NOMBRE: ____

Instrucciones: **1)** Todos los **folios** deben tener el **nombre** y estar **numerados** en la parte superior. **2)** Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. **3)** No se puede usar **corrector ni lápiz**, y el bolígrafo debe ser de **tinta permanente**. Se aconseja no usar borrador. **4)** Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar** la respuesta a una pregunta con las de otras. **5)** **Desatender las instrucciones puede penalizarse con hasta 1 punto** o la **anulación** en caso de usar tinta corregible.

EN EL PROBLEMA 6 HAY QUE OBTENER AL MENOS 1,2 PUNTOS. DE LO CONTRARIO, LA CALIFICACIÓN MÁXIMA DE LA PRUEBA ES 4,4

1) Hallar todas las soluciones reales y complejas de la ecuación $z^4 - 1 = 0$ *(1 punto)*

2) Calcular, si es posible, x para que $\frac{x+i}{1-i} = 1+2i$ *(1 punto)*

3) Dada la siguiente función, estudiar su continuidad, clasificando las discontinuidades y calcular el valor de a para que sea continua en $x = -1$: *(2 puntos)*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x}{x^2-4} & \text{si } x \le -1 \\ 2x+a & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

4) Calcular el valor de los siguientes límites: *(2 puntos)*

a) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{3x^2 - x - 14}{3 - \sqrt{3-3x}}$

b) $\lim\limits_{x \to 2} e^{\frac{1}{x-2}}$

5) Calcular las asíntotas de la función: *(2 puntos)*

$$f(x) = \frac{2x^2-3}{x-1}$$

6) Derivar y simplificar: *(2 puntos)*

a) $f(x) = \dfrac{3x+1}{(x-2)^2}$

b) $g(x) = \dfrac{3x}{\sqrt[3]{3x}}$

c) $h(x) = 2xe^{5x^2}$

d) $j(x) = \ln \sqrt[5]{\dfrac{(4x-1)^3}{3x^2-1}}$

SOLUCIONES

1) Hallar todas las soluciones reales y complejas de la ecuación $z^4 - 1 = 0$ *(1 punto)*

$$z^4 - 1 = 0 \Leftrightarrow z^4 = 1 \Leftrightarrow z = \sqrt[4]{1}$$

Para hallar la raíz de un complejo, hay que pasarlo a forma polar. Dada la posición de -1 en el sistema de representación gráfica de los complejos, se tiene que $1 = 1_{0^\circ}$. Por tanto, las soluciones de la ecuación:

$$z = \sqrt[4]{1_{0^\circ}}$$

Hay, pues, cuatro soluciones (el valor del índice de la raíz). Todas ellas tienen como módulo la raíz cuarta del módulo del radicando: $\sqrt[4]{1} = 1$. Y sus argumentos son:

$$\alpha_1 = \frac{0}{4} + \frac{360}{4} \cdot 0 = 0^\circ \qquad \alpha_3 = \frac{0}{4} + \frac{360}{4} \cdot 2 = 180^\circ$$

$$\alpha_2 = \frac{0}{4} + \frac{360}{4} \cdot 1 = 90^\circ \qquad \alpha_4 = \frac{0}{4} + \frac{360}{4} \cdot 3 = 270^\circ$$

Luego las cuatro soluciones son: $\boxed{1_{0^\circ} = 1,\ 1_{90^\circ},\ 1_{180^\circ} = -1,\ 1_{270^\circ}}$.

2) Calcular, si es posible, x para que $\dfrac{x+i}{1-i} = 1+2i$ *(1 punto)*

$$\frac{x+i}{1-i} = \frac{(x+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{x+xi+i+i^2}{1-i^2} = \frac{x+(x+1)i-1}{1-(-1)} = \frac{x-1+(x+1)i}{2} =$$

$$= \frac{x-1}{2} + \frac{x+1}{2} i$$

Como dos complejos en forma binómica coinciden si, y sólo si sus respectivas partes reales e imaginarias lo hacen, para que este resultado sea igual a $1 + 2i$, se precisa:

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} = 1 \Leftrightarrow x-1 = 2 \Leftrightarrow x = 3 \\ \dfrac{x+1}{2} = 2 \Leftrightarrow x+1 = 4 \Leftrightarrow x = 3 \end{cases}$$

Por tanto, el problema tiene solución si $\boxed{x = 3}$.

