LÍMITES DE FUNCIONES

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^3+5x^2+1}{2x^3+4x+2}$ *Sol:* 2

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+3x+1}{x+2}$ *Sol:* ∞

3) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+1}{3x^3+2x^2-5}$ *Sol:* 0

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x}\right)$ *Sol:* 0

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$ *Sol:* 0

6) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2-x+1}-x\right)$ *Sol:* –1/2

7) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+3x+2}\right)$

Sol: No existe, porque vale 1 si $x\to-\infty$, y –1 si $x\to+\infty$

8) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2-x}-\sqrt{x^2+3x}\right)$ *Sol:* –2

9) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}$ *Sol:* 1

10) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}$ *Sol:* –4

11) $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}$ *Sol:* ∞

12) $\lim\limits_{x\to3^-} \dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}$ *Sol:* $-\infty$

13) $\lim\limits_{x\to3^+} \dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}$ *Sol:* $+\infty$

14) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-1}{x^3-1}$ *Sol:* 0

15) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2-1}{x^3-1}$ *Sol:* 2/3

16) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3+3x^2+x+6}{x^2+3x+2}$ *Sol:* ∞

17) $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{2x^3+3x^2+x+6}{x^2+3x+2}$ *Sol:* –13

18) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$ *Sol:* 0

19) $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$ *Sol:* $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

20) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x^2-9}$ *Sol:* 0

21) $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x^2-9}$ *Sol:* $\dfrac{\sqrt{3}}{36}$

22) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-2x-8}$ *Sol:* 0

23) $\lim\limits_{x\to4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-2x-8}$ *Sol:* 1/24

24) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1-\sqrt{1-x}}{x}$ *Sol:* 0

25) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1-\sqrt{1-x}}{x}$ *Sol:* 1/2

26) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2-x^2}{\sqrt{2x}-2}$ *Sol:* $-\infty$

27) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{2-x^2}{\sqrt{2x}-2}$ *Sol:* ∞

28) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{2x+1}-3}$ *Sol:* $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

29) $\lim\limits_{x\to4} \dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{2x+1}-3}$ *Sol:* –3/4

30) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{5x+4}-3}{2-\sqrt{4x}}$ *Sol:* $-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

31) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt{5x+4}-3}{2-\sqrt{4x}}$ *Sol:* –5/6

32) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x+1}{3x}\right)^{x^2-1}$ *Sol:* 0

33) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x+1}{3x}\right)^{1-x^2}$ *Sol:* $+\infty$

34) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x+1}{2x}\right)^{x^2-1}$ *Sol:* ∞

35) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x+1}{2x}\right)^{1-x^2}$ *Sol:* 0

36) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x+1}{3x}\right)^{\frac{4}{x^2-1}}$ *Sol:* 1

37) $\lim\limits_{x\to1} \left(\dfrac{2x+1}{3x}\right)^{\frac{4}{x^2-1}}$ *Sol:* $e^{-2/3}$

38) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1-\dfrac{3}{x}\right)^{x-1}$ *Sol:* e^{-3}

EJEMPLOS RESUELTOS

3) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x+1}{3x^3+2x^2-5}$

Si $x\to\infty$, los polinomios tienden a ∞. Cuando tenemos un cociente de polinomios (aunque alguno de ellos esté dentro de una raíz), con $x\to\infty$ y con indeterminación del tipo ∞/∞, podemos sustituir tanto el numerador como el denominador por su respectivo término (sumando) de mayor grado (porque es el que va tomando valores cada vez más positivos, o negativos, y el resto de sumandos adquiere valores despreciables comparados con el de mayor grado). Así:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{3x^3+2x^2-5} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{3x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{3x^2} = \left(\frac{1}{\infty}\right) = \boxed{0}.$$

7) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+3x+2}\right)$

Si tenemos una resta en la que interviene alguna raíz cuadrada y $x\to\infty$ de forma que aparece la indeterminación $\infty-\infty$, no podemos sustituir por el término de mayor grado, como en el problema 3. En estos casos hay que empezar multiplicando y dividiendo por el conjugado de dicha resta (con lo que la expresión no varía, porque multiplicamos por 1). De esta forma:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+3x+2}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+3x+2}\right)\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+3x+2}\right)}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+3x+2}} =$$

como suma por diferencia es diferencia de cuadrados:

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(x^2+x)-(x^2+3x+2)}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+3x+2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x-x^2-3x-2}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+3x+2}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-2x-2}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+3x+2}} =$$

Al sustituir, tendríamos la indeterminación ∞/∞ con $x\to\infty$, por lo que podemos sustituir, tanto numerador como denominador, por sus respectivos términos de mayor grado:

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-2x}{\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-2x}{2\sqrt{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2}}$$

Como $\sqrt{x^2} = |x|$ (puesto que la raíz lleva delante signo +, dado que no se ha puesto expresamente $\pm$, por lo que el resultado debe tomarse en positivo; por ejemplo $\sqrt{(-2)^2} = |-2|$), y $|x| = x$ si $x > 0$, pero $|x| = -x$ si $x < 0$, hemos de distinguir entre si $x\to-\infty$ o $x\to+\infty$ (∞ sin signo los engloba a ambos):

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{|x|} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{-x} = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{|x|} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{x} = -1$$

Como estos son los límites laterales del límite que estamos calculando, y producen resultados diferentes, $\boxed{\text{el límite completo no existe}}$: Tener presente que el límite completo da un resultado si, y sólo si los laterales dan ese mismo resultado.

10) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}$

Si sustituimos, aparece la indeterminación 0/0. En caso de cociente de polinomios, descomponemos factorialmente numerador y denominador. En el numerador podemos aplicar que *suma por diferencia es diferencia de cuadrados* por lo que se puede descomponer en $(x-2)(x+2)$. Y en el denominador podemos resolver la ecuación de segundo grado que resulta de igualarlo a 0, donde obtenemos las soluciones 2 ó 3, por lo que, como el coeficiente de x^2 es 1, se puede descomponer en $1\cdot(x-2)(x-3)$. Pero *siempre* podremos descomponer por Ruffini, probando con el valor al que tiende x (2, en nuestro problema). Por tanto:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x-3} = \frac{4}{-1} = \boxed{-4}$$

11) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-4}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x\to 3}\frac{x+2}{x-3} = \left(\frac{4}{0}\right) = \boxed{\infty}$$

12) $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}$

Los límites laterales consisten en que x tiende al valor que corresponda sólo con valores menores que él (límite *por la izquierda*) o mayores (límite *por la derecha*). El límite completo da un resultado si, y sólo si los laterales dan ese mismo resultado. Como en el problema anterior hemos calculado el límite completo, y éste da ∞, <u>los dos límites laterales también dan ∞</u>. Lo que pasa es que en el completo sólo podemos asegurar, como resultado, ∞ sin signo, mientras que los laterales permiten asignarle signo al ∞. Si ambos laterales dieran $+\infty$, el completo también sabríamos que daría $+\infty$, y lo mismo con $-\infty$.
Para calcular el signo de este ∞, lo más cómodo es tomar la calculadora y sustituir por un valor muy próximo al número al que se tiende por el lado correspondiente, esto es, en este caso, por la izquierda. Por consiguiente, tomamos, por ejemplo $x = 2.99$, y con la calculadora nos resulta –499. Es decir, al infinito al que se aproxima es a $-\infty$, puesto que la expresión va tomando valores negativos cuando nos acercamos a 3 por la izquierda. En consecuencia:

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-4}{x^2-5x+6} = \boxed{-\infty}$$

13) $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}$

De la misma forma, sustituyendo $x = 3.01$ y usando la calculadora, obtenemos 501. Por tanto, el ∞ al que se aproxima la expresión al acercarse a 3 por la derecha es $+\infty$:

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-4}{x^2-5x+6} = \boxed{+\infty}$$

16) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+3x^2+x+6}{x^2+3x+2}$

Como los polinomios tienden a ∞ cuando $x\to\infty$, obtenemos la indeterminación ∞/∞. En caso de cociente de polinomios, la tendencia la marca el sumando de mayor grado en cada polinomio, pues el resto de sumandos toma valores despreciables frente al mismo. Por tanto:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+3x^2+x+6}{x^2+3x+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3}{x^2} = \lim_{x\to\infty} 2x = \infty$$

Todos los infinitos son sin signo (engloban tanto a +∞ como a –∞).

17) $\lim_{x\to -2} \frac{2x^3+3x^2+x+6}{x^2+3x+2}$

Al sustituir x por –2, resulta la indeterminación 0/0. En caso de cociente de polinomios, hay que descomponerlos por Ruffini, probando el valor a quien tiende x (–2, en nuestro caso):

	2	3	1	6
–2		–4	2	–6
	2	–1	3	0

	1	3	2
–2		–2	–2
	1	1	0

Por tanto:

$$\lim_{x\to -2} \frac{2x^3+3x^2+x+6}{x^2+3x+2} = \lim_{x\to -2} \frac{(x-2)(2x^2-x+3)}{(x-2)(x+1)} = \lim_{x\to -2} \frac{2x^2-x+3}{x+1} = \frac{8+2+3}{-2+1} = \boxed{-13}$$

22) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-2x-8}$

Al obtener la indeterminación ∞/∞, nos quedamos con el sumando de máxima potencia en numerador y lo mismo en denominador:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-2x-8} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^{1/2}}{x^2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^{2-\frac{1}{2}}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} = \left(\frac{1}{\infty}\right) = \boxed{0}$$

23) $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-2x-8}$

La indeterminación aquí es 0/0. Como hay una resta en la que interviene una raíz cuadrada, el procedimiento es multiplicar numerador y denominador por el conjugado de dicha resta, y aplicar que *suma por diferencia es diferencia de cuadrados*:

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-2x-8} = \lim_{x\to 4} \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x^2-2x-8)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x\to 4} \frac{x-4}{(x^2-2x-8)(\sqrt{x}+2)} =$$

