IES Fernando de Herrera **Curso 2012 / 13**
Primer trimestre – 1º Bach CCSS **22 de octubre de 2012**
Números reales. Potencias y radicales. Polinomios

NOMBRE: ____

1) a) Escribir en forma de intervalo: $[-3, 1) \cup [-2, 4)$ *(1 punto todo el ejercicio)*
   b) Ídem para $[-3, 1) \cap (-2, 4)$
   c) Expresar en notación científica: $2975{,}6 \cdot 10^{-910}$
   d) Expresar en forma ordinaria el siguiente número escrito en notación científica: $-5{,}13 \cdot 10^{15}$

2) Simplificar, aplicando propiedades de potencias: *(2 puntos)*
   a) $\dfrac{6^{43}(-12)^{22}}{-4^{65}}$
   b) $\left(\dfrac{(2+a)^5}{(2+a)^{-2}}\right)^3$

3) Simplificar, aplicando propiedades de radicales y potencias, y dejando racionalizado el denominador, en su caso:
   a) $\dfrac{3\sqrt{x}}{\sqrt[5]{9x^3}}$ *(1 punto)*
   b) $\dfrac{3}{3-2\sqrt{2}}$ *(1 punto)*
   c) $\sqrt{3\sqrt[3]{18a^2}}$ *(1 punto)*
   d) $7\sqrt{18}+6\sqrt{45}-2\sqrt{2}-\sqrt{5}$ *(1 punto)*

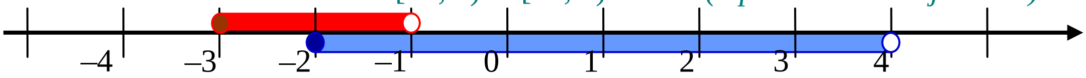
4) Calcular sin utilizar la calculadora, con el resultado simplificado: *(1 punto)*
$$\dfrac{\dfrac{81}{243}\,\dfrac{128}{256}+\dfrac{35}{42}}{3-\dfrac{63}{36}}$$

5) Efectuar la división de $P(x) = x^4 - 2x + 3$ entre $Q(x) = 2x^2 - 1$, y realizar la prueba de la división. *(1 punto)*

6) Dado $P(x) = 3x^3 - 7x + 60$, hallar $P(-1)$ y $P(-3)$. Y, como consecuencia, aplicando el Teorema del Resto, encontrar un divisor exacto de $P(x)$. *(1 punto)*

SOLUCIONES

1) a) Escribir en forma de intervalo: [–3, 1) ∪ [–2, 4) *(1 punto todo el ejercicio)*



[–3, 1) está dibujado en rojo, mientras que [–2, 4) lo está en azul. La *unión* de ambos intervalos está formada por todos los elementos que pertenecen a alguno de los dos intervalos (lo que incluye a los que están en ambos a la vez). Por ello:

$$\boxed{[-3, 1) \cup [-2, 4) = [-3, 4)}$$

b) Ídem para [–3, 1) ∩ (–2, 4)

Razonando sobre el gráfico anterior, si bien, teniendo en cuenta que, ahora, -2 no pertenece al segundo de los intervalos (el azul), la *intersección* resulta ser la zona común a ambos intervalos. Es decir:

$$\boxed{[-3, 1) \cap (-2, 4) = (-2, 1)}$$

Puesto que ni -2 ni -1 pertenecen a los dos intervalos a la vez.

c) Expresar en notación científica: $2975{,}6 \cdot 10^{-910}$

$$2975{,}6 \cdot 10^{-910} = 2{,}9756 \cdot 10^{3} \cdot 10^{-910} = 2{,}9756 \cdot 10^{3-910} = \boxed{2{,}9756 \cdot 10^{-907}}$$

d) Expresar en forma ordinaria el siguiente número escrito en notación científica: $-5{,}13 \cdot 10^{15}$

