INTRODUCCIÓN A LAS FUNCIONES
CONCEPTOS BÁSICOS. DOMINIOS. RECTAS. PARÁBOLAS. INTERSECCIONES CON LOS EJES, MONOTONÍA. CURVATURA.

1. CONCEPTO DE FUNCIÓN. DEFINICIONES BÁSICAS.

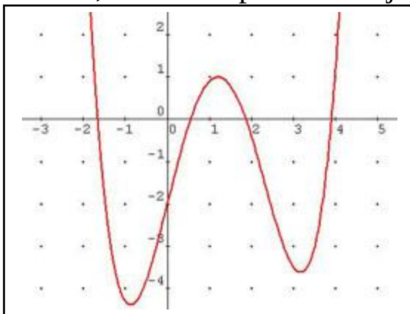
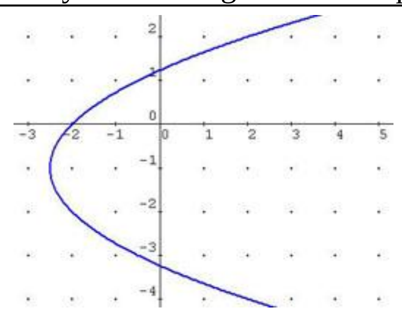
Función es una relación entre dos magnitudes, normalmente definida por una ecuación del tipo $y = f(x)$, donde $f(x)$ es una fórmula en la que interviene x.
Ejemplo: $y = 3x - 1$. La fórmula es $f(x) = 3x - 1$.

No necesariamente hemos de conocer la fórmula que relaciona y con x. Cuando conocemos dicha fórmula $y = f(x)$, la utilizamos dando valores a x, y recogiendo en y el resultado de aplicarles la fórmula. Por ejemplo, en la función anterior $y = f(2) = 3\cdot 2 - 1 = 5$.

Si un determinado valor de x (por ejemplo, $x = a$, siendo a un número fijo conocido), al sustituirlo en la fórmula de la función da como resultado un determinado valor de y (por ejemplo $y = b$), o sea, si $f(a) = b$, se dice que b es la **imagen** o **transformado** de a. Y también que a es el **original** que se transforma en b. En el ejemplo anterior, 5 es la imagen de 2.

Si a se transforma en b, el punto (a, b) pertenece a la **gráfica** de la función. En el ejemplo anterior, la función pasa por (2, 5). Observar que siempre va primero el valor de x y luego el de y. La gráfica de la función es el conjunto de los, por lo general, infinitos puntos obtenidos de esa forma y llevados a un sistema de referencia.

Un valor de x no puede producir más de un resultado para y. Dicho de otro modo, *cada original no puede tener más de una imagen*. En caso contrario, no se trata de una función, si bien se puede trabajar con su fórmula y obtener la gráfica correspondiente.

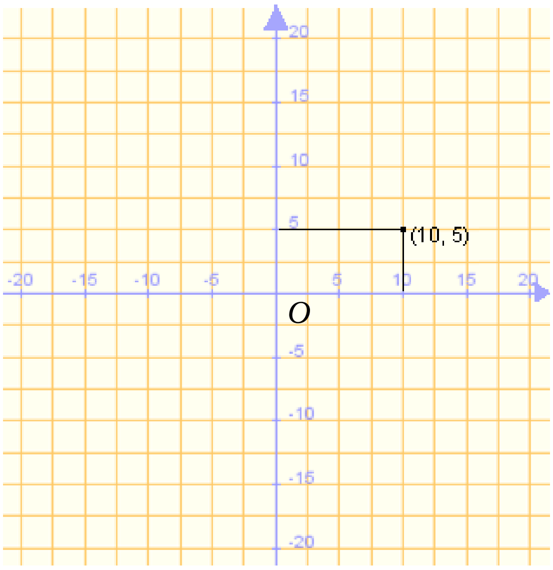
	
Esto es la gráfica de una función. En la vertical de cada valor de x nos encontramos con la gráfica una sola vez.	Esto no es función. Por ejemplo, $x = 0$ tiene dos imágenes: $y = 1{,}2$ e $y = -3{,}2$. Hay valores de x que se encuentran con la gráfica dos veces en su vertical.

