x}{4} = 3^x$ *Sol: 2*
14) $3^{5x^2-4x+4} = 3$ *Sol: No tiene*
15) $(3^5)^{x^2-5x+5} = 243$ *Sol: 1; 4*
16) $27^{3x+1} = 81^{2x+1}$ *Sol: 1*
17) $3^{x-1} + 3^x + 3^{x+1} = \dfrac{13}{3}$ *Sol: 0*
18) $3^x + 3^{x-1} + 3^{x+2} + 3^{x+1} = 120$ *Sol: 2*
19) $2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} = \dfrac{31}{4}$ *Sol: –1*
20) $9^x - 2\cdot 3^{x+2} + 81 = 0$ *Sol : 2*
21) $3^x - 2\cdot 9^x + 15 = 0$ *Sol: 1*

22) $5^{x+1} = 10 + 3 \cdot 5^{2-x}$ *Sol: 1*

23) $4^x = 8 + 2^{x+1}$ *Sol: 2*

24) $\dfrac{5^{2x-1}}{25^{x^2-\frac{1}{4}}} = 1$ *Sol: 1/2*

25) $2^{2x+1} = 17 \cdot 2^x - 8$ *Sol: –1; 3*

26) $1 + 2 + 4 + \ldots + 2^n = 255$ *Sol: 7*

27) $2^x = 7$ *Sol: ln 7 / ln2*

28) $9^x + 6 = 5 \cdot 3^x$ *Sol: 1; ln 2/ ln3*

29) $3^{2-x} = 2^{3+x}$ *Sol: (2ln3 – 3ln2)/(ln2 + ln3)*

30) $\dfrac{9^{x-1}}{2^{3-x}} = 81 \cdot 27^x$ *Sol: (6ln3+3ln2)/(ln2-ln3)*

31) $3^x + 4 \cdot 3^x = 7$ *Sol: (ln 7 – ln 5)/ln 3*

32) $4^{x+1} + 6 = 28 \cdot 2^{x-1}$ *Sol: –1; log3/log2*

33) $\log_2 (x^2 - 5x + 4) = \log_2 (2x - 6)$ *Sol: 5*

34) $2\log(x - 1) = \log (x + 11)$ *Sol: 5*

35) $2\log x - \log(x - 16) = 2$ *Sol: 20; 80*

36) $2\log_4 (x - 1) = 1$ *Sol: 3*

37) $\log x = \dfrac{2 - \log x}{\log x}$ *Sol: 10; 0.01*

38) $\log(2x^2 - 1) - \log(3x + 2) = 1 - \log 50$ *Sol: 1*

39) $3\log x - \log \dfrac{x}{2} = \log 32$ *Sol: 4*

40) $\log(x - 2) + \log(x - 3) = \log(x^2 + 1)$ *Sol: No tiene*

41) $\left.\begin{array}{r} \log x + \log y = 5 \\ \log x - \log y = -1 \end{array}\right\}$ *Sol: (100; 1000)*

42) $\left.\begin{array}{r} \log x - 3\log y = -3 \\ \dfrac{x}{y} = 10 \end{array}\right\}$ *Sol: (1000, 100)*

43) $\left.\begin{array}{r} \log x + 3\log y = 7 \\ \log \dfrac{x^3}{y} = 1 \end{array}\right\}$ *Sol: (10, 100)*

44) $\left.\begin{array}{r} 2x - 5y = 30 \\ \log x - \log y = 1 \end{array}\right\}$ *Sol:(20, 2)*

45) $\left.\begin{array}{r} \log(x + y) + \log(x - y) = \log 60 \\ 2^{x+y} = 4^5 \end{array}\right\}$ *Sol: (8, 2)*

46) $\left.\begin{array}{r} 2^x + 5^y = 9 \\ 2^{x+2} + 5^{y+1} = 41 \end{array}\right\}$ *Sol: (2, 1)*

47) $\left.\begin{array}{r} \log x + 3\log y = 5 \\ \log x - \log y = 3 \end{array}\right\}$ *Sol:* $(\sqrt{10^7}, \sqrt{10})$