$$-5{,}13 \cdot 10^{15} = \boxed{-5130.000.000.000.000}$$

2) Simplificar, aplicando propiedades de potencias: *(2 puntos)*

a) $\dfrac{6^{43}(-12)^{22}}{-4^{65}}$

$$\frac{6^{43}(-12)^{22}}{-4^{65}} = \frac{(2\cdot3)^{43}(12)^{22}}{-(2^2)^{65}} = -\frac{2^{43}\cdot3^{43}(2^2 3)^{22}}{2^{130}} = -\frac{3^{43}2^{44}3^{22}}{2^{130-43}} = -\frac{3^{65}2^{44}}{2^{87}} = \boxed{-\frac{3^{65}}{2^{43}}}$$

b) $\left(\dfrac{(2+a)^5}{(2+a)^{-2}}\right)^3$

$$\left(\frac{(2+a)^5}{(2+a)^{-2}}\right)^3 = \frac{(2+a)^{5\cdot3}}{(2+a)^{-2\cdot3}} = \frac{(2+a)^{15}}{(2+a)^{-6}} = (2+a)^{15-(-6)} = \boxed{(2+a)^{21}}$$

3) Simplificar, aplicando propiedades de radicales y potencias, y dejando racionalizado el denominador, en su caso:

a) $\dfrac{3\sqrt{x}}{\sqrt[5]{9x^3}}$ *(1 punto)*

$$\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt[5]{9x^3}} = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt[5]{3^2x^3}}\frac{\sqrt[5]{3^3x^2}}{\sqrt[5]{3^3x^2}} = \frac{3\sqrt[2\cdot5]{x^5}\sqrt[5\cdot2]{3^6x^4}}{\sqrt[5]{3^5x^5}} = \frac{3\sqrt[10]{3^6x^9}}{3x} = \boxed{\frac{\sqrt[10]{3^6x^9}}{x}}$$

b) $\dfrac{3}{3-2\sqrt{2}}$ *(1 punto)*

$$\frac{3}{3-2\sqrt{2}} = \frac{3}{3-2\sqrt{2}}\frac{3+2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}} = \frac{3(3+2\sqrt{2})}{3^2-(2\sqrt{2})^2} = \frac{9+6\sqrt{2}}{9-2^2(\sqrt{2})^2} = \frac{9+6\sqrt{2}}{9-4\cdot2} = $$
$$= \boxed{9+6\sqrt{2}}$$

c) $\sqrt{3\sqrt[3]{18a^2}}$ *(1 punto)*

$$\sqrt{3\sqrt[3]{18a^2}} = \sqrt{\sqrt[3]{3^3 3^2 2a^2}} = \boxed{\sqrt[6]{3^5 2a^2}}$$

d) $7\sqrt{18}+6\sqrt{45}-2\sqrt{2}-\sqrt{5}$ *(1 punto)*

$$7\sqrt{18}+6\sqrt{45}-2\sqrt{2}-\sqrt{5} = _{\text{p}} =$$

$$= 7\cdot 3\sqrt{2}+6\cdot 3\sqrt{5}-2\sqrt{2}-\sqrt{5} = 21\sqrt{2}+18\sqrt{5}-2\sqrt{2}-\sqrt{5} = \boxed{19\sqrt{2}+17\sqrt{5}}$$

4) Calcular sin utilizar la calculadora, con el resultado simplificado: *(1 punto)*

$$\frac{\frac{81}{243}\frac{128}{256}+\frac{35}{42}}{3-\frac{63}{36}}$$

$$\frac{\frac{81}{243}\frac{128}{256}+\frac{35}{42}}{3-\frac{63}{36}} = \frac{\frac{3^4}{3^5}\frac{2^7}{2^8}+\frac{5}{6}}{3-\frac{7}{4}} = \frac{\frac{1}{3}\frac{1}{2}+\frac{5}{6}}{\frac{12}{4}-\frac{7}{4}} = \frac{\frac{1}{6}+\frac{5}{6}}{\frac{5}{4}} = \frac{\frac{6}{6}}{\frac{5}{4}} = \frac{1}{\frac{5}{4}} = \boxed{\frac{4}{5}}$$

5) Efectuar la división de $P(x) = x^4 - 2x + 3$ entre $Q(x) = 2x^2 - 1$, y realizar la prueba de la división. *(1 punto)*