3) Dada la siguiente función, estudiar su continuidad, clasificando las discontinuidades y calcular el valor de a para que sea continua en $x = -1$: *(2 puntos)*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x}{x^2-4} & \text{si} \quad x \leq -1 \\ 2x + a & \text{si} \quad x > -1 \end{cases}$$

- $\underline{(-\infty, -1)}$: f está definida mediante la función $y = \dfrac{3x}{x^2-4}$. Al ser ésta una función *racional*, es continua en su dominio, es decir, en todos los números reales salvo $x = -2$ y $x = 2$, que anulan el denominador. Como $x = 2$ no pertenece a $(-\infty, -1)$, lo ignoramos. Por todo ello, <u>f es continua en todo este intervalo salvo en $x = -2$</u>. Pasamos a estudiar éste punto:

  1) $\nexists f(-2)$

  2) $\displaystyle\lim_{x\to -2^-} \frac{3x}{x^2-4} = \left(\frac{-6}{0^+}\right) = -\infty; \quad \lim_{x\to -2^+} \frac{3x}{x^2-4} = \left(\frac{-6}{0^-}\right) = +\infty$

De donde deducimos que tiene una <u>discontinuidad asintótica de salto infinito en $x = -2$</u>.

- <u>$(-1, +\infty)$</u>: f está definida por una función polinómica ($y = 2x + a$), y dichas funciones no presentan discontinuidades. Luego <u>es continua en todo este intervalo</u>.
- <u>$x = -1$</u>: 1) $\exists f(-1) = \dfrac{-3}{1-4} = 1$; 2) Para calcular $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$, hemos de estudiar los límites laterales, porque la definición de f no coincide a izquierda y a derecha del punto que se estudia:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{3x}{x^2-4} = 1; \quad \lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} (2x+a) = -2 + a$$

Para ser continua en $x = -1$, estos resultados deben coincidir (de lo contrario, tendría en dicho punto una *discontinuidad de salto finito*). Así:

$$-2 + a = 1 \iff a = 3$$

En definitiva, si $a = 3$, f es continua en $\mathbb{R} - \{-2\}$, con una discontinuidad asintótica de salto infinito en $x = -2$.

4) Calcular el valor de los siguientes límites: *(2 puntos)*

a) $\displaystyle\lim_{x\to -2} \frac{3x^2 - x - 14}{3 - \sqrt{3-3x}}$

Como este límite presenta una discontinuidad del tipo 0/0, y tiene una raíz dentro de una resta en el denominador, que causa su 0, multiplicamos primeramente numerador y denominador por el conjugado de éste último, y luego descompondremos por Ruffini los polinomios resultantes, para eliminar la indeterminación:

$$\lim_{x\to -2} \frac{3x^2 - x - 14}{3 - \sqrt{3-3x}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to -2} \frac{(3x^2 - x - 14)(3+\sqrt{3-3x})}{(3-\sqrt{3-3x})(3+\sqrt{3-3x})} =$$

$$= \lim_{x\to -2} \frac{(3x^2 - x - 14)(3+\sqrt{3-3x})}{3^2 - (\sqrt{3-3x})^2} = \lim_{x\to -2} \frac{(3x^2 - x - 14)(3+\sqrt{3-3x})}{9-(3-3x)} =$$

$$= \lim_{x\to -2} \frac{(3x^2 - x - 14)(3+\sqrt{3-3x})}{6+3x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)(3x-7)(3+\sqrt{3-3x})}{3(2+x)} =$$

$$= \lim_{x\to -2} \frac{(3x-7)(3+\sqrt{3-3x})}{3} = \frac{-13(3+3)}{3} = \boxed{-26}$$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 2} e^{\frac{1}{x-2}} = \left(e^{\frac{1}{0}} = e^{\infty}\right)$

Como la función exponencial se comporta de forma diferente en $-\infty$ y en $+\infty$, hemos de diferenciar los límites laterales:

$$\lim_{x\to 2^-} e^{\frac{1}{x-2}} = \left(e^{-\infty}\right) = \boxed{0}; \quad \lim_{x\to 2^+} e^{\frac{1}{x-2}} = \left(e^{+\infty}\right) = \boxed{+\infty}$$

Por tanto, al ser los resultados dispares, el límite completo no existe.

