NOMBRE: ____

Instrucciones: **1)** Todos los **folios** deben tener el **nombre** y estar **numerados** en la parte superior. **2)** Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. **3)** No se puede usar **corrector ni lápiz**, y el bolígrafo debe ser de **tinta indeleble**. Se aconseja no usar borrador. **4)** Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar** la respuesta a una pregunta con las de otras. **5)** **Desatender las instrucciones puede penalizarse con la anulación del ejercicio o, incluso, de la prueba completa**.

En el ejercicio 1 hay que obtener una puntuación mínima de 1.2 puntos. De lo contrario, la calificación máxima de la prueba es 4.4.

1) Derivar y simplificar las siguientes funciones: *(2 puntos)*

a) $y = 2^x \cos(5x^3 - 2)$ b) $y = \ln \sqrt[5]{\dfrac{6x^3}{(5-2x)^4}}$ c) $y = \text{arctg}\, e^{3x}$ d) $y = \log(2x^4 + 1)$

2) Estudiar la continuidad de la siguiente función, clasificando sus discontinuidades:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{(4-x)^2} & \text{si} \quad x \le 1 \\ \dfrac{3x}{8-x} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

(2 puntos)

3) Hallar las tangentes a $y = x^3 - 2x + 1$ paralelas a $x - y - 3 = 0$. *(2 puntos)*

4) Realizar un estudio completo y representar gráficamente la función $f(x) = \dfrac{-4x}{(x+1)^2}$, comprobando previamente que sus derivadas son $f'(x) = \dfrac{4x-4}{(x+1)^3}$, $f''(x) = \dfrac{-8x+16}{(x+1)^4}$

Derivadas:	*0,4 puntos*
Dominio, Par/Impar, Int. Ejes:	*0,3 puntos*
Asíntotas:	*0,5 puntos*
Monotonía/Extr.relativos:	*0,9 puntos*
Curvatura/P.Inflexión:	*0,9 puntos*
Gráfica (tras estudio anterior):	*1 punto*

SOLUCIONES

1) Derivar y simplificar las siguientes funciones: *(2 puntos)*

a) $y = 2^x \cos(5x^3 - 2)$

$$\boxed{y' =} \, 2^x \cos(5x^3 - 2)\ln 2 - 2^x \operatorname{sen}(5x^3 - 2)\, 15x^2 = \\ = \boxed{2^x [\cos(5x^3 - 2)\ln 2 - 15x^2 \operatorname{sen}(5x^3 - 2)]}$$

b) $y = \ln \sqrt[5]{\dfrac{6x^3}{(5-2x)^4}}$

$$y = \ln \sqrt[5]{\frac{6x^3}{(5-2x)^4}} = \frac{1}{5}\ln\frac{6x^3}{(5-2x)^4} = \frac{1}{5}[\ln 6x^3 - \ln(5-2x)^4] =$$

$$= \frac{1}{5}[\ln 6 + \ln x^3 - 4\ln(5-2x)] = \frac{1}{5}[\ln 6 + 3\ln x - 4\ln(5-2x)] \Rightarrow$$

$$\boxed{y' =} \, \frac{1}{5}\left[0 + \frac{3}{x} - 4\frac{-2}{5-2x}\right] = \boxed{\frac{1}{5}\left[\frac{3}{x} + \frac{8}{5-2x}\right]}$$

c) $y = \operatorname{arctg} e^{3x}$

$$\boxed{y' =} \, \frac{3e^{3x}}{1+(e^{3x})^2} = \boxed{\frac{3e^{3x}}{1+e^{6x}}}$$

d) $y = \log(2x^4 + 1)$

$$\boxed{y' = \frac{8x^3}{2x^4+1}\frac{1}{\ln 10}}$$

2) Estudiar la continuidad de la siguiente función, clasificando sus discontinuidades:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{(4-x)^2} & \text{si} \quad x \le 1 \\ \dfrac{3x}{8-x} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$ *(2 puntos)*

- $(-\infty, 1)$: f coincide con la función $y = \dfrac{2x}{(4-x)^2}$ que, al ser elemental, es continua en su dominio. Como el denominador sólo se anula en $x = 4$, dicho valor es su única discontinuidad. Pero $4 \notin (-\infty, 1)$, por lo que es discontinuidad de esta última función, pero no de f. $\Rightarrow$ f es continua en este intervalo.
- $(1, +\infty)$: f coincide con $y = \dfrac{3x}{8-x}$, que es continua salvo en 8, punto que está en este intervalo. Veamos de qué tipo es la discontinuidad:

  1) $\nexists f(8)$; 2) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{3x}{8-x} = \left(\dfrac{24}{0}\right) = \infty$. Como $\lim\limits_{x\to 8^-}\dfrac{3x}{8-x} = \left(\dfrac{+}{+}\right) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to 8^+}\dfrac{3x}{8-x}$ $= \left(\dfrac{+}{-}\right) = -\infty$, se trata de una discontinuidad asintótica de salto infinito.