En cada paso, dividimos el término de mayor grado que tengamos en el dividendo, por su correspondiente del divisor, y el resultado es un nuevo sumando del cociente:

$$\begin{array}{l|l}
x^4 \qquad\qquad -2x+3 & 2x^2-1 \\ \hline
-x^4+\frac{1}{2}x^2 & \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4} \\ \hline
\qquad \frac{1}{2}x^2-2x+3 & \\
\quad -\frac{1}{2}x^2 \qquad +\frac{1}{4} & \\ \hline
\qquad\quad -2x+\frac{13}{4} &
\end{array}$$

Comprobación: Debe ocurrir que $P(x) = Q(x)\cdot C(x) + R(x)$. Desarrollamos el segundo miembro hasta ver si llegamos al primero:

$$\boxed{(2x^2-1)\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}\right)+\left(-2x+\frac{13}{4}\right)} = x^4+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}-2x+\frac{13}{4} =$$

$$= x^4-2x+\frac{12}{4} = \boxed{x^4-2x+3}$$

Como así ha sido, la división es correcta.

6) Dado $P(x) = 3x^3 - 7x + 60$, hallar $P(-1)$ y $P(-3)$. Y, como consecuencia, aplicando el Teorema del Resto, encontrar un divisor exacto de $P(x)$. *(1 punto)*

Para hallar el valor numérico de un polinomio para un x dado, sustituimos x por dicho valor en el polinomio:

$$\boxed{P(-1)} = 3(-1)^3 - 7(-1) + 60 = -3 + 7 + 60 = \boxed{64}$$

$$\boxed{P(-3)} = 3(-3)^3 - 7(-3) + 60 = 3(-27) + 21 + 60 = -81 + 81 = \boxed{0}$$

Como consecuencia de este último resultado, y según el Teorema del Resto, el resto de la división de $P(x)$ entre $x - (-3) = x + 3$ será $R = P(-3) = 0$. Por tanto, dicha división será exacta. $\boxed{\text{El divisor exacto que piden es, pues, } x+3}$.

Primer trimestre – 1º Bach CCSS **29 de noviembre de 2012**
Global 1ª evaluación

NOMBRE: ____

1) Resolver: $2\sqrt{3x-2}-\sqrt{4x+1}=1$ *(1,5 puntos)*
2) Resolver: $9^x - 2\cdot 3^{x+2} + 81 = 0$ *(1,5 puntos)*
3) Resolver: $\left.\begin{aligned} \log x + 3\log y = 5 \\ \log x - \log y = 3 \end{aligned}\right\}$ *(1,5 puntos)*
4) Resolver: $8x^3 - 18x^2 + 7x + 3 = 0$ *(1,5 puntos)*
5) Discutir y resolver el siguiente sistema aplicando el Método de Gauss en su forma matricial (no será válido ningún otro método o forma):

$$\left.\begin{aligned} x+y+z=0 \\ 2x+3y-z=17 \\ 4x+5y+z=17 \end{aligned}\right\}$$
(2,5 puntos)

6) a) Para $P(x) = 3x^3 + mx^2 + 1$, hallar el valor de m que hace que tenga una raíz en $x = -1$. Escribir como queda $P(x)$ al sustituir el m obtenido.
   b) Factorizar totalmente el polinomio resultante. *(1,5 puntos)*

SOLUCIONES

1) Resolver: $2\sqrt{3x-2}-\sqrt{4x+1}=1$ *(1,5 puntos)*

Para resolver una ecuación irracional con raíces cuadradas, un buen procedimiento consiste en aislar un sumando con raíz en un miembro, y elevar ambos miembros de la ecuación al cuadrado. Pero siempre que elevamos al cuadrado ambos miembros de una ecuación, estamos obligados a comprobar la validez de las soluciones obtenidas en la ecuación original, porque podemos introducir soluciones falsas. Así:

$$2\sqrt{3x-2}-\sqrt{4x+1}=1 \Rightarrow 2\sqrt{3x-2}=1+\sqrt{4x+1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (2\sqrt{3x-2})^2=(1+\sqrt{4x+1})^2 \Rightarrow 2^2(\sqrt{3x-2})^2=1+2\sqrt{4x+1}+(\sqrt{4x+1})^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4(3x-2)=1+2\sqrt{4x+1}+4x+1 \Rightarrow 12x-8-2-4x=2\sqrt{4x+1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 8x-10=2\sqrt{4x+1} \Rightarrow$$