A las letras que representan cada una de las dos magnitudes que la función relaciona se las llama:

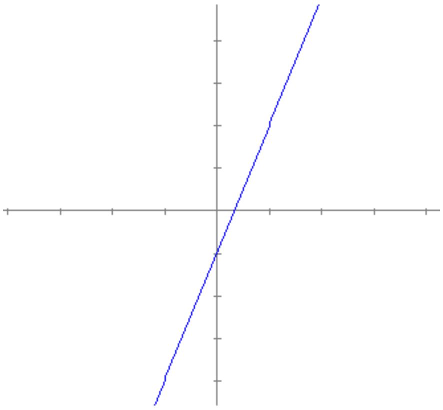
- x: ***variable independiente***. A ella se le dan valores más o menos arbitrariamente.
- y: ***variable dependiente***. Los valores que toma dependen de los que hayamos dado a x.

Representación gráfica.
Se hace en un **sistema de *ejes cartesianos***:

- Cada uno de los dos ejes es la *recta real*.
- El eje horizontal se llama ***eje de abscisas***, *eje de las x*, *eje OX*.
- El eje vertical se llama ***eje de ordenadas***, *eje de las y*, *eje OY*.
- Cada punto del plano corresponde a un valor de x junto con uno de y (el de x siempre va en primer lugar), y se asocia a dicho par de números, encerrados en un paréntesis y separados por una coma: (x, y). A dicho par se le llama ***coordenadas del punto***.



- El punto de corte de los dos ejes se llama ***origen de coordenadas***, y se suele designar con la letra O. Sus coordenadas son (0, 0).
- La gráfica de la función es la línea que aparece al dibujar los, por lo general, infinitos pares de puntos (x, y) resultantes de dar un valor a x, sustituirlo en la fórmula de la función $y = f(x)$ y recoger el correspondiente valor de y.
- Si no hay otro método para obtener la gráfica, se crea una ***tabla de valores***, se llevan al gráfico y, con ellos, se intenta averiguar la forma de la gráfica de la función. Por ejemplo, para $y = 3x - 1$:



x	y
–2	–7
–1	–4
0	–1
1	2
1,5	3,5
2	5

2. DOMINIO

Dominio de una función es el conjunto de valores que puede tomar x, para los cuales es posible calcular la imagen. Se representa por D(f) o Dom(f). Esta definición tiene sentido en cuanto que hay operaciones que no se pueden realizar, no porque sean complicadas, sino porque no están definidas. Por tanto, para calcularlo, se tiene en cuenta:

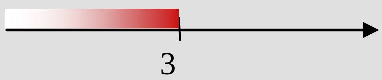
- No se puede dividir entre 0. Los valores que anulen el denominador no tienen imagen, por lo que hay que excluirlos del dominio.
- Las raíces de índice par sólo pueden calcularse si el radicando es mayor o igual que cero.
- Los logaritmos de números negativos o de cero no existen. Luego si en la función aparece un logaritmo, su argumento debe ser mayor estrictamente que cero.
- Entre las funciones trigonométricas básicas (*sen*, *cos*, *tg*, *arcsen*, *arccos*, *arctg*), hay que tener en cuenta que:
  - La tangente de ángulos de la forma $\pi/2 + k\pi$, siendo $k \in \mathbb{Z}$, no existen.
  - *arcsen* y *arccos* sólo pueden calcularse si sus argumentos están en el intervalo $[-1, 1]$.
- El resto de funciones habituales puede calcularse para cualquier valor de x.

Ejemplos

1) El dominio de $y = \dfrac{3x+2}{x-4}$ lo constituyen todos los números reales salvo los que anulen el denominador, porque no se puede dividir entre 0. Como $x - 4 = 0 \iff x = 4$, el dominio son todos los números reales salvo el 4. Como $\mathbb{R}$ era el símbolo empleado para el conjunto de los números reales, la forma correcta de escribir este resultado es: $\mathbb{R} - \{4\}$. Otra forma correcta de escribir esto mismo es como *unión* de dos intervalos, de forma que comprendan a todos los números reales salvo al 4: $(-\infty, 4) \cup (4, +\infty)$. Es decir, que si llamamos f a la función anterior:

$$\boxed{D(f) = \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{4\} = (-\infty, 4) \cup (4, +\infty)}$$

2) El dominio de $y = \sqrt{3-x}$ lo forman todos los números reales tales que $3 - x \geq 0$, puesto que para que exista una raíz cuadrada, el radicando debe ser mayor o igual que cero. La expresión anterior es una inecuación. La resolvemos: $3 - x \geq 0 \Rightarrow 3 \geq x \Rightarrow$ Leído de derecha a izquierda es lo mismo que: $x \leq 3$. Los valores de x que cumplen esta condición son el dominio. Por tanto:

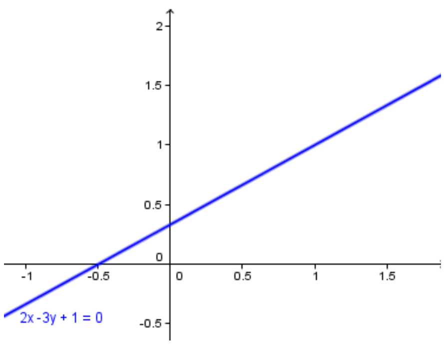


$$\boxed{D(f) = (-\infty, 3]}$$

Recorrido o *Conjunto Imagen* es el conjunto de valores que puede tomar y, que son resultados de sustituir algún x en la fórmula de la función. No suele ser muy útil su cálculo. Se representa por $I(f)$, $Im(f)$ ó $Rec(f)$.

