ESTUDIO DE FUNCIONES A PARTIR DE DERIVADAS

1. Monotonía. Extremos relativos

La *monotonía* de una función se refiere a cuándo es *creciente* (es decir, las imágenes son cada vez mayores, a medida que aumentamos los valores de x) y cuando *decreciente*.

Definición: Una función se dice **monótona creciente** en un punto $x = a$ si existe un entorno de centro a y radio algún r donde a medida que lo recorremos hacia la derecha, las imágenes son mayores: si $x, x' \in E(a, r) / x < x' \Rightarrow f(x) \leq f(x')$ (si este $\leq$ es $<$ se dice **creciente estrictamente**). La definición de **monótona decreciente** es análoga cambiando $f(x) \leq f(x')$ por $f(x) \geq f(x')$. Y si esta desigualdad es estricta, será **decreciente estrictamente**. Y una función será monótona creciente o decreciente en un intervalo si lo es en cada uno de sus puntos.

Definición: Una función alcanza un **máximo relativo o local** en $x = a$ si es un punto donde la función es continua, está definida en algún entorno de centro a y radio r y, en dicho entorno, la imagen de a: $f(a)$ es la *mayor* de todas. Y si es la *menor* de todas, alcanzará un **mínimo relativo o local** en $x = a$. (Con esto, no pueden ser extremos relativos los puntos de discontinuidad, puntos aislados ni puntos donde comienza o termina el dominio).

Teorema: "a) Si $\forall x \in (a, b)$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ es creciente estrictamente en (a, b)
b) Si $\forall x \in (a, b)$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ es decreciente estrictamente en (a, b)
c) Si $f'(x) = 0 \Rightarrow f$ tiene tangente horizontal en $(x, f(x))$"

Como consecuencia, el estudio de la monotonía de una función f es como sigue:
Nos limitamos al Dom(f) (es absurdo estudiar puntos donde no existe la función). Por tanto, estamos excluyendo:

a) Los puntos de discontinuidad de f.

Tomamos también:

b) Los puntos de discontinuidad de f'.
c) Los puntos *críticos*, es decir, x tales que $f'(x)=0$.

Dividimos Dom(f) en intervalos mediante todos los puntos anteriores. Se puede demostrar que en cada uno de esos intervalos el signo de f' no cambia. Por tanto, según el teorema anterior, f es siempre creciente, o siempre decreciente, en cada uno de ellos. Pues bien; construimos una tabla donde las columnas serán dichos intervalos y los puntos que los separan. Añadimos una fila para los signos de f' y otra para la monotonía de f (ver ejemplo más adelante).
Como consecuencia del estudio de la monotonía, si en uno de los puntos anteriores, siempre que sea un punto donde f es continua y la función esté definida en todos los puntos de algún *entorno* suyo, si al atravesar dicho punto cambia la monotonía, habrá un *máximo* o un *mínimo relativo*.

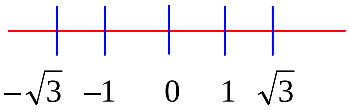
Veámoslo en el siguiente:

Ejemplo: Estudiar la monotonía de $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$

Solución: El dominio es R–{–1, 1}, ya que estos últimos valores anulan el denominador. Como $y' = \dfrac{3x^2(x^2-1) - x^3 2x}{(x^2-1)^2} = \dfrac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2}$, los puntos de discontinuidad de f' son los mismos que los de f (el denominador es anulado por los mismos valores de x), y los puntos críticos son las soluciones de $x^4-3x^2=0$ (siempre que dicha soluciones no sean –1 ni 1, que son puntos donde no existe f'). Sacando factor común en dicha ecuación:

$$x^2(x^2-3)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=0 \Leftrightarrow x=0 \ \text{ó:} \\ x^2-3=0 \Leftrightarrow x^2=3 \Leftrightarrow x=-\sqrt{3} \ \text{ó} \ x=\sqrt{3} \end{cases}$$

Los puntos obtenidos para dividir el dominio son, entonces: –1, 1 (que ya no eran del dominio), $-\sqrt{3}$, 0 y $\sqrt{3}$. Por tanto:



	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3},-1)$	–1	(–1,0)	0	(0,1)	1	$(1,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},+\infty)$
f'	+	0	–	∄	–	0	–	∄	–	0	+
f	↗	Máx	↘	∄	↘	tg horz	↘	∄	↘	mín	↗

donde los signos se han obtenido dando un valor cualquiera a f' dentro del intervalo. Por ejemplo, para $(-\infty,-\sqrt{3})$, tomamos $x=-2$: $f'(-2)=\frac{(-2)^4-3(2)^2}{+}=\frac{16-12}{+}=+$ (no calculamos el resultado, sino sólo el signo; en el denominador ni siquiera nos hemos detenido porque, al ser un cuadrado, es positivo siempre).