Simplificamos entre 2 ambos miembros de la ecuación y repetimos el proceso de elevar al cuadrado, para eliminar la raíz que aún nos queda:

$$\Rightarrow 4x-5=\sqrt{4x+1} \Rightarrow (4x-5)^2=(\sqrt{4x+1})^2 \Rightarrow 16x^2-40x+25=4x+1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 16x^2-44x+24=0 \Rightarrow \text{Simplificando entre 4: } 4x^2-11x+6=0:$$

$$x=\frac{11\pm\sqrt{121-96}}{8}=\frac{11\pm 5}{8}=\left\langle \begin{array}{l} =\frac{6}{8}=\frac{3}{4} \\ =\frac{16}{8}=2 \end{array}\right.$$

Comprobamos:

- Si $x=\frac{3}{4} \Rightarrow$ la ec. original es: $2\sqrt{3\frac{3}{4}-2}-\sqrt{4\frac{3}{4}+1}=2\sqrt{\frac{1}{4}}-\sqrt{4}=2\frac{1}{2}-2$ $=1-2=-1$: No es válida.
- Si $\boxed{x=2} \Rightarrow 2\sqrt{3\cdot 2-2}-\sqrt{4\cdot 2+1}=2\sqrt{4}-\sqrt{9}=2\cdot 2-3=1$: Válida.

2) Resolver: $9^x-2\cdot 3^{x+2}+81=0$ *(1,5 puntos)*

Ya que no podemos tomar logaritmos, pues no es simplificable el logaritmo de una suma, buscamos poner todo con potencias de la misma base o que las potencias que aparezcan sean de igual base e igual exponente:

$$9^x-2\cdot 3^{x+2}+81=0 \Rightarrow (3^2)^x-2\cdot 3^x\cdot 3^2+81=0 \Rightarrow (3^x)^2-18\cdot 3^x+81=0$$

donde hemos usado que $(3^2)^x=3^{2x}=(3^x)^2$.

Realizamos un cambio de incógnita: $\boxed{t=3^x}$:

$$t^2-18t+81=0 \Rightarrow t=\frac{18\pm\sqrt{324-324}}{2}=\left\langle \begin{array}{l} =\frac{18-0}{2}=9 \\ =\frac{18+0}{2}=9 \end{array}\right.$$

Hemos obtenido una solución doble. Deshacemos el cambio de incógnita:

- Si $t=9$, como $t=3^x \Rightarrow 9=3^x \Rightarrow 3^2=3^x \Rightarrow \boxed{x=2}$

3) Resolver: $\left.\begin{array}{r} \log x+3\log y=5 \\ \log x-\log y=3 \end{array}\right\}$ *(1,5 puntos)*

Si podemos hallar los valores de $\log x$ y $\log y$ sin quitar logaritmos, las ecuaciones con las que trabajaremos serán más cómodas. Así, cambiaremos de incógnitas para trabajar de una forma más fácil aún:

Llamamos $\boxed{s = \log x \quad t = \log y}$:

$$\left.\begin{array}{r} s+3t=5 \\ s-t=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{rl} & \left.\begin{array}{r} s+3t=5 \\ -s+t=-3 \end{array}\right\} \\ (2^{a})\cdot(-1): & \\ \hline \textit{Sumamos}: & 4t=2 \Rightarrow t=1/2 \end{array}$$

Sustituyendo en la 2ª ec: $s - 1/2 = 3 \;\Rightarrow\; s = 7/2$.
Deshacemos los cambios de incógnita:

- $s = 7/2 \;\Rightarrow\; \log x = 7/2 \;\Rightarrow\; \boxed{x = 10^{7/2} = \sqrt{10^7}}$
- $t = 1/2 \;\Rightarrow\; \log y = 1/2 \;\Rightarrow\; \boxed{y = 10^{1/2} = \sqrt{10}}$

Estas soluciones son válidas ambas porque ninguna de ellas anula o hace negativo ninguno de los argumentos de los logaritmos de las ecuaciones de partida.

