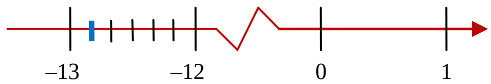
NOMBRE: ____

1) a) Representar en la recta real: $-\frac{317}{5}$



   b) ¿Qué número es el indicado en el gráfico?

2) Calcular el resultado simplificado de (no usar calculadora:

$$\frac{5\frac{35}{25}\frac{2}{28}-\frac{32}{384}\frac{140}{35}}{6-\frac{5}{6}}62-29$$

3) a) Siendo $A = \{1, 2, 3\}$, calcular: $[-4, 3) \cap A$ y $[-4, 3) \cup A$.

   b) Escribir en forma de intervalo: $A = \{x \in R \,/\, -1 < x \leq 9\}$ y $B = \{x \in R \,/\, x > -3\}$

4) Escribir en notación científica: a) $43{,}91 \cdot 10^{-2}$ b) $0{,}004391$ c) $4391 \cdot 10^{7}$

5) Simplificar aplicando propiedades de radicales y potencias, de manera que el resultado quede sin exponentes negativos ni fraccionarios y con el denominador racionalizado:

   a) $\frac{(-6)^{-31}(-8)^{-23}}{(-4)^{32}}$

   b) $\frac{\sqrt[4]{2a^3}}{\sqrt[5]{a\sqrt{2a}}}$

   c) $\frac{3-3\sqrt{2}}{3+3\sqrt{2}}$

6) Resolver y discutir (clasificar) el siguiente sistema por el método de Gauss en su forma matricial (no es válido ningún otro método). Si tuviera más de una solución, además de dar la forma general de todas las soluciones, decir dos soluciones concretas:

$$\left.\begin{aligned} -3x+3y+2z &= 0 \\ -4x+2y+3z &= 3 \\ -5x+7y+3z &= -3 \end{aligned}\right\}$$

7) a) Factorizar los siguientes polinomios:

$$P(x) = 2x^4 + 6x^3 - 2x - 6; \quad Q(x) = 2x^2 + 5x - 3$$

   b) Hallar el valor de x que hace que el cociente de $P(x)$ entre $Q(x)$ valga 0.

8) Hallar los valores de a y b para que sea exacta la división del polinomio $P(x) = 2x^4 + ax^3 + bx - 4$ entre $x + 2$, y tenga como resto 56 si lo dividimos entre $x + 3$.

9) Resolver la ecuación: $2^{2x+5} - 5 \cdot 4^{2x-1} + 3125 = 53$

10) Resolver: $3 \log(6 - x) - \log(72 - x^3) = 0$

SOLUCIONES

1) a) Representar en la recta real: $-\dfrac{317}{5}$

Si dividimos 317 entre 5 nos resulta un dividendo entero igual a 63 con 2 de resto. Esto significa que $-\dfrac{317}{5} = -63-\dfrac{2}{5}$. Así que avanzamos 63 unidades en sentido negativo sobre la recta real y seguimos 2/5 más, esto es, dividimos el trozo entre –64 y –63 en 5 partes iguales (cuatro marcas intermedias) y tomamos la segunda contando de derecha a izquierda (porque avanzamos en sentido negativo, o sea, decreciendo.

b) ¿Qué número es el indicado en el gráfico?

El tramo entre –13 y –12 (que es una unidad) está dividido en 6 partes iguales (mediante 5 marcas intermedias). Nuestro número es la 5ª de estas marcas contando en sentido negativo (decreciente, hacia la izquierda), por lo que se trata de –5/6 más a la izquierda que –12. Luego es:

$$-12-\frac{5}{6} = \boxed{-\frac{77}{6}}$$

2) Calcular el resultado simplificado de (no usar calculadora):

$$\frac{5\,\frac{35}{25}\,\frac{2}{28}-\frac{32}{384}\,\frac{140}{35}}{6-\frac{5}{6}}\,62-29$$