- $x = 1$: 1) $\exists f(1) = \dfrac{2\cdot 1}{(4-1)^2} = \dfrac{2}{9}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{2x}{(4-x)^2} = \dfrac{2}{9}$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{3x}{8-x} = \dfrac{3}{7}$. Como los límites laterales no coinciden, es una discontinuidad de salto finito.

En resumen, f es continua en R – {1, 8}, con discontinuidad de salto finito en $x = 1$ y asintótica de salto infinito en $x = 8$.

3) Hallar las tangentes a $y = x^3 - 2x + 1$ paralelas a $x - y - 3 = 0$. *(2 puntos)*

Dos rectas son paralelas si, y sólo si tienen la misma pendiente. La recta que nos dan es $y = x - 3$, por lo que su pendiente es 1. Buscamos, pues, tangentes a la función dada que tengan pendiente 1. La pendiente de la recta en un punto de abscisa x vale $f'(x) = 3x^2 - 2$. Luego los x buscados son:

$$3x^2 - 2 = 1 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = -1 \text{ ó } x = 1$$

Por lo que hay dos puntos en los que ocurre la condición pedida.

- $x = -1$:
  - Punto de tangencia: $f(-1) = (-1)^3 - 2(-1) + 1 = 2 \Rightarrow$ es $(-1, 2)$.
  - Pendiente de la tangente: $m = f'(-1) = 1$.
  - Ecuación de la tangente: $y - 2 = 1(x + 1) \Leftrightarrow \boxed{y = x + 3}$.
- $x = 1$:
  - Punto de tangencia: $f(1) = 1^3 - 2\cdot 1 + 1 = 0 \Rightarrow$ es $(1, 0)$.
  - Pendiente de la tangente: $m = f'(1) = 1$.
  - Ecuación de la tangente: $y - 0 = 1(x - 1) \Leftrightarrow \boxed{y = x - 1}$.

4) Realizar un estudio completo y representar gráficamente la función $f(x) = \dfrac{-4x}{(x+1)^2}$, comprobando previamente que sus derivadas son $f'(x) = \dfrac{4x-4}{(x+1)^3}$, $f''(x) = \dfrac{-8x+16}{(x+1)^4}$

Derivadas:	*0,4 puntos*
Dominio, Par/Impar, Int. Ejes:	*0,3 puntos*
Asíntotas:	*0,5 puntos*
Monotonía/Extr.relativos:	*0,9 puntos*
Curvatura/P.Inflexión:	*0,9 puntos*
Gráfica (tras estudio anterior):	*1 punto*

Comencemos derivando:

$$\boxed{f'(x) =} \frac{-4(x+1)^2 + 4x2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{(x+1)[-4(x+1)+8x]}{(x+1)^4} = \frac{-4x-4+8x}{(x+1)^3} = \boxed{\frac{4x-4}{(x+1)^3}}$$

$$\boxed{f''(x) =} \frac{4(x+1)^3 - (4x-4)3(x+1)^2}{(x+1)^6} = \frac{(x+1)^2[4(x+1)-3(4x-4)]}{(x+1)^6} =$$

$$= \frac{4x+4-12x+12}{(x+1)^4} = \boxed{\frac{-8x+16}{(x+1)^4}}$$

1. Dominio: $\boxed{\text{R} - \{-1\}}$, pues 1 anula el denominador. Aquí es continua, al ser elemental.
2. Par / Impar: $f(-x) = \dfrac{-4(-x)}{(-x+1)^2} = \dfrac{4x}{(x-1)^2} \neq f(x), -f(x) \Rightarrow$ $\boxed{\text{Ni par, ni impar}}$.
3. Intersecciones con los ejes: Si $x = 0 \Rightarrow y = 0$: $\boxed{(0, 0)}$. Y si $y = 0 \Rightarrow -4x = 0 \Rightarrow x = 0$, válida, pues no anula el denominador. Da el mismo punto que antes.

4. Asíntotas:

- Verticales: El único punto de discontinuidad es $x = -1$. Y como $\lim_{x\to -1} \frac{-4x}{(x+1)^2} = \left(\frac{1}{0}\right) = \infty \Rightarrow$ $\boxed{\text{La recta de ec. } x = -1 \text{ es asíntota vertical}}$.
- Horizontales: $\lim_{x\to\infty} \frac{-4x}{(x+1)^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{-4x}{x^2+2x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{-4x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{-4}{x} = \left(\frac{-4}{\infty}\right) = 0 \Rightarrow$ $\boxed{\text{La recta de ec. } y = 0 \text{ es asíntota horizontal}}$.
- Oblicuas: Saldría la misma que la horizontal ya calculada.

5. Monotonía. Extremos relativos:
- Discontinuidades de f: $x = -1$.
- Discontinuidades de f': $x = -1$.
- $f'(x) = 0$: $4x - 4 = 0 \Rightarrow x = 1$.

Dividimos el dominio en intervalos mediante los puntos obtenidos:

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
f'	+	∄	–	0	+
f	↗(crec)	∄	↘(decrec)	mín	↗(crec)

Como $f(1) = -1 \Rightarrow$ $\boxed{\text{Tiene un mínimo relativo en } (1, -1)}$.