3. RECTAS

Las funciones polinómicas de primer grado tienen como gráfica una *recta*. Veamos sus características principales.



- **Ecuación *general* o *implícita***: $Ax + By + C = 0$.
  Ejemplo: $2x - 3y + 1 = 0$. Para dibujar su gráfica, haríamos una tabla de valores. Como sabemos que es una recta, con dos puntos suficientemente alejados el uno del otro tenemos suficiente. A veces basta con hallar donde corta a los ejes:
  - Si $x = 0 \Rightarrow -3y + 1 = 0 \Rightarrow 1 = 3y \Rightarrow y = 1/3$. Luego $(0, 1/3)$ es un punto de la recta.

  - Si $y = 0 \Rightarrow 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1/2$. Pasa, pues, por $(-1/2, 0)$.

  Con ello, tenemos su gráfica.

- **Ecuación *explícita***: $y = \text{m}x + \text{n}$

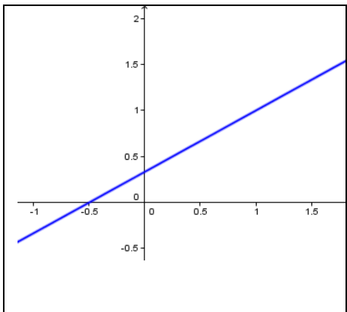
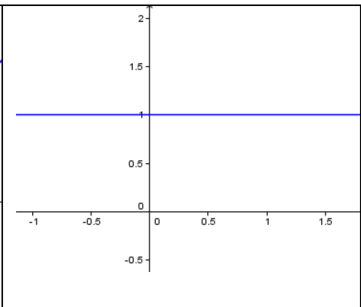
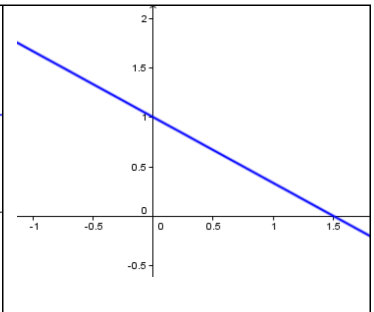
  Ejemplo: $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}$. Para trazar su gráfica, lo tenemos más fácil que en la forma *general*, porque dando valores a x nos salen los de y sin despejar.
  Es fácil pasar, despejando, de forma *general* a *explícita* o al revés. En este ejemplo:

  $$y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{2x}{3} + \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{2x+1}{3} \Rightarrow 3y = 2x + 1 \Rightarrow$$
  $$\Rightarrow 2x - 3y + 1 = 0$$

  que es la misma recta que dibujamos antes. Y al revés:

  $$2x - 3y + 1 = 0 \Rightarrow 3y = 2x + 1 \Rightarrow y = \frac{2x+1}{3} \Rightarrow y = \frac{2x}{3} + \frac{1}{2} \Rightarrow$$
  $$\Rightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}$$

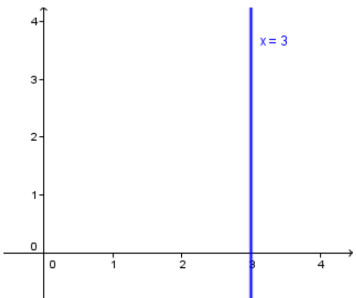
  En una ecuación *explícita* al parámetro m se le llama ***pendiente*** de la recta, y a n ***ordenada en el origen***. En el ejemplo $m = 2/3$ y $n = 1/2$. La *pendiente* de una recta nos informa de su inclinación:

		
Pendiente positiva: creciente Cuanto más positiva, más vertical.	Pendiente cero: horizontal	Pendiente negativa: decreciente Cuanto más negativa, más vertical.

  Muy importante: **Dos rectas son paralelas si, y sólo si tienen la misma pendiente**.
  La *ordenada en el origen* es el valor de y donde la recta corta al eje OY.