Es muy recomendable simplificar lo antes posible. Y esto consiste en dividir un *factor* (no sumando ni parte de sumando, sino un número que esté multiplicando) del numerador y otro del denominador entre un mismo número, sustituyendo cada uno de ellos por el resultado de dicha división (esto es la *propiedad fundamental de las fracciones*). Recordar que no es posible realizar 62 – 29, puesto que 62 no es un sumando, sino *parte* del primer sumando:

$$\frac{5\,\frac{35}{25}\,\frac{2}{28}-\frac{32}{384}\,\frac{140}{35}}{6-\frac{5}{6}}\,62-29 = \frac{5\,\frac{7}{5}\,\frac{1}{14}-\frac{1}{12}\,\frac{28}{7}}{\frac{36}{6}-\frac{5}{6}}\,62-29 = \frac{1\,\frac{1}{1}\,\frac{1}{2}-\frac{1}{12}\,\frac{4}{1}}{\frac{31}{6}}\,62-29 =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\,\frac{1}{1}}{\frac{31}{6}}\,62-29 = \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{\frac{31}{6}}\,62-29 = \frac{\frac{3-2}{6}}{\frac{31}{6}}\,62-29 = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{31}{6}}\,62-29 = \frac{1\cdot 6}{31\cdot 6}\,62-29 =$$

$$= \frac{1}{31}\,62-29 = 2-29 = \boxed{-27}$$

3) a) Siendo $A = \{1, 2, 3\}$, calcular: $[-4, 3) \cap A$ y $[-4, 3) \cup A$.

La *intersección* de dos conjuntos es otro conjunto formado por los elementos que están en ambos conjuntos *a la vez*. Por tanto, y dado que 1 y 2 están en ambos conjuntos, pero 3 pertenece a A pero no a B: $\boxed{[-4, 3) \cap A = \{1, 2\}}$.

Por otra parte, para que un elemento esté en la *unión* de dos conjuntos, basta con que pertenezca a alguno de los dos. Como 1 y 2 están en ambos, el único elemento nuevo que aporta A al intervalo es el 3. En consecuencia:

$$\boxed{[-4, 3) \cup A = [-4, 3]}$$

b) Escribir en forma de intervalo: $A = \{x \in \mathrm{R} \,/\, -1 < x \leq 9\}$ y $B = \{x \in \mathrm{R} \,/\, x > -3\}$

Según las definiciones de intervalo:

$\boxed{A = \{x \in \mathrm{R} \,/\, -1 < x \leq 9\} = (-1, 9]}$ (no entra –1 pero sí 9)

$\boxed{B = \{x \in \mathrm{R} \,/\, x > -3\} = (-3, +\infty)}$ (no entra ni –3 ni $+\infty$, que no es un número)

4) Escribir en notación científica: a) $43{,}91 \cdot 10^{-2}$ b) 0,004391 c) $4391 \cdot 10^{7}$

Convertimos el número que está en notación habitual a notación científica y multiplicamos, después, las potencias de 10, en sus casos:

$43{,}91 \cdot 10^{-2} = 4{,}391 \cdot 10 \cdot 10^{-2} = \boxed{4{,}391 \cdot 10^{-1}}$

$0{,}004391 = \boxed{4{,}391 \cdot 10^{-3}}$

$4391 \cdot 10^{7} = 4{,}391 \cdot 10^{3} \cdot 10^{7} = \boxed{4{,}391 \cdot 10^{10}}$

5) Simplificar aplicando propiedades de radicales y potencias, de manera que el resultado quede sin exponentes negativos ni fraccionarios y con el denominador racionalizado:

a) $\dfrac{(-6)^{-31}(-8)^{-23}}{(-4)^{32}}$

Si el exponente es impar, positivo o negativo, el resultado de una potencia de base negativa es, también, negativo. Pero si el exponente es par, el resultado de la potencia será positivo. Por otra parte, un *exponente negativo* se convierte en positivo cambiando la potencia completa de un lado a otro de la fracción siempre que dicha potencia sea factor (esté multiplicando). Así:

$$\frac{(-6)^{-31}(-8)^{-23}}{(-4)^{32}} = \frac{-6^{-31}}{4^{32}(-8)^{23}} = \frac{-1}{4^{32}(-8^{23})6^{31}} = \frac{-1}{-4^{32}8^{23}6^{31}} = \frac{1}{4^{32}8^{23}6^{31}} =$$

Para poder unificar las potencias, intentamos hacer coincidir las bases:

$$= \frac{1}{(2^2)^{32}(2^3)^{23}(2\cdot 3)^{31}} = \frac{1}{2^{64}2^{69}2^{31}3^{31}} = \frac{1}{2^{64+69+31}3^{31}} = \boxed{\frac{1}{2^{164}3^{31}}}$$

b) $\dfrac{\sqrt[4]{2a^3}}{\sqrt[5]{a\sqrt{2a}}}$

Para introducir un factor en un radical, se multiplica el exponente del factor por el índice del radical. Y la raíz de una raíz (sin nada entre ellas) es otra raíz con el índice resultante de multiplicar los índices originales. Y para racionalizar el denominador, multiplicamos por una raíz del mismo índice con los mismos factores elevados a exponentes tales que, al sumarlos con los de partida, resulten potencias con exponentes múltiplos del índice:

$$\frac{\sqrt[4]{2a^3}}{\sqrt[5]{a\sqrt{2a}}} = \frac{\sqrt[4]{2a^3}}{\sqrt[5]{\sqrt{a^2 2a}}} = \frac{\sqrt[4]{2a^3}}{\sqrt[5]{\sqrt{2a^3}}} = \frac{\sqrt[4]{2a^3}}{\sqrt[10]{2a^3}} \cdot \frac{\sqrt[10]{2^9a^7}}{\sqrt[10]{2^9a^7}} = \frac{\sqrt[4]{2a^3}\sqrt[10]{2^9a^7}}{\sqrt[10]{2^{10}a^{10}}} =$$

para multiplicar dos radicales, necesitamos que tengan el mismo índice. Para ello, multiplicamos índice y exponentes por un mismo número:

$$=\frac{\sqrt[20]{2^5a^{15}}\sqrt[20]{2^{18}a^{14}}}{2a}=\frac{\sqrt[20]{2^5a^{15}2^{18}a^{14}}}{2a}=\frac{\sqrt[20]{2^{23}a^{29}}}{2a}=\frac{\sqrt[20]{2^{20}2^3a^{20}a^9}}{2a}=$$

$$=\frac{2a\sqrt[20]{2^3a^9}}{2a}=\boxed{\sqrt[20]{2^3a^9}}$$

c) $\dfrac{3-3\sqrt{2}}{3+3\sqrt{2}}$

Para racionalizar un denominador que contenga raíces cuadradas en una suma o resta, multiplicamos y dividimos por el *conjugado* del denominador:

$$\frac{3-3\sqrt{2}}{3+3\sqrt{2}}=\frac{3-3\sqrt{2}}{3+3\sqrt{2}}\cdot\frac{3-3\sqrt{2}}{3-3\sqrt{2}}=\frac{(3-3\sqrt{2})^2}{3^2-(3\sqrt{2})^2}=\frac{3^2-2\cdot3\cdot3\sqrt{2}+(3\sqrt{2})^2}{9-3^2(\sqrt{2})^2}=$$

$$=\frac{9-18\sqrt{2}+9\cdot2}{9-9\cdot2}=\frac{9-18\sqrt{2}+18}{9-18}=\frac{27-18\sqrt{2}}{-9}=$$

En una expresión simplificada, el signo $-$ no debe quedar afectando a todo el denominador:

$$=-\frac{27-18\sqrt{2}}{9}=\frac{-(27-18\sqrt{2})}{9}=\frac{-27+18\sqrt{2}}{9}=\frac{9(-3+2\sqrt{2})}{9}=$$

$$=-3+2\sqrt{2}=\boxed{2\sqrt{2}-3}$$

6) Resolver y discutir (clasificar) el siguiente sistema por el método de Gauss en su forma matricial (no es válido ningún otro método). Si tuviera más de una solución, además de dar la forma general de todas las soluciones, decir dos soluciones concretas:

$$\left.\begin{aligned}-3x+3y+2z&=0\\-4x+2y+3z&=3\\-5x+7y+3z&=-3\end{aligned}\right\}$$

Triangularizamos la *matriz ampliada*. Recordar que no se pueden buscar 0 en la columna de términos independientes (la última):

$$\begin{pmatrix}-3&3&2&0\\-4&2&3&3\\-5&7&3&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[2F_3-3F_1]{2F_2-3F_1}\begin{pmatrix}-3&3&2&0\\1&-5&0&6\\-1&5&0&-6\end{pmatrix}\xrightarrow{F_3+F_2}\begin{pmatrix}-3&3&2&0\\1&-5&0&6\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Ya está triangularizada. Al ser la última fila completa de 0, la eliminamos. Quedan, entonces, 2 ecuaciones con 3 incógnitas, por lo que estamos ante un **sistema compatible indeterminado**. Reconstruimos el sistema y lo resolvemos:

$$\left.\begin{aligned}-3x+3y+2z&=0\\x-5y\quad\;&=6\end{aligned}\right\}$$

Llamamos $x=t$ (le damos un valor arbitrario y fijo a una de las incógnitas, que no sea z, porque en ella hay uno de los 0 de la triangularización y nos resultaría algo más largo resolver la ecuación, aunque también lo conseguiríamos). Pasándola al segundo miembro, el sistema será:

$$\left.\begin{array}{l} 3y+2z=3t \\ -5y \qquad =6-t \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 2^{a}\,ec: \quad y=\dfrac{t-6}{5} \\ 1^{a}\,ec: \quad 2z=3t-3\dfrac{t-6}{5}=\dfrac{15t-3t+18}{5}=\dfrac{12t+18}{5} \Rightarrow z=\dfrac{6t+9}{5} \end{array}$$