En los puntos que separan los intervalos, si son puntos de continuidad de f y la función está definida en sus proximidades, tanto a izquierda como a derecha, observamos la monotonía de f a la izquierda y a la derecha. Si hay cambio, tendremos un *máximo* o un *mínimo relativo* en dicho punto. En el ejemplo, hemos encontrado un *máximo relativo* en $x=-\sqrt{3}$ y un *mínimo relativo* en $x=\sqrt{3}$. Hallamos las coordenadas de dichos puntos, por los que pasa la gráfica:

Como $f(-\sqrt{3})=-\frac{3\sqrt{3}}{2}$, <u>las coordenadas del máximo relativo son</u> $(-\sqrt{3},-\frac{3\sqrt{3}}{2})$. Análogamente, <u>en</u> $(\sqrt{3},\frac{3\sqrt{3}}{2})$ <u>hay un mínimo relativo</u>, según los resultados de la tabla (Para dibujar la función, es conveniente redondear los resultados anteriores a, por ejemplo, centésimas).

Por último, si al atravesar uno de esos puntos (donde f sea continua) no cambia la monotonía, no hemos podido probar qué sucede en él basándonos en el teorema que dimos al principio. Esto sucede en $x=0$. Serán *puntos de inflexión*, pero lo probaremos estudiando la curvatura. Además, es importante tener en cuenta que en dichos puntos <u>la tangente es horizontal</u>, lo que habrá de tenerse presente cuando se dibuje la gráfica.

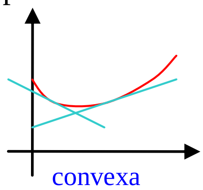
<u>Teorema</u>: "Si $f'(x)=0$ y $f''(x)<0 \Rightarrow$ la función tiene en $(x, f(x))$ un máximo relativo. Análogamente, si $f'(x)=0$ y $f''(x)>0 \Rightarrow$ la función tiene en $(x, f(x))$ un mínimo relativo."

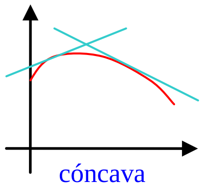
Este teorema permite comprobar la existencia de extremos relativos sin estudiar toda la monotonía, en funciones derivables, al menos, hasta la derivada segunda.

2. Curvatura. Puntos de inflexión

<u>Definición:</u> Una función se dice <u>convexa</u> en un intervalo si en dicho intervalo las tangentes a la gráfica quedan por debajo de la misma. En caso contrario se dice <u>cóncava</u>. Si en un punto cambia la curvatura, es decir, a la izquierda del mismo la función es cónca-

va y a la derecha, convexa, o al revés, dicho punto es un punto de inflexión, siempre que la función esté definida en todos los puntos de algún entorno del punto de inflexión y sea continua en dicho punto.


convexa


cóncava

Hay que tener en cuenta que algunos libros usan la denominación a la inversa que nosotros, es decir, llaman convexas a las que nosotros denominamos cóncavas y recíprocamente. Suelen ser libros muy antiguos. Además, hay toda una teoría de Programación Lineal, denominada *funciones convexas*, donde la definición de las mismas es la que nosotros damos.

Teorema: "a) Si $\forall x\in(a, b)$, $f''(x)>0 \Rightarrow f$ es convexa en (a, b)
b) Si $\forall x\in(a, b)$, $f''(x)<0 \Rightarrow f$ es cóncava en (a, b)"

Como consecuencia, el estudio de la curvatura de una función f es muy similar al de la monotonía: Dividimos Dom(f) (es decir, excluimos los puntos de discontinuidad de f) en intervalos mediante:

a) Los puntos de discontinuidad de f y de f'.
b) Los puntos de discontinuidad de f''.
c) Los puntos que anulan a f''.

En cada intervalo resultante, el signo de f'' se mantiene invariado, por lo que con un cuadro similar al de la monotonía tenemos la curvatura de la función. Los puntos donde cambia la curvatura, siempre que sean puntos donde f es continua y la función esté definida en un *entorno* suyo, son los puntos de inflexión.

Ejemplo: Estudiar la curvatura de $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$

Solución: Usamos resultados calculados antes. Entonces:

$$y''=\frac{(4x^3-6x)(x^2-1)^2-(x^4-3x^2)2(x^2-1)2x}{(x^2-1)^4}=$$

$$=\frac{(x^2-1)\left[(4x^3-6x)(x^2-1)-(x^4-3x^2)2\cdot 2x\right]}{(x^2-1)^4}=\frac{4x^5-4x^3-6x^3+6x-4x^5+12x^3}{(x^2-1)^3}=\frac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3}$$

Los puntos de discontinuidad vuelven a ser –1 y 1. Y se anula si:

$$2x^3+6x=0 \Leftrightarrow x(2x^2+6)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0, \text{ ó} \\ 2x^2+6=0 \Leftrightarrow x^2=-3 \text{ sin solución} \end{cases}$$

Luego el cuadro resultante es:

	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
f''	–	∄	+	0	–	∄	+
f	∩	∄	∪	P.I.	∩	∄	∪

Como $f(0)=0$, en (0, 0) la función tiene un punto de inflexión. No ocurre así ni en –1 ni en 1 porque, en ellos, no existe f. ∎

Teorema: "Si $f''(x)=0$ y $f'''(x)\neq 0 \Rightarrow$ la función tiene en $(x, f(x))$ un punto de inflexión."

Este teorema permite calcular puntos de inflexión sin hacer el estudio de la curvatura en funciones derivables hasta f'''.