- **Rectas horizontales**: Son de la forma $y = n$ (n es un número fijo).
  Observar que son un caso particular de la ecuación *explícita* cuando $m = 0$.
  Ejemplo: $y = 1$, dibujada en el cuadro anterior. Para trazarla, podemos construir una tabla de valores y observaremos que para cualquier valor de x que elijamos la y siempre resulta 1.
  El eje OX es una recta horizontal. Su ecuación es $y = 0$.

- **Rectas verticales**: Son de la forma $x = n$ (n es un número fijo).
  Una ecuación *explícita* no representa, nunca, una recta vertical. Pero la *general* si da rectas verticales si hacemos B = 0.
  Ejemplo: $x = 3$, en el gráfico. Observar que esto *no es una función*, porque el valor $x = 3$ tiene infinitas imáge-



nes, y en una función un valor de x tiene, como máximo, una imagen. Entonces, no funciona de la forma habitual: si queremos una tabla de valores no la obtendremos, en este caso, dando valores a x. Veremos que cualquiera que sea el valor de y que elijamos, se emparejará con $x = 3$.

- **Ecuación *punto-pendiente***: $y - y_0 = m(x - x_0)$

  Esta fórmula nos resultará útil cuando queramos hallar la ecuación de una recta conociendo un punto de la misma, de coordenadas (x_0, y_0) y su pendiente m.

  Ejemplo: Hallar la ecuación de la recta paralela a $y = 2x + 5$ que pasa por el punto (–4, –5).
  Solución: Como la recta que nos piden es paralela a la dada, debe tener su misma pendiente: $m = 2$. Conociendo ésta y un punto, que nos dan en el enunciado, usando la ecuación punto-pendiente obtenemos su ecuación:
  $$y - (-5) = 2(x - (-4)) \Rightarrow y + 5 = 2(x + 4) \Rightarrow y = 2x + 8 - 5 \Rightarrow \boxed{y = 2x + 3}$$
  Si sustituimos $x = -4$ veremos que obtenemos $y = -5$.

- **Ecuación continua**: $\dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \dfrac{y - y_0}{y_1 - y_0}$

  Con esta fórmula podemos averiguar la ecuación de una recta si conocemos dos puntos de la misma, de coordenadas (x_0, y_0) y (x_1, y_1). Da igual a cuál de los dos llamemos de una u otra forma.

  Ejemplo: Hallar la ecuación de la recta que pasa por (1, –3) y (–2, 5).
  $$\frac{x-1}{-2-1} = \frac{y-(-3)}{5-(-3)} \Rightarrow \frac{x-1}{-3} = \frac{y+3}{8} \Rightarrow 8x - 8 = -3y - 9 \Rightarrow$$
  $$\Rightarrow 3y = -8x + 8 - 9 \Rightarrow \boxed{y = -\frac{8}{3}x - \frac{1}{3}}$$
  Es buena idea comprobar que los puntos dados verifican la ecuación obtenida.

4. INTERSECCIÓN DE DOS FUNCIONES

Los puntos de corte de dos funciones son puntos comunes a ambas gráficas. Por tanto, sus coordenadas verifican la ecuación de una y de otra función.
Si construimos un sistema de ecuaciones con las fórmulas de las dos funciones, su solución serán valores (x, y) que verifican ambas ecuaciones. Es decir, lo mismo que antes y, por tanto, las intersecciones de las gráficas.
Por tanto, *las soluciones del sistema de ecuaciones formado por ambas fórmulas nos dará los puntos de intersección de las funciones respectivas, si es que tienen*. Todo sistema de ecuaciones puede interpretarse, entonces, como la búsqueda de los puntos en común de las ecuaciones que lo integran, consideradas como ecuaciones de funciones.

Ejemplo: Hallar las intersecciones de $y = x$ con $y = x^3$.
Formamos un sistema con ambas ecuaciones y lo resolvemos por igualación:
$$x^3 - x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ó} \\ x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$
porque un producto vale 0 si, y sólo si alguno de los factores se anula.

- Si $x = 0 \Rightarrow y = 0$: (0, 0) es uno de los puntos de corte.
- Si $x = -1 \Rightarrow y = -1$: (–1, –1) es otro.
- Si $x = 1 \Rightarrow y = 1$: (1, 1) es el último.