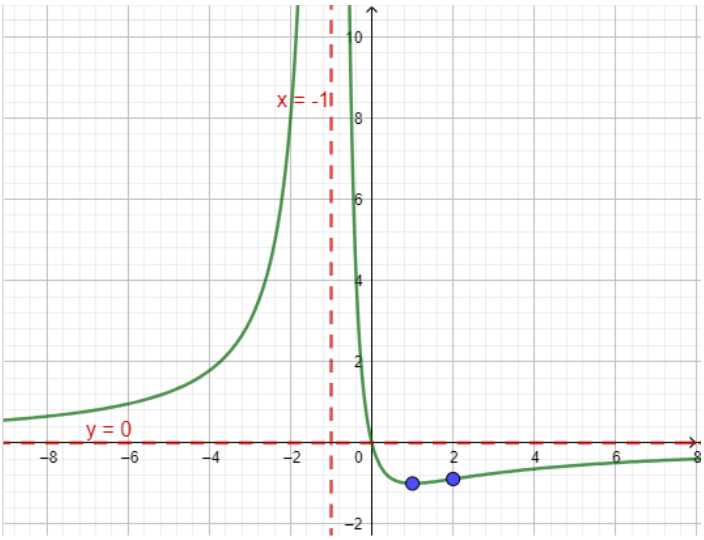
6. Curvatura. Puntos de inflexión:
- Discontinuidades de f, f': $x = -1$.
- Discontinuidades de f'': $x = -1$.
- $f''(x) = 0$: $-8x + 16 = 0 \Rightarrow x = 2$.

Dividimos el dominio en intervalos mediante los puntos obtenidos:

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 2)$	2	$(2, +\infty)$
f'	+	∄	+	0	–
f	∪ (convexa)	∄	∪ (convexa)	P.I.	∩ (cóncava)

Como $f(2) = -8/9 \Rightarrow$ Tiene un $\boxed{\text{punto de inflexión en } (2, -8/9)}$.

7. Gráfica



IES Fernando de Herrera **Curso 2017 / 18**

Tercer trimestre – Observación evaluable escrita nº 2 – 1º Bach C-T

NOMBRE: ____

Instrucciones: **1)** Todos los **folios** deben tener el **nombre** y estar **numerados** en la parte superior. **2)** Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. **3)** No se puede usar **corrector ni lápiz**, y el bolígrafo debe ser de **tinta indeleble**. Se aconseja no usar borrador. **4)** Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar** la respuesta a una pregunta con las de otras. **5)** **Desatender las instrucciones puede penalizarse con la anulación del ejercicio o, incluso, de la prueba completa**.

En el ejercicio 1 hay que obtener una puntuación mínima de 1.2 puntos. De lo contrario, la calificación máxima de la prueba es 4.4.

1) Derivar y simplificar las siguientes funciones: *(2 puntos)*

   a) $y = 2\sqrt[4]{4x^3}$ b) $y = \text{tg}\,(5x^3 + 1)$ c) $y = e^x(4x^3 + 2)^3$ d) $y = \ln\sqrt[5]{\dfrac{2x^3}{(5-2x)^3}}$

2) *(Selectividad 2013)* Sea $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Se sabe que un punto de inflexión de la gráfica de f tiene abscisa $x = 1$ y que f tiene un mínimo relativo en $x = 2$ de valor -9. Calcular a, b y c. *(1,5 puntos)*

3) *(Selectividad 2011)* Dada la función $f(x) = 4 - x^2$, hallar la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$. *(1 punto)*

4) *(Selectividad CCSS 2011)* Estudiar la continuidad de la siguiente función según los valores de a, clasificando sus discontinuidades: *(1,5 puntos)*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 4 & \text{si} \quad x \le 2 \\ 4 - \dfrac{a}{x} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

5) Realizar el estudio completo y la representación gráfica de $f(x) = \dfrac{x^2}{(x-2)^2}$ tras comprobar que sus derivadas son $f'(x) = \dfrac{-4x}{(x-2)^3}$ y $f''(x) = \dfrac{8x+8}{(x-2)^4}$.

Derivadas:	*0,4 puntos*
Dominio, Par/Impar, Int. Ejes:	*0,3 puntos*
Asíntotas:	*0,5 puntos*
Monotonía/Extr.relativos:	*0,9 puntos*
Curvatura/P.Inflexión:	*0,9 puntos*
Gráfica (tras estudio anterior):	*1 punto*