La forma de las infinitas soluciones es, entonces: $\boxed{\left(t,\ \dfrac{t-6}{5},\dfrac{6t+9}{5}\right)}$

Nos piden dos soluciones concretas:

- $t = 0 \;\Rightarrow\;$ (0, –6/5, 9/5)
- $t = 1 \;\Rightarrow\;$ (1, – 1, 3)

7) a) Factorizar los siguientes polinomios:

$P(x) = 2x^4 + 6x^3 - 2x - 6$; $\quad Q(x) = 2x^2 + 5x - 3$

- Factorizamos $P(x)$ por Ruffini:

	2	6	0	– 2	– 6
1		2	8	8	6
	2	8	8	6	0
– 3		– 6	– 6	– 6	
	2	2	2	0	

Llegados a este punto, no encontramos cómo seguir. Así que intentamos factorizar el polinomio igualándolo a cero y resolviendo la ecuación de segundo grado resultante:

$2x^2 + 2x + 2 = 0 \Rightarrow$ (Multiplicando ambos miembros por 1/2): $x^2 + x + 1 = 0 \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow\; x = \frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}$$

que no tiene solución, puesto que no existe la raíz de un número negativo. Por tanto, como no conocemos las 4 raíces posibles del polinomio de grado 4, no es aplicable el *Teorema de Descomposición Factorial de Polinomios*, por lo que la factorización es la que hemos obtenido por *Ruffini*:

$$P(x) = 2x^4 + 6x^3 - 2x - 6 = \boxed{(x-1)(x+3)(2x^2+2x+2)}$$

- Factorizamos $Q(x)$. Como es de grado 2, en lugar de probar por Ruffini, lo igualamos a cero y averiguamos sus raíces:

$$2x^2 + 5x - 3 = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{-5\pm\sqrt{25-24}}{4} = \frac{-5\pm1}{4} = \left\langle \begin{array}{l} =\dfrac{-4}{4}=-1 \\ =\dfrac{-6}{4}=-\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$$

Como conocemos las 2 raíces del polinomio, que es de grado 2, aplicamos el *Teorema de Descomposición Factorial de Polinomios*:

$$Q(x) = 2x^2 + 5x - 3 = \boxed{2(x+1)(x+3/2)}$$

b) Hallar el valor de x que hace que el cociente de $P(x)$ entre $Q(x)$ valga 0.

Lo que nos piden es resolver la ecuación: $\dfrac{2x^4+6x^3-2x-6}{2x^2+5x-3}=0$

Los dos polinomios los tenemos descompuestos, por lo que podemos simplificar la ecuación:

$$\frac{2x^4+6x^3-2x-6}{2x^2+5x-3}=0 \iff \frac{(x-1)(x+3)(2x^2+2x+2)}{2(x+1)(x+3/2)}=0 \iff$$

$$\iff \frac{2(x+3)(x^2+x+1)}{2(x+1)(x+3/2)}=0,\ \text{si } x\neq -1,\ x\neq -3/2 \iff$$

$$\iff \frac{(x+3)(x^2+x+1)}{(x+1)(x+3/2)}=0,\ \text{si } x\neq -1,\ x\neq -3/2$$

Como el denominador no se puede anular nunca, no habría que especificar que tiene que ser $x \neq -3/2$, porque ya se ve que hace 0 el denominador; pero hemos de señalar que tiene que ser $x \neq -1$, porque esa información se ha perdido en la simplificación.

Una fracción se hace 0 si y solamente si lo hace el numerador, pero no el denominador. De modo que la solución de esta ecuación son los valores que anulen el numerador, pero, de ellos, hay que descartar los que también anulen el denominador. En este caso, al haber hecho la simplificación, ya han sido descartados los que anulan también el denominador, pero recordamos la teoría general. Así, la solución la obtendremos de:

$$(x+3)(x^2+x+1)=0 \iff \begin{cases} x+3=0 \iff x=-3 \\ x^2+x+1=0, \text{ no tiene solución} \end{cases}$$

Lo que se ha resuelto teniendo en cuenta que un producto vale 0 si, y sólo si, alguno de los factores se anula.

Por tanto, la solución final es $\boxed{x=-3}$.