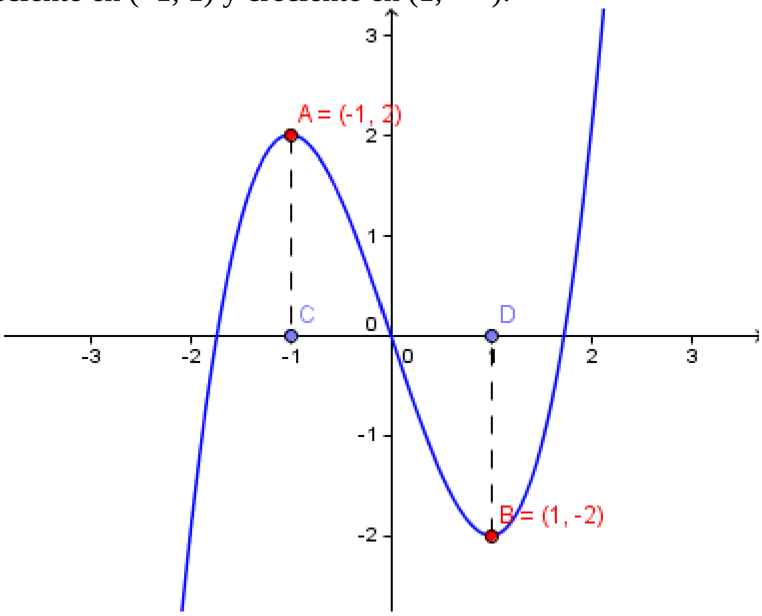
5. INTERSECCIONES DE UNA FUNCIÓN CON LOS EJES DE COORDENADAS

- Para calcular el punto donde una función corta al eje OY (recta vertical de ecuación $x = 0$), si lo hay, se sustituye $x = 0$ en la fórmula de la función y se calcula la y correspondiente (estamos resolviendo el sistema formado por la fórmula de la función y por la ecuación del eje OY).
- Para calcular el (o los) punto(s) donde una función corta al eje OX (recta horizontal de ecuación $y = 0$), si los hay, se resuelve la ecuación $f(x) = 0$. Los valores de x resultantes, junto con $y = 0$, son las coordenadas de dichos puntos de corte (estamos resolviendo el sistema formado por la fórmula de la función y por la ecuación del eje OX).

3) Ejemplo. Calcular los cortes con los ejes de: $y = x^2 - 5x + 6$.
- Corte con OY: $x = 0 \Rightarrow y = 6$: El punto es (0, 6).
- Cortes con OX: $x^2 - 5x + 6 = 0$, que resolviendo dicha ecuación de segundo grado resulta $x = 2$ ó $x = 3$. Luego hay dos puntos de corte: (2, 0) y (3, 0).

6. MONOTONÍA. MÁXIMOS Y MÍNIMOS RELATIVOS

Una función se dice **monótona creciente** en un intervalo si, en dicho intervalo, al aumentar la *variable independiente* la función se incrementa, es decir, la *variable dependiente* crece, igualmente. Su gráfica es ascendente, recorriéndola de izquierda a derecha.
Del mismo modo, diremos que f es **monótona decreciente** en un intervalo si, en el mismo, al aumentar la variable independiente la función disminuye. Su gráfica es descendente si la recorremos de izquierda a derecha.
Lo habitual es que una misma función sea creciente en unos intervalos y decrecientes en otros. Por ejemplo, la función del gráfico, cuya ecuación es $y = x^3 - 3x$, es creciente en $(-\infty, -1)$, decreciente en $(-1, 1)$ y creciente en $(1, +\infty)$:

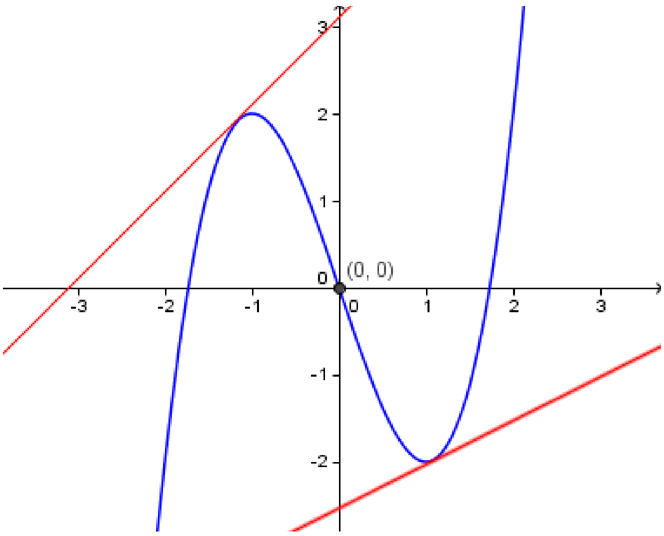


f tiene un **máximo relativo** en un punto *a* de la variable independiente, si $f(a)$ es superior a $f(x)$ para cualquier valor de x que esté alrededor del punto a. Es decir, en un algún *entorno* de centro a y radio $r > 0$.
Del mismo modo, diremos que f tiene un **mínimo relativo** en un punto a, si $f(a)$ es inferior a $f(x)$ para cualquier valor de x que esté en cierto *entorno* del punto a.