5) Calcular las asíntotas de la función: *(2 puntos)*

$$f(x) = \frac{2x^2-3}{x-1}$$

- Asíntotas verticales: Puede tenerlas en los puntos de discontinuidad o en el comienzo y fin del dominio. En este caso, al ser el dominio R, sólo procede estudiar los puntos de discontinuidad, que es 1 (anula el denominador):

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-3}{x-1}=\left(\frac{-1}{0}\right)=\infty \Rightarrow \boxed{\text{La recta } x=1 \text{ es asíntota vertical}}.$$

- Asíntotas horizontales: $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3}{x-1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x}=\lim_{x\to\infty}2x=\infty \Rightarrow$ $\boxed{\text{No tiene asíntotas horizontales}}$.
- Asíntotas oblicuas: Sería $y = mx + n$, donde:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2-3}{x-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3}{x^2-x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2}=2$$

$$n=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-3}{x-1}-2x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3-2x(x-1)}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3-2x^2+2x}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-3}{x-1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x}=2$$

Luego $\boxed{\text{la recta } y=2x+2 \text{ es asíntota oblicua}}$.

6) Derivar y simplificar: *(2 puntos)*

a) $f(x)=\frac{3x+1}{(x-2)^2} \Rightarrow f'(x)=\frac{3(x-2)^2-(3x+1)2(x-2)}{(x-2)^4}=$

$$=\frac{(x-2)[3(x-2)-(3x+1)2]}{(x-2)^4}=\frac{3x-6-6x-2}{(x-2)^3}=\boxed{\frac{-3x-8}{(x-2)^3}}$$

b) $g(x)=\frac{3x}{\sqrt[3]{3x}}$

$$g(x)=\frac{3x}{\sqrt[3]{3x}}=\frac{3x\ \sqrt[3]{3^2x^2}}{\sqrt[3]{3x}\ \sqrt[3]{3^2x^2}}=\frac{3x\sqrt[3]{3^2x^2}}{\sqrt[3]{3^3x^3}}=\frac{3x\sqrt[3]{3^2x^2}}{3x}=\sqrt[3]{3^2x^2}=\sqrt[3]{9x^2}\Rightarrow$$

$$g'(x)=\frac{18x}{3\sqrt[3]{(9x^2)^2}}=\frac{6x}{\sqrt[3]{3^4x^4}}=\frac{6x}{3x\sqrt[3]{3x}}=\boxed{\frac{2}{\sqrt[3]{3x}}}$$

De otra forma: $g(x)=\frac{3x}{\sqrt[3]{3x}}=(3x)^{1-\frac{1}{3}}=(3x)^{\frac{2}{3}}\Rightarrow g'(x)=\frac{2}{3}(3x)^{\frac{2}{3}-1}\cdot 3=2(3x)^{-\frac{1}{3}}=$

$$=\frac{2}{(3x)^{1/3}}=\boxed{\frac{2}{\sqrt[3]{3x}}}$$

c) $h(x)=2xe^{5x^2}\Rightarrow h'(x)=2\,e^{5x^2}+2x\,10x\,e^{5x^2}=\boxed{2\,e^{5x^2}(1+10x^2)}$

d) $j(x)=\ln\sqrt[5]{\frac{(4x-1)^3}{3x^2-1}}$

$$j(x)=\ln\sqrt[5]{\frac{(4x-1)^3}{3x^2-1}}=\frac{1}{5}\ln\frac{(4x-1)^3}{3x^2-1}=\frac{1}{5}[\ln(4x-1)^3-\ln(3x^2-1)]=$$

$$=\frac{1}{5}[3\ln(4x-1)-\ln(3x^2-1)]\Rightarrow j'(x)=\boxed{\frac{1}{5}\left(\frac{12}{4x-1}-\frac{6x}{3x^2-1}\right)}$$

NOMBRE: ____

Instrucciones: **1)** Todos los **folios** deben tener el **nombre** y estar **numerados** en la parte superior. **2)** Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. **3)** No se puede usar **corrector ni lápiz**, y el bolígrafo debe ser de **tinta permanente**. Se aconseja no usar borrador. **4)** Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar** la respuesta a una pregunta con las de otras. **5)** **Desatender las instrucciones puede penalizarse con hasta 1 punto** o la **anulación** en caso de usar tinta corregible.