4) Resolver: $8x^3 - 18x^2 + 7x + 3 = 0$ *(1,5 puntos)*

Encontrar las soluciones de la ecuación es lo mismo que hallar las raíces del polinomio, lo que equivale a factorizarlo. Lo hacemos por Ruffini:
Comenzamos probando divisores positivos y negativos del término independiente 3:

$$\begin{array}{c|cccc} & 8 & -18 & 7 & 3 \\ 1 & & 8 & -10 & -3 \\ \hline & 8 & -10 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

No encontramos fácilmente un divisor exacto, por lo que probamos a encontrar las raíces del polinomio $8x^2 - 10x - 3$ igualándolo a 0 y resolviendo la ecuación de segundo grado resultante:

$$8x^2 - 10x - 3 = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{10 \pm \sqrt{100+96}}{16} = \frac{10 \pm 14}{16} = \begin{cases} \dfrac{10-14}{16} = -\dfrac{4}{16} = -\dfrac{1}{4} \\ \dfrac{10+14}{16} = \dfrac{24}{16} = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Conocemos las dos raíces de este polinomio de segundo grado. Por el Teorema de Descomposición Factorial de Polinomios: $8x^2 - 10x - 3 = 8(x + 1/4)(x - 3/2)$. La factorización del polinomio de partida es, pues:

$$8x^3 - 18x^2 + 7x + 3 = 8(x - 1)(x + 1/4)(x - 3/2)$$

Y las $\boxed{\text{soluciones de la ecuación: } 1, -1/4, 3/2}$.

5) Discutir y resolver el siguiente sistema aplicando el Método de Gauss en su forma matricial (no será válido ningún otro método o forma):

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=0 \\ 2x+3y-z=17 \\ 4x+5y+z=17 \end{array}\right\}$$ *(2,5 puntos)*

Trabajamos con la matriz ampliada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 17 \\ 4 & 5 & 1 & 17 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-4F_1]{F_2-2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 17 \\ 0 & 1 & -3 & 17 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como la tercera fila es de 0, la eliminamos. Las dos filas restantes corresponden a un sistema ya triangularizado, pero con dos ecuaciones y tres incógnitas. Por tanto, al estar triangularizado y tener menos ecuaciones que incógnitas, es un *sistema compatible indeterminado*, con infinitas soluciones. Pasamos, por ejemplo *z* al segundo miembro; a partir de ahora, actuará de parámetro: $z = t$, suponiendo t un número conocido, cuyo valor determinamos nosotros a nuestro antojo:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=0 \\ y-3z=17 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=-z \\ y=17+3z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=-t \\ y=17+3t \end{array}\right\}$$

La segunda ecuación nos da el valor de y. Sustituyéndolo en la primera y despejando:

$$x + 17 + 3t = -t \;\Rightarrow\; x = -17 - 4t$$

Las infinitas soluciones, dependientes del valor que, para cada una de ellas, elijamos para t, son:

$$\boxed{(x = -17 - 4t,\ y = 17 + 3t,\ z = t)}$$

6) a) Para $P(x) = 3x^3 + mx^2 + 1$, hallar el valor de m que hace que tenga una raíz en $x = -1$. Escribir como queda $P(x)$ al sustituir el m obtenido.
b) Factorizar totalmente el polinomio resultante. *(1,5 puntos)*

a) Tener una raíz en $x = -1$ significa, por definición de raíz, que $P(-1) = 0$:

$$P(-1) = 3(-1)^3 + m(-1)^2 + 1 = -3 + m + 1 = m - 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; \boxed{m = 2}$$

Consecuentemente, $P(x) = 3x^3 + 2x^2 + 1$

b) Por Ruffini, sabemos ya una raíz, por el apartado anterior:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & & -3 & 1 & -1 \\ \hline & 3 & -1 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

No encontramos más raíces (probamos 1 y -1, que son los divisores positivos y negativos del término independiente 1). Así que buscamos las raíces que nos faltan igualando el polinomio cociente a cero:

$$3x^2 - x + 1 = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{1 \pm \sqrt{1-12}}{6}$$