SOLUCIONES

1) Derivar y simplificar las siguientes funciones: *(2 puntos)*

a) $y = 2\sqrt[4]{4x^3}$

$$\boxed{y'=}\ 2\frac{12x^2}{4\sqrt[4]{(4x^3)^3}} = \frac{6x^2}{\sqrt[4]{4^3x^9}} = \frac{6x^2}{\sqrt[4]{(2^2)^3x^8x}} = \frac{6x^2}{x^2\sqrt[4]{2^6x}} = \frac{6}{2\sqrt[4]{2^2x}} = \boxed{\frac{3}{\sqrt[4]{4x}}}$$

b) $y = \text{tg}\,(5x^3 + 1) \Rightarrow \boxed{y' = \dfrac{15x^2}{\cos^2(5x^3+1)}}$

c) $y = e^x(4x^3 + 2)^3$

$$y' = e^x(4x^3 + 2)^3 + e^x\,3(4x^3 + 2)^2\,12x^2 = e^x\,(4x^3 + 2)^2\,[(4x^3 + 2) + 36x^2] =$$
$$= \boxed{e^x\,(4x^3 + 2)^2\,(4x^3 + 36x^2 + 2)}$$

d) $y = \ln\sqrt[5]{\dfrac{2x^3}{(5-2x)^3}} = \dfrac{1}{5}\ln\dfrac{2x^3}{(5-2x)^3} = \dfrac{1}{5}\left[\ln 2x^3 - \ln(5-2x)^3\right] =$

$$= \frac{1}{5}[\ln 2 + \ln x^3 - 3\ln(5-2x)] = \frac{1}{5}[\ln 2 + 3\ln x - 3\ln(5-2x)] \Rightarrow$$

$$y' = \frac{1}{5}\left(0 + \frac{3}{x} - 3\frac{-2}{5-2x}\right) = \boxed{\frac{1}{5}\left(\frac{3}{x} + \frac{6}{5-2x}\right)}$$

2) *(Selectividad 2013)* Sea $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Se sabe que un punto de inflexión de la gráfica de f tiene abscisa $x = 1$ y que f tiene un mínimo relativo en $x = 2$ de valor -9. Calcular a, b y c. *(1,5 puntos)*

Tenemos que: $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$; $f''(x) = 6x + 2a$; $f'''(x) = 6$.

- Punto de inflexión en $x = 1$: Para que lo tenga, es suficiente exigir dos cosas:
  1) $f''(1) = 0 \Leftrightarrow 6 + 2a = 0 \Leftrightarrow \boxed{a = -3}$.
  2) $f'''(1) \neq 0 \Leftrightarrow 6 \neq 0$, que se cumple.
- Mínimo relativo en $x = 2$: Para que así sea, es suficiente exigir dos cosas:
  1) $f'(2) = 0 \Leftrightarrow 12 + 4a + b = 0 \Leftrightarrow$ (como $a = -3$): $12 - 12 + b = 0 \Leftrightarrow \boxed{b = 0}$.
  2) $f''(2) > 0 \Leftrightarrow 12 + 2a > 0 \Leftrightarrow$ (como $a = -3$): $12 - 6 > 0$, que se cumple.
- El mínimo en $x = 2$ tiene valor -9: $f(2) = -9 \Leftrightarrow 8 + 4a + 2b + c = -9 \Leftrightarrow$ (como $a = -3$ y $b = 0$): $8 - 12 + c = -9 \Leftrightarrow \boxed{c = -5}$.

Luego $\boxed{a = -3,\ b = 0,\ c = -5, \text{ siendo } f(x) = x^3 - 3x^2 - 5}$.

3) *(Selectividad 2011)* Dada la función $f(x) = 4 - x^2$, hallar la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$. *(1 punto)*

- Punto de tangencia: $f(2) = 4 - 4 = 0$. Es $\boxed{(2, 0)}$.
- Pendiente de la tangente: $f'(x) = -2x \Rightarrow m = f'(2) = -4$
- Pendiente de la normal: $m' = -\dfrac{1}{m} = -\dfrac{1}{-4} = \boxed{\dfrac{1}{4}}$
- Ecuación de la normal: $y - 0 = \dfrac{1}{4}(x-2) \Rightarrow 4y = x - 2 \Rightarrow \boxed{x - 4y - 2 = 0}$.

4) *(Selectividad CCSS 2011)* Estudiar la continuidad de la siguiente función según los valores de a, clasificando sus discontinuidades: *(1,5 puntos)*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 4 & \text{si} \quad x \le 2 \\ 4 - \dfrac{a}{x} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

- <u>$(-\infty, 2)$</u>: <u>Es continua en todo el intervalo</u>, por tener expresión polinómica.
- <u>$(2, +\infty)$</u>: Al coincidir con una función elemental, es continua en el dominio de ésta, que es $\mathbb{R} - \{0\}$, porque 0 anula el denominador. Pero 0 no está en este intervalo. Luego <u>es continua en él</u>.
- <u>$x = 2$</u>: 1) $\exists f(2) = 4 - 6 + 4 = 2$; 2) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}(x^2 - 3x + 4) = 2$; $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}\left(4 - \dfrac{a}{x}\right) = 4 - \dfrac{a}{2} = \dfrac{8-a}{2}$. Será continua en $x = 2$ cuando estos tres resultados coincidan, es decir: $2 = \dfrac{8-a}{2} \Leftrightarrow 4 = 8 - a \Leftrightarrow a = 4$. Y si esto no sucede, los límites laterales serán finitos pero distintos, por lo que tendrá una discontinuidad de salto finito.

En resumen, si $a = 4$ es continua en todo $\mathbb{R}$, y si $a \ne 4$ tiene una discontinuidad de salto finito en $x = 2$.