EN EL PROBLEMA 1 HAY QUE OBTENER AL MENOS 1 PUNTO. DE LO CONTRARIO, LA CALIFICACIÓN MÁXIMA DE LA PRUEBA ES 4,4

1) Calcular y simplificar las derivadas de las siguientes funciones: *(1,5 puntos)*

   a) $f(x) = \dfrac{2(3x+1)^2}{3x-1}$

   b) $g(x) = (x^2 - x + 1)\, e^{5x}$

   c) $j(x) = \ln\left(\sqrt[5]{\dfrac{(5x-3)^3}{2x^4}}\right)$

2) Estudiar la continuidad de la siguiente función, clasificando sus discontinuidades:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x-1}{x-1} & \text{si} \quad x < -1 \\ \dfrac{3x^2-3}{x(x-1)} & \text{si} \quad x \geq -1 \end{cases}$$

(2 puntos)

3) Hallar las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de $f(x) = \ln(x + 1)$ en el punto de abscisa $x = 0$. *(1 punto)*

4) Sea $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Se sabe que un punto de inflexión de la gráfica de f tiene abscisa $x = 1$ y que f tiene un mínimo relativo en $x = 2$ de valor -9. Calcular a, b y c. *(1 punto)*

5) Estudiar y dibujar la gráfica de $y = \dfrac{x^3+4}{x^2}$, comprobando previamente que sus derivadas son: $y' = \dfrac{x^3-8}{x^3}$; $y'' = \dfrac{24}{x^4}$

Derivadas:	*0,5 puntos*
Dominio, Par/Impar, Int. Ejes:	*0,5 puntos*
Asíntotas:	*0,5 puntos*
Monotonía/Extr.relativos:	*1 punto*
Curvatura/P.Inflexión:	*1 punto*
Gráfica (tras estudio anterior):	*1 punto*

SOLUCIONES

1) Calcular y simplificar las derivadas de las siguientes funciones: *(1,5 puntos)*

a) $f(x) = \dfrac{2(3x+1)^2}{3x-1}$

$$f'(x) = \frac{4(3x+1)3(3x-1)-2(3x+1)^2 3}{(3x-1)^2} = \frac{(3x+1)[12(3x-1)-6(3x+1)]}{(3x-1)^2} =$$

$$= \frac{(3x+1)(36x-12-18x-6)}{(3x-1)^2} = \boxed{\frac{(3x+1)(18x-18)}{(3x-1)^2}} = \frac{18(3x+1)(x-1)}{(3x-1)^2} =$$

$$= \frac{18(3x^2-3x+x-1)}{(3x-1)^2} = \boxed{\frac{18(3x^2-2x-1)}{(3x-1)^2}}$$

b) $g(x) = (x^2 - x + 1)\, e^{5x}$

$$g'(x) = (2x-1)\, e^{5x} + 5(x^2 - x + 1)\, e^{5x} = e^{5x}(2x - 1 + 5x^2 - 5x + 5) =$$
$$= \boxed{e^{5x}(5x^2 - 3x + 4)}$$

c) $j(x) = \ln\left(\sqrt[5]{\dfrac{(5x-3)^3}{2x^4}}\right)$

Simplificamos antes de derivar, aplicando propiedades de logaritmos:

$$j(x) = \ln\left(\sqrt[5]{\frac{(5x-3)^3}{2x^4}}\right) = \frac{1}{5}\ln\left(\frac{(5x-3)^3}{2x^4}\right) = \frac{1}{5}[\ln(5x-3)^3 - \ln(2x^4)] =$$

$$= \frac{1}{5}[3\ln(5x-3) - (\ln(2) + \ln(x^4))] = \frac{1}{5}[3\ln(5x-3) - \ln(2) - 4\ln(x)]$$

Y derivamos:

$$j'(x) = \frac{1}{5}\left[3\frac{5}{5x-3} - 0 - 4\frac{1}{x}\right] = \frac{1}{5}\frac{3\cdot 5}{5x-3} - \frac{1}{5}\frac{4}{x} = \boxed{\frac{3}{5x-3} - \frac{4}{5x}}$$

2) Estudiar la continuidad de la siguiente función, clasificando sus discontinuidades:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x-1}{x-1} & \text{si } \; x < -1 \\[2mm] \dfrac{3x^2-3}{x(x-1)} & \text{si } \; x \geq -1 \end{cases}$$ *(2 puntos)*