Esta ecuación no tiene solución, puesto que el radicando es negativo. Por tanto, este polinomio de segundo grado es irreducible. La mejor factorización posible es, entonces:

$$\boxed{3x^3 + 2x^2 + 1 = (x + 1)(3x^2 - x + 1)}$$

NOMBRE: ____

1) Resolver: $\sqrt{7x-\sqrt{8+x}}=2$ *(1,5 puntos)*
2) Resolver: $9^x - 11\cdot 3^x + 18 = 0$ *(1,5 puntos)*
3) Resolver: $2\log x - \log(9x - 80) = 1$ *(1,5 puntos)*
4) a) Factorizar: $6x^3 - 73x^2 + 203x - 136$ *(1 punto)*
   b) Resolver: $6x^3 - 73x^2 + 203x - 136 = 0$ *(0,5 puntos)*
5) Discutir y resolver el siguiente sistema aplicando el Método de Gauss en su forma matricial (no será válido ningún otro método o forma):

$$\left.\begin{array}{r} x+3y-z=2 \\ -2x+3y+2z=5 \\ 3x-3z=-3 \end{array}\right\}$$

(2,5 puntos)

6) a) Para $P(x) = 3x^3 + mx^2 + 1$, hallar el valor de m que hace que el resto de dividirlo entre $x - 1$ sea 2. Escribir como queda $P(x)$ al sustituir el m obtenido. *(1 punto)*
   b) Efectuar dicha división y efectuar la prueba de la misma. *(0,5 puntos)*

SOLUCIONES

1) Resolver: $\sqrt{7x-\sqrt{8+x}}=2$ *(1,5 puntos)*

El método habitual para resolver una ecuación irracional de este tipo consiste en aislar un sumando con raíz en uno de los miembros y elevar al cuadrado. En este caso, el primer miembro es un único sumando con una raíz cuadrada (dicha raíz contiene otra, pero todavía no nos hemos de ocupar de ella, ya que aún no es accesible, por estar dentro de esta raíz):

$$\sqrt{7x-\sqrt{8+x}}=2 \;\Rightarrow\; \left(\sqrt{7x-\sqrt{8+x}}\right)^2=2^2 \;\Rightarrow\; 7x-\sqrt{8+x}=4 \;\Rightarrow$$

Repetimos el proceso con la nueva raíz:

$$\Rightarrow\; 7x-4=\sqrt{8+x} \;\Rightarrow\; (7x-4)^2=(\sqrt{8+x})^2 \;\Rightarrow\; 49x^2-56x+16=8+x \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 49x^2-57x+8=0 \;\Rightarrow\; x=\frac{57\pm\sqrt{3249-1568}}{98}=\frac{57\pm 41}{98}=\begin{cases}=\dfrac{57-41}{98}=\dfrac{16}{98}=\dfrac{8}{49}\\[2mm]=\dfrac{57+41}{98}=\dfrac{98}{98}=1\end{cases}$$

Siempre que elevamos ambos miembros de una ecuación al cuadrado estamos obligados a comprobar los resultados obtenidos, sustituyendo en la ecuación original:

- $x=\dfrac{8}{49}$: $\sqrt{7\dfrac{8}{49}-\sqrt{8+\dfrac{8}{49}}}=\sqrt{\dfrac{8}{7}-\sqrt{\dfrac{400}{49}}}=\sqrt{\dfrac{8}{7}-\dfrac{20}{7}}=\sqrt{-\dfrac{12}{7}}$ *No es válida*
- $x=1$: $\sqrt{7\cdot 1-\sqrt{8+1}}=\sqrt{7-\sqrt{9}}=\sqrt{7-3}=\sqrt{4}=2$ *Válida*

De modo que tiene una $\boxed{\text{única solución: } x=1}$.

2) Resolver: $9^x-11\cdot 3^x+18=0$ *(1,5 puntos)*

Hay tres métodos habituales para resolver ecuaciones exponenciales:

- Llevarlas a la forma $a^p=a^q$, de donde $p=q$.
- Tomar logaritmos en ambos miembros.
- Que la incógnita aparezca siempre en expresiones de igual base con el mismo exponente. Se hace, entonces, un *cambio de incógnita*.