5) Realizar el estudio completo y la representación gráfica de $f(x) = \dfrac{x^2}{(x-2)^2}$ tras comprobar que sus derivadas son $f'(x) = \dfrac{-4x}{(x-2)^3}$ y $f''(x) = \dfrac{8x+8}{(x-2)^4}$.

Derivadas:	*0,4 puntos*
Dominio, Par/Impar, Int. Ejes:	*0,3 puntos*
Asíntotas:	*0,5 puntos*
Monotonía/Extr.relativos:	*0,9 puntos*
Curvatura/P.Inflexión:	*0,9 puntos*
Gráfica (tras estudio anterior):	*1 punto*

<u>Derivadas</u>

$$\boxed{f'(x) =} \frac{2x(x-2)^2 - x^2 2(x-2)\cdot 1}{(x-2)^4} = \frac{(x-2)[2x(x-2) - 2x^2]}{(x-2)^4} = \frac{2x^2 - 4x - 2x^2}{(x-2)^3} = \boxed{\frac{-4x}{(x-2)^3}}$$

$$\boxed{f''(x) =} \frac{-4(x-2)^3 + 4x3(x-2)^2 1}{[(x-2)^3]^2} = \frac{(x-2)^2[-4(x-2) + 12x]}{(x-2)^6} = \frac{-4x + 8 + 12x}{(x-2)^4} = \boxed{\frac{8x+8}{(x-2)^4}}$$

1. <u>Dominio</u>: $\boxed{\mathbb{R} - \{2\}}$, pues 2 anula el denominador. Aquí es continua.
2. <u>Par / Impar</u>: $f(-x) = \dfrac{(-x)^2}{(-x-2)^2} = \dfrac{(-x)(-x)}{[(-1)(x+2)]^2} = \dfrac{x^2}{(-1)^2(x+2)^2} = \dfrac{x^2}{(x+2)^2}$, que no coincide ni con $f(x)$ ni con $-f(x)$, por lo que $\boxed{\text{no es par, ni impar}}$.
3. <u>Intersecciones con los ejes</u>.
   - $x = 0 \Rightarrow y = 0$: $\boxed{(0, 0)}$.
   - $y = 0 \Rightarrow \dfrac{x^2}{(x-2)^3} \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$, válida porque no anula el denominador. Nos da el mismo punto que antes.

4. Asíntotas
   - Verticales: Como 2 es la única discontinuidad, $\lim_{x \to 2} \frac{x^2}{(x-2)^2} = \left(\frac{4}{0}\right) = \infty \Rightarrow$ la recta de ecuación $x = 2$ es asíntota vertical.
   - Horizontales: $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{(x-2)^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x^2 + ...} = 1 \Rightarrow$ la recta de ecuación $y = 1$ es asíntota horizontal.
   - Oblicuas: Saldría la horizontal ya calculada.
5. Monotonía. Extremos relativos.
   - Discontinuidades de f: $x = 2$.
   - Discontinuidades de $f\,'$: $x = 2$.
   - $f\,'(x) = 0$: $\frac{-4x}{(x-2)^3} = 0 \Rightarrow x = 0$, válida porque no anula el denominador.

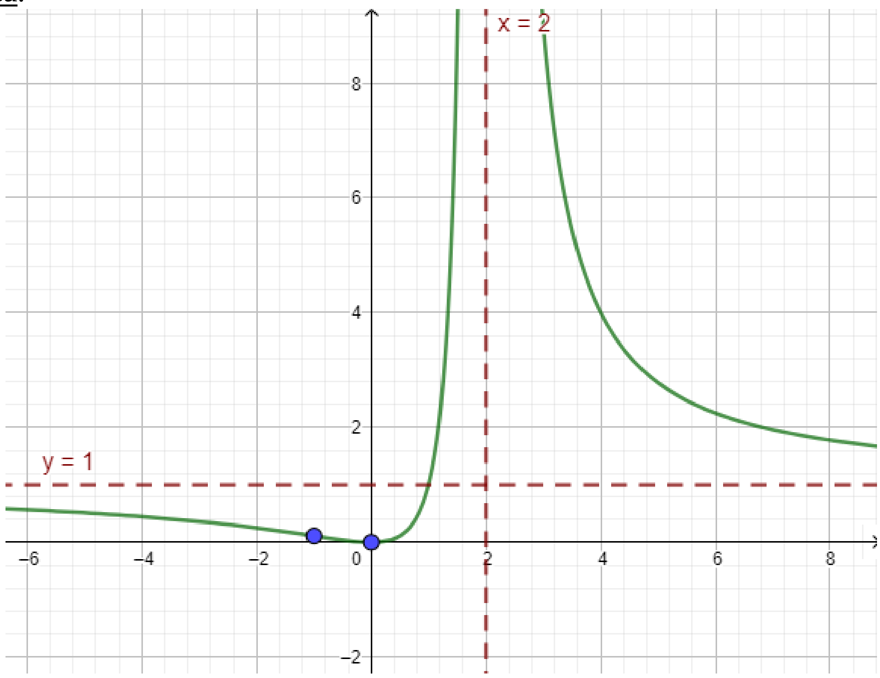
   Dividimos el dominio en intervalos por los puntos obtenidos, y vemos el signo de $f\,'$ en cada uno de ellos, tomando para ello un valor cualquiera del intervalo:

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f\,'$	–	0	+	∄	–
f	↘(decrec)	mín	↗(crec)	∄	↘(decrec)

   Como $f(0) = 0$, tiene un mínimo relativo en (0, 0).
6. Curvatura. Puntos de inflexión.
   - Discontinuidades de $f, f\,', f\,''$: $x = 2$.
   - $f\,''(x) = 0$: $\frac{8x+8}{(x-2)^4} = 0 \Rightarrow x = -1$, válida porque no anula el denominador.