- <u>$(-\infty, -1)$</u>: f coincide con $g(x) = \dfrac{2x-1}{x-1}$. Las funciones elementales son continuas en su dominio, y el de ésta es $\mathbb{R} - \{1\}$. O sea, que tiene, únicamente, una discontinuidad en $x = 1 \notin (-\infty, -1) \Rightarrow$ <u>f es continua en $(-\infty, -1)$</u>.
- <u>$(-1, +\infty)$</u>: f coincide con $h(x) = \dfrac{3x^2-3}{x(x-1)}$, que es <u>continua en $\mathbb{R} - \{0, 1\}$</u>. Ambos valores están en el intervalo estudiado, luego son, también, discontinuidades de f. Clasifiquémoslas:

- $x = 0$: 1) No existe $f(0)$; 2) $\lim_{x\to 0^-} \frac{3x^2-3}{x(x-1)} = \left(\frac{-3}{0^+}\right) = -\infty$; $\lim_{x\to 0^+} \frac{3x^2-3}{x(x-1)} = \left(\frac{-3}{0^-}\right) = +\infty \Rightarrow$ En $x = 0$ hay disc. asintótica de salto infinito.
- $x = 1$: 1) No existe $f(1)$; 2) $\lim_{x\to 1} \frac{3x^2-3}{x(x-1)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 1} \frac{3(x^2-1)}{x(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{3(x-1)(x+1)}{x(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{3(x+1)}{x} = 6 \Rightarrow$ En $x = 1$ hay disc. evitable.

- $x = -1$: 1) $\exists f(-1) = \frac{0}{2} = 0$; 2) $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{2x-1}{x-1} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$; $\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{3x^2-3}{x(x-1)} = 0 \Rightarrow$ En $x = -1$ hay disc. de salto finito.

En suma, f es continua en $\mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$, con discontinuidades de salto finito en $x = -1$, asintótica de salto infinito en $x = 0$ y evitable en $x = 1$.

3) Hallar las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de $f(x) = \ln(x + 1)$ en el punto de abscisa $x = 0$. *(1 punto)*

- Punto de tangencia: Como $f(0) = \ln(0+1) = \ln 1 = 0$, es $\boxed{(0, 0)}$.
- Pendiente de la tangente: $f'(x) = \frac{1}{x+1} \Rightarrow \boxed{m =} f'(1) = \boxed{1}$.
- Pendiente de la normal: $\boxed{m' =} -\frac{1}{m} = -\frac{1}{1} = \boxed{-1}$.
- Ecuación de la tangente: $y - 0 = 1(x - 0) \Rightarrow \boxed{y = x}$.
- Ecuación de la normal: $y - 0 = -(x - 0) \Rightarrow \boxed{y = -x}$.

4) Sea $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Se sabe que un punto de inflexión de la gráfica de f tiene abscisa $x = 1$ y que f tiene un mínimo relativo en $x = 2$ de valor -9. Calcular a, b y c. *(1 punto)*

- Para que una función polinómica tenga un mínimo relativo en $x = 2$ basta exigirle que $f'(2) = 0$ y que $f''(2) > 0$.
  $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \Rightarrow f'(2) = 12 + 4a + b = 0 \Rightarrow \boxed{4a + b = -12}$. (1)
  $f''(x) = 6x + 2a \Rightarrow f''(2) = 12 + 2a > 0 \Rightarrow 2a > -12 \Rightarrow \boxed{a > -6}$. (2)
- Por otra parte, debe ser $f(2) = -9$, de donde:
  $$8 + 4a + 2b + c = -9 \Rightarrow \boxed{4a + 2b + c = -17} \quad (3)$$
- Por último, para que tenga un punto de inflexión en $x = 1$, exigiremos que $f''(1) = 0$ y que $f'''(1) \neq 0$:
  $f''(1) = 0 \Rightarrow 6 + 2a = 0 \Rightarrow 2a = -6 \Rightarrow \boxed{a = -3}$. (4) y se verifica (2).
  $f'''(x) = 6 \Rightarrow f'''(1) \neq 0$ se cumple siempre.

Sustituyendo (4) en (1):
$$-12 + b = -12 \Rightarrow \boxed{b = 0}.$$
Y sustituyendo en (3):
$$-12 + c = -17 \Rightarrow \boxed{c = -5}.$$
En definitiva: $\boxed{a = -3,\ b = 0,\ c = -5,\ f(x) = x^3 - 3x^2 - 5}$.