En este caso, usaremos la tercera estrategia:

$$9^x-11\cdot 3^x+18=0 \;\Rightarrow\; (3^2)^x-11\cdot 3^x+18=0 \;\Rightarrow\; 3^{2x}-11\cdot 3^x+18=0 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; (3^x)^2-11\cdot 3^x+18=0$$

Donde hemos utilizado fórmulas fundamentales relativas a propiedades de potencias. Llamamos, ahora $\boxed{t=3^x}$:

$$t^2-11t+18=0 \;\Rightarrow\; t=\frac{11\pm\sqrt{121-72}}{2}=\frac{11\pm\sqrt{49}}{2}=\frac{11\pm 7}{2}=\begin{cases}=\dfrac{4}{2}=2\\[2mm]=\dfrac{18}{2}=9\end{cases}$$

Hemos de deshacer el *cambio de incógnita*, y resolver las dos ecuaciones exponenciales que nos queden, usando la estrategia adecuada de entre las antes expuestas:

- $t=2 \;\Rightarrow$ Como $t=3^x$: $3^x=2$. Tomando logaritmos: $\log 3^x=\log 2 \;\Rightarrow$
  $x\log 3=\log 2 \;\Rightarrow\; \boxed{x=\dfrac{\log 2}{\log 3}\approx 0{,}63}$
- $t=9 \;\Rightarrow$ Como $t=3^x$: $3^x=9 \;\Rightarrow\; 3^x=3^2 \;\Rightarrow\; \boxed{x=2}$

Hemos encontrado, pues dos soluciones.

3) Resolver: $2\log x - \log(9x - 80) = 1$ *(1,5 puntos)*

En las ecuaciones logarítmicas podemos optar por averiguar cuánto vale el logaritmo de la incógnita, o de una expresión en la que aparezca, o por quitar logaritmos. Las ecuaciones suelen ser más cómodas con la primera opción. Pero aquí no es aplicable porque no podemos reducir el logaritmo de una suma. Entonces, usando las propiedades de los logaritmos:

$$2\log x - \log(9x-80) = 1 \;\Rightarrow\; \log x^2 - \log(9x-80) = 1 \;\Rightarrow\; \log\frac{x^2}{9x-80} = \log 10$$

Como $\log a = \log b \;\Rightarrow\; a = b$, se tiene:

$$\frac{x^2}{9x-80} = 10 \;\Rightarrow\; x^2 = 90x - 800 \;\Rightarrow\; x^2 - 90x + 800 = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; x = \frac{90 \pm \sqrt{8100-3200}}{2} = \frac{90 \pm \sqrt{4900}}{2} = \frac{90 \pm 70}{2} = \left\langle \begin{array}{l} = \dfrac{20}{2} = 10 \\ = \dfrac{160}{2} = 80 \end{array} \right.$$

Pero en las ecuaciones logarítmicas es obligatorio comprobar la validez de los resultados, sustituyéndolos en la ecuación original y comprobando que no se hacen cero ni negativos los argumentos de los logaritmos. Haciéndolo, vemos que ambas cumplen tal requisito, por lo que tenemos dos soluciones válidas: $\boxed{x = 10 \text{ ó } x = 80}$.

4) a) Factorizar: $6x^3 - 73x^2 + 203x - 136$ *(1 punto)*

Empleamos Ruffini, probando números que sean divisores (positivos o negativos) del término independiente 136:

	6	– 73	203	– 136
1		6	– 67	136
	6	– 67	136	0

No vemos fácilmente la continuación, pero como ya estamos ante un polinomio de segundo grado, lo igualamos a 0 y resolvemos la ecuación resultante, en busca de las raíces:

$$6x^2 - 67x + 136 = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{67 \pm \sqrt{4489-3264}}{12} = \frac{67 \pm \sqrt{1225}}{12} =$$

$$= \frac{67 \pm 35}{12} = \left\langle \begin{array}{l} = \dfrac{32}{12} = \dfrac{8}{3} \\ = \dfrac{102}{12} = \dfrac{17}{2} \end{array} \right.$$