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f\,'$	–	0	+	∄	+
f	∩ (cóncava)	P.I.	∪ (convexa)	∄	∪ (convexa)

   Como $f(-1) = 1/9$, tiene un punto de inflexión en (–1, 1/9).
7. Gráfica.



NOMBRE: ____

Instrucciones: **1)** Todos los **folios** deben tener el **nombre** y estar **numerados** en la parte superior. **2)** Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. **3)** No se puede usar **corrector ni lápiz**, y el bolígrafo debe ser de **tinta indeleble**. Se aconseja no usar borrador. **4)** Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar** la respuesta a una pregunta con las de otras. **5)** **Desatender las instrucciones puede penalizarse con la anulación del ejercicio o, incluso, de la prueba completa**.

1) Derivar y simplificar las siguientes funciones: *(2 puntos)*

a) $y = 3\sqrt[4]{8x^3}$ b) $y = \cos(5x^3 + 1)$ c) $y = e^x(2x^3 + 1)^2$ d) $y = \ln\left(\sqrt[5]{\dfrac{2x^3}{(3-2x)^3}}\right)$

2) Estudiar la continuidad en todo el dominio de la siguiente función, clasificando sus discontinuidades y hallando el valor de a para que sea continua en $x = 2$: *(2 ptos)*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2-9} & \text{si} \quad x \le 2 \\ 2x + a & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

3) Dada la función $f(x) = e^x\cos(x)$, calcular la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x = 0$. *(1 punto)*

4) Siendo $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, calcular a, b, c y d sabiendo que f tiene un extremo relativo en $(0, 1)$ y su gráfica un punto de inflexión en $(1, –1)$. *(1 punto)*

5) Realizar el estudio completo y la representación gráfica de $f(x) = \dfrac{x^3}{(x+1)^2}$, comprobando previamente que sus derivadas son $f'(x) = \dfrac{x^3+3x^2}{(x+1)^3}$ y $f''(x) = \dfrac{6x}{(x+1)^4}$.

Derivadas:	*0,4 puntos*
Dominio, Par/Impar, Int. Ejes:	*0,3 puntos*
Asíntotas:	*0,5 puntos*
Monotonía/Extr.relativos:	*0,9 puntos*
Curvatura/P.Inflexión:	*0,9 puntos*
Gráfica (tras estudio anterior):	*1 punto*

SOLUCIONES

1) Derivar y simplificar las siguientes funciones: *(2 puntos)*

a) $y = 3\sqrt[4]{8x^3}$ b) $y = \cos(5x^3 + 1)$ c) $y = e^x(2x^3+1)^2$ d) $y = \ln\left(\sqrt[5]{\dfrac{2x^3}{(3-2x)^3}}\right)$

a) $y = 3\sqrt[4]{8x^3}$

$$\boxed{y'=}\ 3\frac{24x^2}{4\sqrt[4]{(8x^3)^3}} = 3\frac{6x^2}{\sqrt[4]{8^3x^9}} = \frac{18x^2}{\sqrt[4]{(2^3)^3x^8x}} = \frac{18x^2}{x^2\sqrt[4]{2^9x}} = \frac{18}{\sqrt[4]{2^8 2x}} =$$

$$= \frac{18}{2^2\sqrt[4]{2x}} = \boxed{\frac{9}{2\sqrt[4]{2x}}}$$

b) $y = \cos(5x^3 + 1) \Rightarrow \boxed{y' = -15x^2\ \mathrm{sen}(5x^3+1)}$

c) $y = e^x(2x^3+1)^2$

$$y' = e^x(2x^3+1)^2 + e^x\,2(2x^3+1)\,6x^2 = e^x\,(2x^3+1)\,[(2x^3+1)+12x^2] =$$

$$= \boxed{e^x\,(2x^3+1)\,(2x^3+12x^2+1)}$$

d) $$y = \ln\left(\sqrt[5]{\frac{2x^3}{(3-2x)^3}}\right) = \frac{1}{5}\ln\frac{2x^3}{(3-2x)^3} = \frac{1}{5}\left[\ln 2x^3 - \ln(3-2x)^3\right] =$$

$$= \frac{1}{5}[\ln 2 + \ln x^3 - 3\ln(3-2x)] = \frac{1}{5}[\ln 2 + 3\ln x - 3\ln(3-2x)] \Rightarrow$$

$$y' = \frac{1}{5}\left(0 + \frac{3}{x} - 3\frac{-2}{3-2x}\right) = \boxed{\frac{1}{5}\left(\frac{3}{x} + \frac{6}{3-2x}\right)}$$