Seguimos con la misma indeterminación, pero ahora hay polinomios en numerador y denominador. Los factorizamos, por Ruffini con 4 (el numerador ya es irreducible):

	1	–2	–8
4		4	8
	1	2	0

$$= \lim_{x\to 4} \frac{x-4}{(x-4)(x+2)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x\to 4} \frac{1}{(x+2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{6\cdot 4} = \boxed{\frac{1}{24}}.$$

24) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1-\sqrt{1-x}}{x}$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1-\sqrt{1-x}}{x} = \left(\frac{-\sqrt{+\infty}}{-\infty}\right) = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{-x}}{x} =$$

donde nos hemos quedado con el término de mayor grado tanto en numerador como en denominador. Pero no es fácil unificar las x. Por ello, haremos un *cambio de variable*: llamamos $t = -x$- Así, si $x\to-\infty \Leftrightarrow t\to+\infty$. De este modo:

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{-\sqrt{t}}{-t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^{1/2}}{t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t^{1-\frac{1}{2}}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} = \left(\frac{1}{\infty}\right) = \boxed{0}$$

25) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1-\sqrt{1-x}}{x}$

Obtenemos 0/0. Multiplicamos numerador y denominador por el conjugado de la resta en la que interviene la raíz cuadrada:

$$\lim_{x\to0} \frac{1-\sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x\to0} \frac{(1-\sqrt{1-x})(1+\sqrt{1-x})}{x(1+\sqrt{1-x})} = \lim_{x\to0} \frac{1-(1-x)}{x(1+\sqrt{1-x})} = \lim_{x\to0} \frac{x}{x(1+\sqrt{1-x})} =$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{1}{1+\sqrt{1-x}} = \frac{1}{1+\sqrt{1}} = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

29) $\lim\limits_{x\to4} \dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{2x+1}-3}$

El problema 28 tiene la misma expresión que éste, pero con x→∞, produciendo la indeterminación ∞ / ∞. Se resuelve de forma similar a la que hicimos en el problema 22. Pero en este problema, x→4 (un número), originando la indeterminación 0 / 0. La resolución de un problema con esta indeterminación, en el que hay alguna raíz cuadrada dentro de una resta, pasa por multiplicar numerador y denominador por el conjugado de la expresión que contenga raíces y produzca un cero. Hay dos expresiones de este tipo, una en el numerador y otra en el denominador. Multiplicamos numerador y denominador, pues, por el conjugado de ambas y aplicamos que suma por diferencia es igual a diferencia de cuadrados:

$$\lim_{x\to4} \frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{2x+1}-3} = \lim_{x\to4} \frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{2x+1}-3}\,\frac{2+\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}\,\frac{\sqrt{2x+1}+3}{\sqrt{2x+1}+3} = \lim_{x\to4} \frac{(4-x)(\sqrt{2x+1}+3)}{(2x+1-9)(2+\sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{x\to4} \frac{(4-x)(\sqrt{2x+1}+3)}{(2x-8)(2+\sqrt{x})} =$$

Ahora, hemos de descomponer los polinomios resultantes en numerador y denominador por Ruffini, usando $x = 4$, número al que tiende el límite, porque tenemos la indeterminación 0/0 (en este caso, podemos extraer factor común –1 en numerador y 2 en denominador, obteniendo el mismo resultado; pero no siempre lo vamos a ver tan claro):

$$\begin{array}{c|cc} & -1 & 4 \\ 4 & & -4 \\ \hline & -1 & \boxed{0} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c|cc} & 2 & -8 \\ 4 & & 8 \\ \hline & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

Por tanto, nos resulta:

$$= \lim_{x\to 4}\frac{-(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)}{2(x-4)(2+\sqrt{x})} = \lim_{x\to 4}\frac{-(\sqrt{2x+1}+3)}{2(2+\sqrt{x})} = \frac{-(3+3)}{2(2+2)} = \boxed{-\frac{3}{4}}.$$

38) $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{x-1}$

Los problemas 32 al 36 no originan indeterminaciones, por lo que son inmediatos (consultar el resumen de resultados de límites en los que intervienen 0 ó ∞). En cambio, el 37 y 38 dan indeterminaciones del tipo 1^∞, que son límites del tipo número *e*. Cuando un límite produce esta indeterminación, se sustituye de la siguiente forma:

$$\lim_{x\to(lo\ que\ sea)} f(x)^{g(x)} = (1^\infty) = \lim_{x\to(lo\ que\ sea)} e^{g(x)(f(x)-1)}$$

Por tanto:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{x-1} = \lim_{x\to\infty} e^{(x-1)\left(1-\frac{3}{x}-1\right)} = \lim_{x\to\infty} e^{(x-1)\left(-\frac{3}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{-3x+3}{x}} =$$

El exponente es un cociente de polinomios que da lugar a una indeterminación del tipo ∞/∞ con $x\to\infty$, que sabemos que se puede resolver sustituyendo cada polinomio por su termino de mayor grado:

$$= \lim_{x\to\infty} e^{\frac{-3x}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{-3} = \boxed{e^{-3}}.$$