En el gráfico anterior, la función tiene un máximo relativo en $x = -1$, cuyas coordenadas son: $A(-1, 2)$. Igualmente, presenta un mínimo relativo en $x = 1$, de coordenadas $B(1, -2)$.
El cálculo de las zonas donde una función es creciente o decreciente, así como de los extremos relativos (máximos y mínimos relativos), se hará usando su función derivada.

7. CURVATURA: CONVEXIDAD Y CONCAVIDAD

Una función se dice **convexa** en un intervalo si en cualquiera de sus puntos la tangente a la gráfica queda bajo la curva. Esto se traduce en que la *forma* de la gráfica se parece a una figura "sonriente".
De igual forma, la función es **cóncava** en un intervalo si la tangente queda sobre la curva. La gráfica parecería "triste".
Por ejemplo, la función del gráfico anterior, que volvemos a reproducir en el siguiente, es convexa en $(0, +\infty)$ y cóncava en $(-\infty, 0)$.
Los puntos en los que la función cambia de cóncava a convexa, o al revés, se llaman **puntos de inflexión**. Nuestra función tiene un punto de inflexión en $x = 0$, de coordenadas $(0, 0)$.
En muchos textos, sobre todos antiguos, las definiciones son al revés de como nosotros las hemos dado: llaman convexas a las cóncavas y al revés. Nuestra definición es la que parece adoptarse internacionalmente.



8. PARÁBOLAS

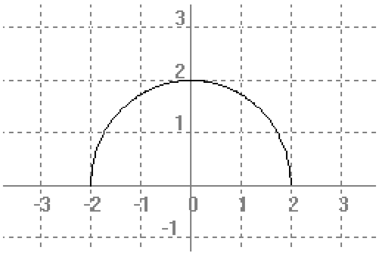
Las funciones polinómicas de segundo grado: $y = ax^2 + bx + c$ tienen como gráfica una parábola. Para trazarla, seguimos los siguientes pasos:

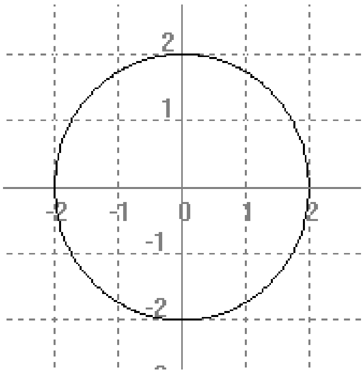
- Si $a > 0 \Rightarrow$ es convexa. Si $a < 0 \Rightarrow$ es cóncava.
- El **eje** es una *recta vertical* de ecuación $x = \dfrac{-b}{2a}$. Divide a la parábola en dos mitades simétricas.
- El **vértice** es el punto extremo relativo de la parábola. Sus coordenadas se obtienen sustituyendo el valor de x que proporciona el *eje* en la fórmula de la función.
- Se hallan las intersecciones con los ejes OX y OY, si las hay.
- Se completa con una tabla de valores elegidos convenientemente (alrededor del *eje*).

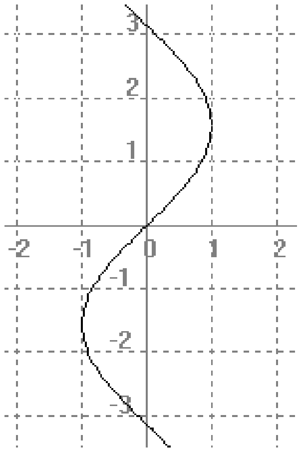
Más adelante hay un ejemplo, entre los *ejercicios resueltos* (el 3).

9. EJERCICIOS RESUELTOS

1) A la vista de las gráficas, señalar cuáles corresponden a funciones, y cuáles no. De las que sean funciones, decir su dominio y recorrido.