5) Estudiar y dibujar la gráfica de $y = \dfrac{x^3+4}{x^2}$, comprobando previamente que sus derivadas son: $y' = \dfrac{x^3-8}{x^3}$; $y'' = \dfrac{24}{x^4}$

Derivadas:	*0,5 puntos*
Dominio, Par/Impar, Int. Ejes:	*0,5 puntos*
Asíntotas:	*0,5 puntos*
Monotonía/Extr.relativos:	*1 punto*
Curvatura/P.Inflexión:	*1 punto*
Gráfica (tras estudio anterior):	*1 punto*

1) Dominio: R – {0} ($x = 0$ anula el denominador, y no se puede dividir entre 0).
2) Par / Impar: $f(-x) = \dfrac{(-x)^3+4}{(-x)^2} = \dfrac{-x^3+4}{x^2} = -\dfrac{x^3-4}{x^2}$, que no coincide con $f(x)$ ni con $-f(x)$. Luego no es par ni impar.
3) Cortes con los ejes: Si $x = 0$, no podemos calcular la imagen, porque no es un punto del dominio $\Rightarrow$ No corta a OY.
Si $y = 0 \Rightarrow 0 = x^3 + 4 \Rightarrow x = \sqrt[3]{-4} = -\sqrt[3]{4}$, que no anula el denominador $\Rightarrow$ $(-\sqrt[3]{4}, 0) \approx (-1.6, 0)$.
4) Asíntotas:

a) AV: Probamos en el punto de discontinuidad: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3+4}{x^2} = \left(\dfrac{4}{0}\right) = \infty \Rightarrow$ La recta $\boxed{x = 0}$ es AV.

b) AH: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+4}{x^2} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} x = \infty \Rightarrow$ No tiene.

c) AO: $m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{x^3+4}{x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+4}{x\cdot x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+4}{x^3} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) =$

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{x^3} = \lim\limits_{x\to\infty} 1 = 1.$

$$n = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - mx\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+4}{x^2} - 1\cdot x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+4-x^3}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{4}{x^2} = 0$$

Luego $y = 1\cdot x + 0$, es decir, $\boxed{y = x}$ es A.O.

5) Monotonía:

Comenzamos calculando la derivada: $f'(x) = \dfrac{3x^2\cdot x^2 - (x^3+4)2x}{[x^2]^2} =$

$$= \frac{3x^4 - 2x^4 - 8x}{x^4} = \frac{x^4 - 8x}{x^4} = \boxed{\frac{x^3-8}{x^3}}$$

Separamos R en intervalos mediante los puntos siguientes:
a) Discontinuidades de f: $x = 0$.
b) Discontinuidades de f': $x = 0$.
c) Puntos que anulan f': $x^3 - 8 = 0 \Rightarrow x = 2$

Los puntos obtenidos son 0 y 2. Mediante ellos, dividimos R en intervalos para estudiar el signo de f' y, de ahí, deducir la monotonía de f:

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
f'	+	∄	–	0	+
f	↗(crec)	∄	↘(decrec)	mín	↗(crec)

Las coordenadas del mínimo obtenido son:

- Si $x = 3 \;\Rightarrow\; f(3) = \dfrac{2^3+4}{2^2} = \dfrac{12}{4} = 3 \;\Rightarrow\;$ mín en (2, 3)

6) Curvatura:

Comenzamos calculando la derivada segunda:

$$f''(x) = \frac{3x^2x^3-(x^3-8)3x^2}{(x^3)^2} = \frac{3x^5-3x^5+24x^2}{x^6} = \boxed{\frac{24}{x^4}}$$

Separamos R en intervalos mediante los puntos siguientes:

a) Discontinuidades de f y f': 0.

b) Discontinuidades de f'': 0.

c) Puntos que anulan f'': $24 = 0 \;\Rightarrow\;$ No es posible.

Dividimos R en intervalos mediante los puntos obtenidos: 0. Creamos el cuadro correspondiente, para estudiar el signo de f'', el cual es el mismo dentro de cada uno de los intervalos resultantes.El signo de f'' nos dice la curvatura de f:

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
f''	+	∄	+
f	∪ (convexa)	∄	∪ (convexa)

No tiene puntos de inflexión.

7) Gráfica: Utilizando todos los resultados anteriores, y completando, si es necesario, con una pequeña tabla de valores, obtenemos la gráfica de la función, que es la siguiente. En el dibujo se han incluido las asíntotas, en color azul, que sirven de ayuda para dibujar la función.