Aplicando el Teorema de Descomposición Factorial de Polinomios, se tiene:

$$\boxed{6x^3 - 73x^2 + 203x - 136 = 6(x-1)(x-8/3)(x-17/2)}$$

b) Resolver: $6x^3 - 73x^2 + 203x - 136 = 0$ *(0,5 puntos)*

Las raíces del polinomio, obtenidas en el proceso anterior, son las soluciones de la ecuación resultante de igualar el polinomio a 0. Dichas soluciones son, entonces:

$$\boxed{x = 1 \quad \text{ó} \quad x = 8/3 \quad \text{ó} \quad x = 17/2}$$

5) Discutir y resolver el siguiente sistema aplicando el Método de Gauss en su forma matricial (no será válido ningún otro método o forma):

$$\left.\begin{array}{r} x+3y-z=2 \\ -2x+3y+2z=5 \\ 3x \quad -3z=-3 \end{array}\right\}$$ *(2,5 puntos)*

Trabajamos con la matriz ampliada. El proceso más corto para triangularizar consiste en elegir una fila y, a partir de ella y mediante combinaciones lineales de filas, conseguir que todas las posiciones de una columna sean 0 salvo la de esa fila (en el primer paso, elegiremos la fila 1 y columna 2). En el paso siguiente, ignorando la fila del paso anterior, elegimos otra fila y otra columna y repetimos el proceso. Habrá que dar tantos pasos como filas haya menos una: en nuestro caso, 3 – 1 = 2, con lo que estará garantizada la triangularización:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2-F_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3+F_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como la tercera fila es de 0, la eliminamos. Las dos filas restantes corresponden a un sistema ya triangularizado, pero con dos ecuaciones y tres incógnitas. Por tanto, al estar triangularizado y tener menos ecuaciones que incógnitas, lo que tenemos es un $\boxed{\textit{sistema compatible indeterminado}}$, con infinitas soluciones. Pasamos, por ejemplo z al segundo miembro; a partir de ahora, actuará de parámetro: $z = t$, suponiendo t un número conocido, cuyo valor determinamos nosotros a nuestro antojo (también podríamos haber pasado x al segundo miembro, pero no deberíamos hacerlo con y o tendremos un trabajo extra). La 2ª ecuación, además, puede simplificarse entre 3:

$$\left.\begin{array}{r} x+3y-z=2 \\ -3x \quad +3z=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+3y=2+z \\ -x=1-z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+3y=2+t \\ -x=1-t \end{array}\right\}$$

La 2ª ecuación nos da el valor de x: $x = t - 1$. Sustituyéndolo en la 1ª y despejando:

$$t-1+3y=2+t \;\Rightarrow\; 3y=2+t-t+1=3 \;\Rightarrow\; y=1$$

Las infinitas soluciones, dependientes del valor que, para cada una de ellas, elijamos para t, son:

$$\boxed{(x=t-1,\ y=1,\ z=t)}$$

6) a) Para $P(x) = 3x^3 + mx^2 + 1$, hallar el valor de m que hace que el resto de dividirlo entre $x - 1$ sea 2. Escribir como queda $P(x)$ al sustituir el m obtenido. *(1 punto)*

El Teorema del Resto nos dice que el resto de la división mencionada coincide con $P(1)$. Luego debe ser:

$$P(1)=2 \;\Leftrightarrow\; 3\cdot 1^3+m\cdot 1^2+1=2 \;\Leftrightarrow\; 4+m=2 \;\Leftrightarrow\; \boxed{m=-2}$$

Con lo que $\boxed{P(x) = 3x^3 - 2x^2 + 1}$.

b) Efectuar dicha división y efectuar la prueba de la misma. *(0,5 puntos)*

Por Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & & 3 & 1 & 1 \\ \hline & 3 & 1 & 1 & \boxed{2} \end{array}$$

Así que:

Dividendo: $D(x) = 3x^3 - 2x^2 + 1$
Divisor: $d(x) = x - 1$
Cociente: $C = 3x^2 + x + 1$
Resto: $R = 2$

La prueba es: $D(x) = d(x)\cdot C(x) + R$:

$$\boxed{\begin{gathered} d(x)\cdot C(x) + R = (x-1)(3x^2 + x + 1) + 2 = 3x^3 + x^2 + x - 3x^2 - x - 1 + 2 = \\ = 3x^3 - 2x^2 + 1 = D(x) \end{gathered}}$$