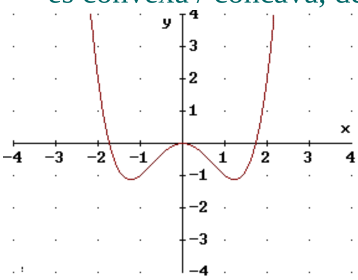




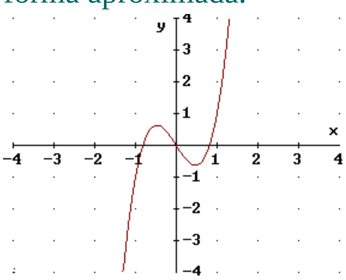


La primera corresponde a una función ($y = \sqrt{4 - x^2}$), porque en la vertical de ningún valor de x nos encontramos con la gráfica más de una vez, lo cual quiere decir que cada original tiene como máximo una imagen. Hay valores de x que no tienen imagen, pero eso lo único que significa es que no están en el dominio de la función. Su dominio es D(f) = [–2, 2], que son los valores de x que tienen imagen. Su recorrido es I(f) = [0, 2], que son los valores de y que son imagen de algún x.
La segunda no es una función, puesto que hay valores de x que tienen más de una imagen. Por ejemplo, si trazamos una vertical en $x = 1$, nos encontramos dos veces con la gráfica, lo que significa que dicho valor de x tendría dos imágenes, y eso no está permitido. Sin embargo, la gráfica corresponde a una fórmula: $x^2 + y^2 = 4$. Pero no es función.
La tercera tampoco lo es, porque, por ejemplo $x = 0$ tendría tres imágenes (al menos): 0, π y –π.

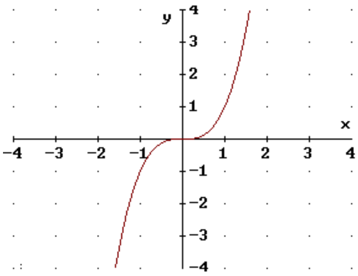
2) A la vista de las gráficas siguientes, decir los, dominios, intervalos de crecimiento / decrecimiento de las funciones y sus máximos y mínimos relativos y señalar dónde es convexa / cóncava, de forma aproximada.



$$y = \frac{x^4 - 3x^2}{2}$$



$y = 3x^3 - 2x$



$y = x^3$

$y = \dfrac{x^4 - 3x^2}{2}$ Su dominio es R, y su recorrido, [–1.115, +∞).

Es creciente en (–1.225, 0) ∪(1.225, +∞). Es decreciente en (–∞, –1.225)∪(0, 1.225). Tiene un máximo relativo en (0, 0) y mínimos relativos en (–1.225, –1.115) y en (1.225, –1.115).
Es convexa en (–∞, $-\sqrt{2}/2$) y en ($\sqrt{2}/2$, +∞). Es cóncava en ($-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2$). Tiene puntos de inflexión en $x = -\sqrt{2}/2$ y en $x = \sqrt{2}/2$.

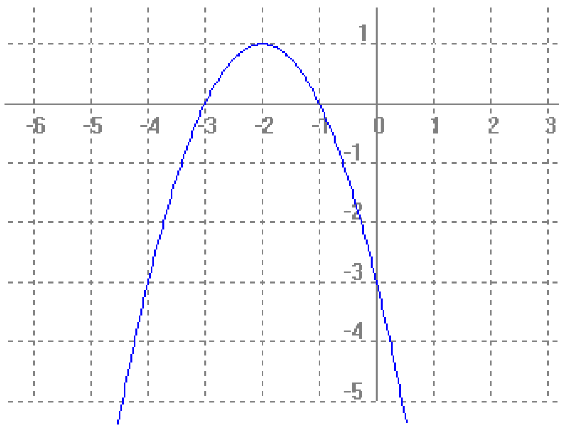
$y = 3x^3 - 2x$ Su dominio es R, y su recorrido también es R.
Es creciente en (–∞, –0.475)∪(0.475, +∞). Es decreciente (–0.475, 0.475). (Estos son intervalos abiertos). Tiene un máximo relativo en (–0.475, 0.63) y un mínimo en (0.475, –0.63) (Estos son coordenadas de puntos).
Es cóncava en (–∞, 0) y convexa en (0, +∞).

$y = x^3$ Su dominio es R y su recorrido, también es R.
Es creciente en todo R. No tiene máximos ni mínimos relativos.
Es cóncava en (–∞, 0) y convexa en (0, +∞).

3) Trazar la gráfica de $y = -x^2 - 4x - 3$

Se trata de una parábola, pues su ecuación es de la forma $y = ax^2 + bx + c$.