2) Estudiar la continuidad en todo el dominio de la siguiente función, clasificando sus discontinuidades y hallando el valor de a para que sea continua en $x = 2$: *(2 ptos)*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2-9} & \text{si} \quad x \le 2 \\ 2x + a & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

- $\underline{(-\infty,\ 2)}$: f está definida mediante la función $y = \dfrac{x-1}{x^2-9}$. Al ser ésta una función *racional*, es continua en su dominio, es decir, en todos los números reales salvo $x = -3$ y $x = 3$, que anulan el denominador. Como $x = 3$ no pertenece a $(-\infty, 2)$, lo ignoramos. Por todo ello, <u>f es continua en todo este intervalo salvo en $x = -3$</u>. Pasamos a estudiar éste punto:

  1) $\nexists f(-3)$

  2) $\displaystyle\lim_{x\to -3^-} \frac{x-1}{x^2-9} = \left(\frac{-4}{0^+}\right) = -\infty;\quad \lim_{x\to -3^+} \frac{x-1}{x^2-9} = \left(\frac{-4}{0^-}\right) = +\infty$

  De donde deducimos que tiene una <u>discontinuidad asintótica de salto infinito en $x = -3$</u>.

- $\underline{(2,\ +\infty)}$: f está definida por una función polinómica ($y = 2x + a$), y dichas funciones no presentan discontinuidades. Luego <u>es continua en todo este intervalo</u>.

- <u>$x = 2$</u>: 1) $\exists f(2) = \dfrac{1}{4-9} = -\dfrac{1}{5}$; 2) Para calcular $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, hemos de estudiar los límites laterales, porque la definición de f no coincide a izquierda y a derecha del punto que se estudia:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x-1}{x^2-9} = -\frac{1}{5}; \quad \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}(2x+a) = 4 + a$$

Para ser continua en $x = 2$, estos resultados deben coincidir (de lo contrario, tendría en dicho punto una *discontinuidad de salto finito*). Así:

$$4 + a = -\frac{1}{5} \Leftrightarrow 20 + 5a = -1 \Leftrightarrow 5a = -21 \Leftrightarrow a = -\frac{21}{5}$$

En definitiva, si $a = -\dfrac{21}{5}$, f es continua en $\mathbb{R} - \{-3\}$, con una discontinuidad asintótica de salto infinito en $x = -3$.

3) Dada la función $f(x) = e^x\cos(x)$, calcular la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x = 0$. *(1 punto)*

- <u>Punto de tangencia</u>. Como $f(0) = e^0 \cos(0) = 1\cdot 1 = 1$, es $\boxed{(0,\ 1)}$.
- <u>Pendiente de la recta tangente</u>. $f'(x) = e^x \cos(x) - e^x \operatorname{sen}(x) = e^x [\cos(x) - \operatorname{sen}(x)] \Rightarrow \boxed{m =} f'(0) = e^0 [\cos(0) - \operatorname{sen}(0)] = 1(1 - 0) = \boxed{1}$.
- <u>Ecuación de la recta tangente</u>. Usando la ecuación punto-pendiente, es:

$$y - 1 = 1(x - 0) \Leftrightarrow \boxed{y = x + 1}.$$

4) Siendo $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, calcular a, b, c y d sabiendo que f tiene un extremo relativo en $(0, 1)$ y su gráfica un punto de inflexión en $(1, -1)$. *(1 punto)*

Sabemos: $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \quad f''(x) = 6ax + 2b \quad f'''(x) = 6a$

- Para tener un <u>extremo relativo en $x = 0$</u>, basta exigir:
  1) $f'(0) = 0 \Leftrightarrow \boxed{c = 0}$.
  2) $f''(0) \neq 0$ (para que sea máximo o mínimo) $\Leftrightarrow 2b \neq 0 \Leftrightarrow \boxed{b \neq 0}$ (1) que nos queda pendiente de comprobación.
- Para que <u>pase por $(0, 1)$</u>, exigimos $f(0) = 1 \Leftrightarrow \boxed{d = 1}$.
- Para que tenga un <u>punto de inflexión en $x = 1$</u>, exigimos:
  1) $f''(1) = 0 \Leftrightarrow 6a + 2b = 0 \Leftrightarrow \boxed{3a + b = 0}$ (2)
  2) $f'''(1) \neq 0 \Leftrightarrow 6a \neq 0 \Leftrightarrow \boxed{a \neq 0}$ (3) que nos queda pendiente de comprobación.
- Para <u>pasar por $(1, -1)$</u>: $f(1) = -1 \Leftrightarrow a + b + 0 + 1 = -1 \Leftrightarrow \boxed{a + b = -2}$ (3)

