PROBLEMAS DE CÁLCULO DE DOMINIOS

1) Calcular el dominio de $y = \sqrt{\dfrac{x+5}{-4x^2-4x+15}}$

$x \in \mathrm{D}(f) \iff \dfrac{x+5}{-4x^2-4x+15} \geq 0$, manteniéndose el denominador no nulo. Y ello es porque, para que exista la raíz cuadrada, el radicando no puede ser negativo.

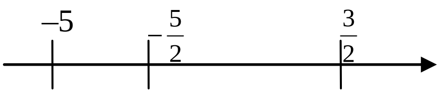
Para solucionar esta inecuación, descomponemos factorialmente el denominador. Lo hacemos resolviendo la ecuación $-4x^2 - 4x + 15 = 0 \iff 4x^2 + 4x - 15 = 0$:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+240}}{8} = \frac{-4 \pm \sqrt{256}}{8} = \frac{-4 \pm 16}{8} = \left\langle \begin{array}{l} = \dfrac{-4-16}{8} = \dfrac{-20}{8} = -\dfrac{5}{2} \\ = \dfrac{-4+16}{8} = \dfrac{12}{8} = \dfrac{3}{2} \end{array} \right.$$

Por tanto, $-4x^2 - 4x + 15 = -4\left(x+\dfrac{5}{2}\right)\left(x-\dfrac{3}{2}\right)$. De donde la inecuación a resolver es:

$$\frac{x+5}{-4\left(x+\frac{5}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)} \geq 0 \iff \boxed{\frac{x+5}{\left(x+\frac{5}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)} \leq 0}$$

Puesto que al pasar -4 multiplicando al otro miembro cambia el sentido de la desigualdad, puesto que $-4 < 0$. Como los números que anulan cada uno de los factores intervinientes son:



dividimos $\mathbb{R}$ en intervalos mediante esos tres puntos, obteniendo el siguiente cuadro. Dentro de cada intervalo resultante, el signo de cada uno de los factores anteriores permanece constante, por lo que, para hallarlo, basta dar a x un valor cualquiera dentro del intervalo en cuestión. Con ello, nos queda:

	$(-\infty, -5)$	-5	$(-5, -\frac{5}{2})$	$-\frac{5}{2}$	$(-\frac{5}{2}, \frac{3}{2})$	$\frac{3}{2}$	$(\frac{3}{2}, +\infty)$
$x + 5$	–	0	+	…	+	…	+
$x + \frac{5}{2}$	–	…	–	0	+	…	+
$x - \frac{3}{2}$	–	…	–	…	–	0	+
$\dfrac{x+5}{\left(x+\frac{5}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)}$	–	0	+	$\nexists$	–	$\nexists$	+
¿Sirven? →	Si	Si	No	No	Si	No	No

Al rellenar el cuadro, tenemos en cuenta que si se anula el denominador no existe el resultado final de la expresión cuyo signo estamos evaluando. Por tanto, los puntos que sirven como resultado de la inecuación constituyen el dominio; esto es:

$$\boxed{D(f) = (-\infty, -5] \cup \left(-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)}$$

2) Hallar el dominio de $y = \ln(-6x^3 + 27x^2 - 30x + 9)$

Para que exista la imagen de x, el argumento del logaritmo neperiano debe ser estrictamente positivo pues, de lo contrario, no podría calcularse. Por tanto, el dominio lo constituyen las soluciones de la inecuación: $-6x^3+27x^2-30x+9>0$
Para resolverla, descomponemos factorialmente el polinomio mediante Ruffini:

	– 6	27	– 30	9
1		– 6	21	– 9
	– 6	21	– 9	0
3		– 18	9	
	– 6	3	0	
1/2		– 3		
	– 6	0		

Luego la inecuación es: $-6(x-1)(x-3)(x-½)>0 \iff \boxed{(x-1)(x-3)(x-½)<0}$, puesto que al pasar – 6 al otro miembro dividiendo, cambia el sentido de la desigualdad, porque se trata de un factor negativo.
Para resolverla, rellenamos el siguiente cuadro, que resulta de dividir R en intervalos mediante los valores que anulan cada factor, esto es (en orden): ½, 1 y 3:

	(–∞, ½)	½	(½, 1)	1	(1, 3)	3	(3, +∞)
$x-½$	–	0	+	…	+	…	+
$x-1$	–	…	–	0	+	…	+
$x-3$	–	…	–	…	–	0	+
$(x-½)(x-1)(x-3)$	–	0	+	0	–	0	+
¿Sirven? →	Si	No	No	No	Si	No	No

Donde hemos tenido en cuenta que dentro de cada intervalo resultante, el signo de cada uno de los factores anteriores permanece constante, por lo que, para hallarlo, basta dar a x un valor cualquiera de dicho intervalo en cuestión. Por tanto, la solución de la inecuación y, consiguientemente, el dominio, es:

$$\boxed{D(f)=(-\infty, ½)\cup(1, 3)}$$

3) Calcular el dominio de la siguiente función: $y=\sqrt{-2x^3+7x^2-9}$
La única operación que presenta valores para los que no puede calcularse es la raíz cuadrada. Y para que exista la raíz cuadrada, el radicando debe ser positivo.
Por tanto, los valores de x que están en el dominio son las soluciones de la inecuación:

$$-2x^3+7x^2-9\geq 0.$$

Para resolver esta inecuación, descomponemos factorialmente el polinomio, por Ruffini:

	– 2	7	0	–9
–1		2	– 9	9
	– 2	9	– 9	0
3		– 6	9	
	– 2	3	0	
3/2		– 3		
	– 2	0		

Luego la inecuación anterior se transforma en:

$$-2(x+1)(x-3/2)(x-3)\geq 0 \iff \boxed{(x+1)(x-3/2)(x-3)\leq 0}$$

Puesto que al pasar –2, que es negativo, dividiendo al segundo miembro cambia el sentido de la desigualdad. Dividiendo R en intervalos mediante los valores que anulan cada factor, que en orden son –1, 3/2 y 3, nos queda el siguiente cuadro, cuyos signos estudiamos dando a x un valor cualquiera dentro de cada intervalo, ya que los signos no varían dentro de ellos:

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 3/2)$	$3/2$	$(3/2, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$x+1$	–	0	+	…	+	…	+
$x-3/2$	–	…	–	0	+	…	+
$x-3$	–	…	–	…	–	0	+
$(x+1)(x-3/2)(x-3)$	–	0	+	0	–	0	+
¿Sirven? →	Si	Si	No	Si	Si	Si	No

Luego:

$$\boxed{D(f) = (-\infty, -1] \cup [3/2, 3]}.$$