- Como el coeficiente de x^2 es negativo ($a = -1$), la parábola se abre hacia abajo, con un máximo relativo.
- Su eje es $x = \frac{-b}{2a}$. Es decir, $x = \frac{4}{-2}$ $\Rightarrow$ $\boxed{x = -2}$. Observar que el eje *no es "– 2"*, sino $x=-2$, porque "– 2" a secas no es una recta vertical.
- Su vértice, sustituyendo $x = -2$ en la ecuación, obtenemos $y = 1$. Luego es el punto $\boxed{(-2, 1)}$.
- Las intersecciones con los ejes de coordenadas son:
    - $x=0 \Rightarrow y=-3 \Rightarrow \boxed{(0, -3)}$.
    - $y = 0 \Rightarrow 0 = -x^2 - 4x - 3$. Resolvemos la ecuación de segundo grado. Para ello, siempre es más cómodo que el coeficiente de x^2 no sea negativo. Multiplicando ambos miembros de la ecuación por – 1, queda así: $x^2 + 4x + 3 = 0$



$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{2} =$$

$$= \frac{-4 \pm 2}{2} = \left\langle \begin{array}{l} = \frac{-4-2}{2} = -3 \\ \frac{-4+2}{2} = -1 \end{array} \right.$$

$\Rightarrow$ Corta en $\boxed{(-3, 0) \text{ y } (-1, 0)}$. (Recordar que los valores de x obtenidos partían de obligar a que $y = 0$).

Completamos con una pequeña tabla de valores y obtenemos la gráfica de la ilustración adjunta.

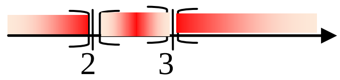
4) Hallar el dominio de $y = -x^2 - 4x - 3$

Es R. Cuando una función es polinómica, su dominio siempre es R, porque las operaciones que intervienen siempre se pueden efectuar: sumas, restas, productos, potencias de exponentes números naturales (otra cuestión es que sea más fácil o difícil hacerlo).

5) Hallar el dominio de $y = \dfrac{7x-3}{x^2-5x+6}$

Observando la expresión de la función que nos dan, encontramos una división. Y como no se puede dividir entre 0, hemos de excluir del dominio aquellos valores de x que provoquen tal circunstancia. Son la solución de la ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$, a saber:

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \left\langle \begin{array}{l} = \dfrac{5-1}{2} = 2 \\ = \dfrac{5+1}{2} = 3 \end{array} \right.$$

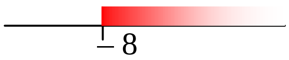


Por tanto, $\boxed{D(f) = R - \{2, 3\} = (-\infty, 2)\cup(2, 3)\cup(3, +\infty)}$.

6) Hallar el dominio de $y = \sqrt{x+8}$

Para que exista la raíz cuadrada, el radicando debe ser mayor o igual que cero. Por tanto, los valores de x que pertenecen al dominio de esta función son los que verifican que $x + 8 \geq 0$. Esto es una inecuación. Recordar que las inecuaciones polinómicas de primer grado se resuelven despejando igual que en las ecuaciones, teniendo en cuenta que si pasamos *multiplicando* o *dividiendo* un número *negativo* de un miembro a otro, la desigualdad cambia de sentido, y que lo mismo ocurre si multiplicamos o dividimos los dos miembros de la inecuación por un mismo número *negativo*. Y que las soluciones de una inecuación son conjuntos de números (intervalos o uniones de intervalos). Así:

$$x + 8 \geq 0 \;\Rightarrow\; x \geq -8 \;\Rightarrow\; x \in [-8, +\infty) \;\Rightarrow\; \boxed{D(f) = [-8, +\infty)}.$$



7) Hallar el dominio de $y = \sqrt{-x^2 - 4x - 3}$

Como la raíz cuadrada de números negativos no existe (sí existe la raíz de cero, que es también cero), para que x esté en el dominio de esta función, el radicando debe ser mayor o igual que cero. Luego los x del dominio son aquellos que verifican que $-x^2 - 4x - 3 \geq 0$.

Una forma de resolver una inecuación polinómica de segundo grado es la que vamos a aplicar. En primer lugar, utilizamos una variable auxiliar y. Llamamos $y = -x^2 - 4x - 3$. Entonces, la solución de la inecuación $-x^2 - 4x - 3 \geq 0$ son los valores de x que hacen que $y \geq 0$.

La relación entre x e y la describe la función $y = -x^2 - 4x - 3$, que es una parábola que fue dibujada en un ejercicio anterior. Nos vamos a su gráfica y observamos qué valores de x hacen que y sea mayor o igual que cero. Deducimos que son los correspondientes a la zona de la gráfica que está por encima del eje *OX*, incluyendo los puntos de corte de dicha gráfica con el eje *OX*, porque también son válidos los valores de x que hacen que $y = 0$. Y son aquellos que están en el intervalo $[-3, -1]$. Por tanto, $\boxed{D(f) = [-3, -1]}$.