EXTREMOS RELATIVOS (o locales), PUNTOS ANGULOSOS Y PUNTOS DE INFLEXIÓN (Resumen)

Los máximos y mínimos relativos deben deducirse del cuadro de monotonía, de la siguiente forma:

- $f(x)$ tiene un mínimo relativo en $(a, f(a))$ $\Leftrightarrow$ f es continua en $x = a$ y a la izquierda de a es decreciente y a la derecha, creciente.

- $f(x)$ tiene un máximo relativo en $(a, f(a))$ $\Leftrightarrow$ f es continua en $x = a$ y a la izquierda de a es creciente y a la derecha, decreciente.

Tener en cuenta que puede haber un extremo relativo en un *punto de conexión de definiciones de una función definida a trozos*, aunque la función no sea derivable pero sí continua en dicho punto.

Los puntos de inflexión deben deducirse del cuadro de curvatura, de la siguiente forma:

- $f(x)$ tiene un punto de inflexión en $(a, f(a))$ $\Leftrightarrow$ f es continua en $x = a$ y La curvatura es diferente a la izquierda y a la derecha de $x = a$ (a un lado es convexa y al otro, cóncava).

Tener en cuenta que puede haber un extremo relativo en un *punto de conexión de definiciones de una función definida a trozos*, aunque la función no sea derivable pero sí continua en dicho punto.
Puede haber punto de inflexión con tangente horizontal en $x = a$ si $f'(a) = 0$ y hay cambio en la curvatura a izquierda y a derecha del mismo.

- f es continua en $x = a$ y $f'(a^-) \neq f'(a^+) \Rightarrow f$ tiene un punto anguloso en $(a, f(a))$. En un punto anguloso la función puede tener también un extremo relativo o un punto de inflexión. La gráfica tiene un "pico" en el punto anguloso.

EXTREMOS ABSOLUTOS (o globales) (Resumen)

Planteamiento del problema

Si hay que plantear el problema, hemos de construir la función que hay que optimizar (maximizar o minimizar), y su dominio. Si dicha función es de dos variables, debemos poder relacionarlas mediante una *restricción* (una ecuación que las vincula), de forma que, al despejar una variable en función de la otra, nuestra función se transforme en otra de una sola variable.
Para construir el dominio de la misma, a veces vemos fácilmente el valor mínimo de la variable que ha quedado, pero no el máximo (o al revés). Si hay dos variables relacionadas mediante una restricción, el valor mínimo de la que se elimina (despejamos una en función de la otra y nos quedamos con una sola variable en la función a optimizar), nos suele ayudar a calcular el máximo de la otra variable, o al revés.

Cálculo

Podemos optar por *estudiar la función completa y dibujar la gráfica* o *estudiar sólo la monotonía*, deduciendo de ahí *si tiene* extremos absolutos, *cuánto valen* y *dónde se alcanzan*.

Pero el método estándar es el siguiente:

- Se calculan los *puntos que estén en una de las categorías siguientes*:
    - Extremos del dominio de f (intervalo en el que está definida, que puede ser $(-\infty, +\infty)$).
    - Discontinuidades de f.
    - Discontinuidades de f'.
    - Soluciones de la ecuación $f'(x) = 0$ (posibles extremos relativos).
- *Se comparan las imágenes (o límites*, si no existen) de f en los puntos hallados. Para los puntos de discontinuidad de f siempre se calculan imágenes, si existen, y límites (laterales, si no existe el límite completo). **El máximo absoluto se alcanza en el valor de x que proporcione la mayor de dichas imágenes**, y el mínimo absoluto, en el que suministre la menor. **Si** la mayor (o la menor) de las imágenes **corresponde a un límite**, el máximo (mínimo) absoluto **no se alcanza**: es un supremo (o un ínfimo). El máximo (mínimo) absoluto **puede alcanzarse en más de un valor de x**.

  Hay que indicar *cuánto vale el extremo absoluto* (máxima o mínima imagen) y *dónde se alcanza* (valor o valores de x que proporcionan tal imagen).
- **Si** el máximo (mínimo) absoluto **coincide con un extremo relativo**, se aconseja comprobar qué tipo de extremo relativo es, mediante el **signo de f''** (positivo $\Rightarrow$ máximo; negativo $\Rightarrow$ mínimo), si bien no es en absoluto necesario.