8) Hallar los valores de a y b para que sea exacta la división del polinomio $P(x) = 2x^4 + ax^3 + bx - 4$ entre $x + 2$, y tenga como resto 56 si lo dividimos entre $x + 3$.

Por el *Teorema del Resto*, el resto de dividir $P(x)$ entre $x-(-2)$ es igual a $P(-2)$. Por tanto, debe ocurrir:

$$P(-2)=0 \iff 2(-2)^4+a(-2)^3+b(-2)-4=0 \iff 32-8a-2b-4=0 \iff$$
$$\iff 8a+2b=28 \iff 4a+b=14$$

De la misma forma, como el resto de la división entre $x+3$ vale 56:

$$P(-3)=56 \iff 2(-3)^4+a(-3)^3+b(-3)-4=56 \iff 162-27a-3b-4=56 \iff$$
$$\iff 158-56=27a+3b \iff 27a+3b=102 \iff 9a+b=34$$

Nos ha quedado un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, que resolvemos por *reducción*:

$$\left.\begin{array}{r} 4a+b=14 \\ \underline{-9a-b=-34} \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} \text{Sustituyendo en la 1ª ec:} \\ 16+b=14 \Rightarrow b=-2 \end{array}$$
$$-5a \quad =-20 \Rightarrow a=4$$

Por tanto: $\boxed{a=4,\ b=-2 \text{ y el polinomio es: } P(x)=2x^4+4x^3-2x-4}$.

9) Resolver la ecuación: $2^{2x+5} - 5\cdot 4^{2x-1} + 3125 = 53$

Intentaremos conseguir que x quede en un único lugar. De no lograrlo, probaremos un *cambio de incógnita*:

$$2^{2x+5}-5\cdot 4^{2x-1}+3125=53 \iff 2^{2x}2^5-5\cdot 4^{2x}4^{-1}+3125-53=0 \iff$$
$$\iff (2^x)^2 2^5-5\cdot(1/4)\cdot(2^2)^{2x}+3072=0 \iff 32(2^x)^2-(5/4)\cdot(2)^{4x}+3072=0 \iff$$
$$\iff 32(2^x)^2-(5/4)\cdot(2^x)^4+3072=0$$

Y llamando $\boxed{t=2^x}$, queda:

$$32t^2-(5/4)\cdot t^4+3072=0 \iff \text{Mult. por 4: } 128t^2-5t^4+12288=0$$

Se trata de una ecuación bicuadrada. Hacemos un nuevo *cambio de incógnita* y multiplicamos por -1. El cambio es $\boxed{a = t^2}$:

$$5a^2 - 128a - 12288 = 0 \Rightarrow a = \frac{128 \pm \sqrt{16384 + 245760}}{10} = \frac{128 \pm 512}{10} = \left\langle \begin{matrix} = -\dfrac{192}{5} \\ 64 \end{matrix} \right.$$

Deshacemos el último *cambio*:

- Si $a = -192/5$, como $t^2 = a \Rightarrow t^2 = -192/5$, lo que no es posible.
- Si $a = 64 \Rightarrow t^2 = 64 \Rightarrow t = 8$.

Deshacemos el otro *cambio*:
Si $t = 8$, como $t = 2^x \Rightarrow 2^x = 8 \Rightarrow 2^x = 2^3 \Rightarrow \boxed{x = 3}$.

10) Resolver: $3 \log (6 - x) - \log (72 - x^3) = 0$

Ya que no es posible desarrollar logaritmo de una suma o resta, no nos queda más remedio que intentar eliminar los logaritmos:

$$3 \log (6 - x) - \log (72 - x^3) = 0 \Rightarrow \log (6 - x)^3 - \log (72 - x^3) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log \frac{(6-x)^3}{72-x^3} = \log 1 \Rightarrow \frac{(6-x)^3}{72-x^2} = 1 \Rightarrow (6-x)^3 = 72 - x^3 \Rightarrow$$

$$216 - 108x + 18x^2 - x^3 = 72 - x^3 \Rightarrow 18x^2 - 108x + 144 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0$$

Para desarrollar $(6 - x)^3$ hemos de multiplicar $(6 - x)$ por sí mismo tres veces. Nosotros hemos puesto ya el resultado. Las soluciones de la ecuación de segundo grado a la que hemos llegado son 2 y 4. Como ninguna de ellas anula los argumentos de los logaritmos de la ecuación inicial, son válidas. Luego las soluciones son:

$$\boxed{x = 2 \text{ ó } x = 4}.$$