Resolvemos el sistema formado por (2) y (3):

$$\left.\begin{aligned} 3a + b &= 0 \\ \underline{-a - b} &\underline{= 2} \end{aligned}\right\} \qquad \text{Sustituyendo en (2): } \boxed{b = -3}$$

$$2a \quad = 2 \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

Con estos valores, se verifican (1) y (3), por lo que <u>la solución es válida</u>. Esta solución es:

$$\boxed{a = 1,\ b = -3,\ c = 0,\ d = 1 \Rightarrow f(x) = x^3 - 3x^2 + 1}$$

5) Realizar el estudio completo y la representación gráfica de $f(x) = \dfrac{x^3}{(x+1)^2}$, comprobando

Derivadas:	*0,4 puntos*
Dominio, Par/Impar, Int. Ejes:	*0,3 puntos*
Asíntotas:	*0,5 puntos*
Monotonía/Extr.relativos:	*0,9 puntos*
Curvatura/P.Inflexión:	*0,9 puntos*
Gráfica (tras estudio anterior):	*1 punto*

previamente que sus derivadas son $f'(x) = \dfrac{x^3+3x^2}{(x+1)^3}$, $f''(x) = \dfrac{6x}{(x+1)^4}$.

Comenzamos por calcular sus derivadas:

$$\boxed{f'(x) =} \frac{3x^2(x+1)^2 - x^3 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{(x+1)[3x^2(x+1)-2x^3]}{(x+1)^4} = \frac{3x^3+3x^2-2x^3}{(x+1)^3} =$$

$$= \boxed{\frac{x^3+3x^2}{(x+1)^3}}$$

$$\boxed{f''(x) =} \frac{(3x^2+6x)(x+1)^3 - (x^3+3x^2)3(x+1)^2}{(x+1)^6} =$$

$$= \frac{(x+1)^2[(3x^2+6x)(x+1) - 3(x^3+3x^2)]}{(x+1)^6} = \frac{3x^3+3x^2+6x^2+6x-3x^3-9x^2}{(x+1)^4} =$$

$$= \boxed{\frac{6x}{(x+1)^4}}$$

1. Dominio: $\boxed{D(f) = \mathrm{R} - \{-1\}}$, pues $x = -1$ anula el denominador. Aquí es continua.

2. Par / Impar: $f(-x) = \dfrac{(-x)^3}{(-x+1)^2} = \dfrac{-x^3}{(-x+1)^2} \neq f(x), -f(x) \Rightarrow$ $\boxed{\text{Ni par, ni impar}}$.

3. Cortes con los ejes:
   - $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow \boxed{(0, 0)}$.
   - $y = 0 \Rightarrow \dfrac{x^3}{(x+1)^2} = 0 \Rightarrow x = 0$, válida porque no anula el denominador $\Rightarrow$ $\boxed{(0, 0)}$.

4. Asíntotas.
   - Verticales: $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3}{(x+1)^2} = \left(\dfrac{-1}{0}\right) = \infty \Rightarrow$ La recta de ecuación $\boxed{x = -1}$ es asíntota vertical.
   - Horizontales: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{(x+1)^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{x^2+2x+1} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} x = \infty$ $\Rightarrow$ $\boxed{\text{No tiene AH}}$.
   - Oblicuas: $m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\dfrac{x^3}{x^2+2x+1}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{x^3+2x^2+x} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) =$ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{x^3} = 1$

$$n = \lim_{x\to\infty}[f(x) - mx] = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+2x+1} - x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+2x+1} - \frac{x(x^2+2x+1)}{x^2+2x+1}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3-x^3-2x^2-x}{x^2+2x+1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-2x^2-x}{x^2+2x+1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{-2x^2}{x^2} = -2$$

Luego la recta $\boxed{y = x - 2}$ es asíntota oblicua.

5. Monotonía. Extremos relativos.
   - Discontinuidades de f: $x = -1$.
   - Discontinuidades de $f\,'$: $x = -1$.
   - $f\,'(x) = 0$: $\dfrac{x^3+3x^2}{(x+1)^3} = 0 \Rightarrow x^2(x+3) = 0 \Rightarrow x = 0$ ó $x = -3$.

   Dividimos el dominio en intervalos por los puntos anteriores, y vemos el signo de $f\,'$ en cada uno de ellos, tomando para ello un valor cualquiera del intervalo:

	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$f\,'$	+	0	–	∄	+	0	+
f	↗(crec)	máx	↘(decrec)	∄	↗(crec)	Tg horiz	↗(crec)

   Como $f(-3) = -27/4 \Rightarrow$ Máximo relativo en $(-3, -6.75)$.
   Com $f(0) = 0 \Rightarrow$ Tiene tangente horizontal en $(0, 0)$.

6. Curvatura. Puntos de Inflexión.
   - Discontinuidades de $f, f\,'$: $x = -1$.
   - Discontinuidades de $f\,''$: $x = -1$.
   - $f\,''(x) = 0$: $\dfrac{6x}{(x+1)^4} = 0 \Rightarrow x = 0$.

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(2, +\infty)$
$f\,''$	–	∄	–	0	+
f	∩ (cóncava)	∄	∩ (cóncava)	P.I.	∪ (convexa)

   Tiene un punto de inflexión en $(0, 0)$.

7. Gráfica.