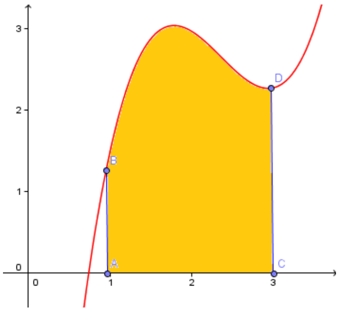
INTEGRAL DEFINIDA

1. Área bajo la curva



Si la gráfica de una función continua $y=f(x)$ está *por encima del eje OX*, el área entre la curva y el eje OX viene dada por la expresión:

$$\int_a^b f(x)dx$$

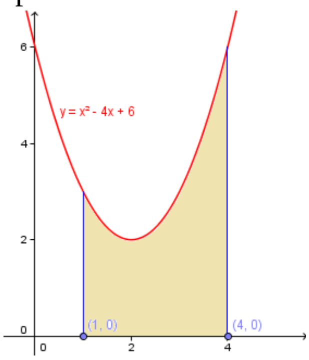
que se lee integral entre a y b de f(x).

Por ejemplo, el área del gráfico es $\int_1^3 f(x)dx$

El siguiente teorema nos dice cómo calcular el valor de dicha expresión.

Teorema (Regla de Barrow): “$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$, donde $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$.”

Según el teorema anterior, el cálculo de una integral definida es igual al de la indefinida, hallando, a continuación, el valor del resultado en el límite superior (b) y en el límite inferior (a) de la integral, restando dichos resultados. Por tanto, la integral definida da, como resultado, un número (y no una función, que es lo que se obtenía de la integral indefinida). Dicho número es el área antes indicada. Además, se prescinde de la constante de integración.

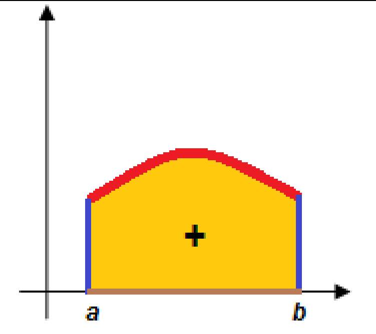
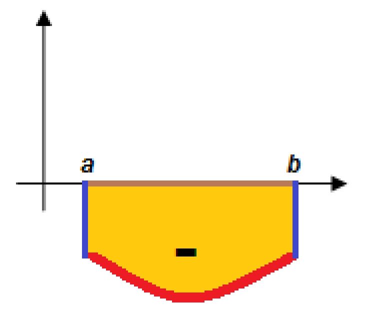
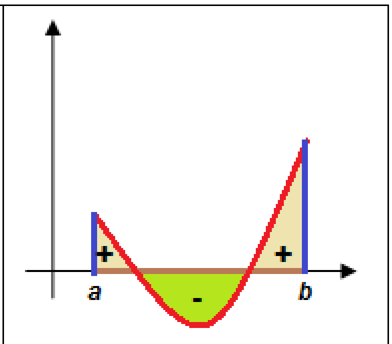


Ejemplo: $\int_1^4 (x^2 - 4x + 6)dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 6x\right]_1^4 =$

$$= \left(\frac{4^3}{3} - 2\cdot 4^2 + 6\cdot 4\right) - \left(\frac{1^3}{3} - 2\cdot 1^2 + 6\cdot 1\right) = \boxed{9} \quad \blacksquare$$

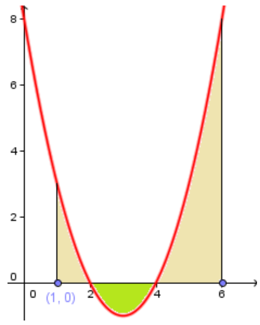
2. Área entre la curva y el eje OX

Hay que tener en cuenta lo siguiente:

		
Si en $[a, b]$ la curva está por encima del eje OX, la integral da como resultado un número *positivo* que es el valor del área entre la curva y el eje OX.	Pero si en $[a, b]$ la curva está por debajo del eje OX, la integral da como resultado un número *negativo*, que es el valor del área entre la curva cambiado de signo.	Si la curva está por encima y por debajo del eje OX, lo que proporciona la integral es la diferencia entre las áreas positivas menos las áreas negativas.

Por tanto, el procedimiento general para calcular el área entre la curva y el eje OX requiere calcular los puntos de corte de la curva con dicho eje, e integrar por separado en cada uno de los intervalos resultantes, tomando el resultado de cada integral en valor absoluto. A continuación, hay que sumar dichos resultados parciales.

Ejemplo: Calcular el área limitada por la curva $y = x^2 – 6x+8$ y el eje OX entre $x=1$ y $x=6$. Como $x^2 – 6x+8=0$ si y sólo si $x=2$ ó $x=4$, hemos de integrar en los intervalos [1, 2], [2, 4] y [4, 6].



$$\int_1^2 (x^2-6x+8)dx = \left[\frac{x^3}{3}-3x^2+8x\right]_1^2 =$$

$$= \left(\frac{8}{3}-12+16\right)-\left(\frac{1}{3}-3+8\right) = \left(\frac{8}{3}+4\right)-\left(\frac{1}{3}+5\right) = \frac{20}{3}-\frac{16}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\int_2^4 (x^2-6x+8)dx = \left[\frac{x^3}{3}-3x^2+8x\right]_2^4 = \left(\frac{64}{3}-48+32\right)-\frac{20}{3} =$$

$\left(\frac{64}{3}-16\right)-\frac{20}{3} = \frac{64-48}{3}-\frac{20}{3} = \frac{16}{3}-\frac{20}{3} = -\frac{4}{3}$ por lo que el área de esta segunda parte es $\frac{4}{3}$ (es la zona donde la curva queda bajo el eje OX).

$$\int_4^6 (x^2-6x+8)dx = \left[\frac{x^3}{3}-3x^2+8x\right]_4^6 = \left(\frac{216}{3}-3{\cdot}36+8{\cdot}6\right)-\frac{16}{3} =$$

$$= \left(\frac{216}{3}-108+48\right)-\frac{16}{3} = \frac{216}{3}-60-\frac{16}{3} = \frac{200}{3}-60 = \frac{20}{3}$$

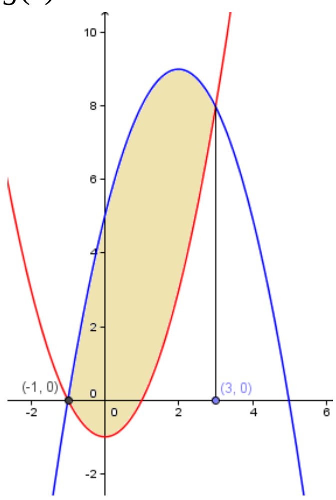
Por lo tanto, el área pedida es: $\frac{4}{3}+\frac{4}{3}+\frac{20}{3} = \boxed{\frac{28}{3}}$

3. Área entre dos curvas que se cortan

Sean dos curvas $y=f(x)$, $y=g(x)$ que se cortan en dos puntos cuyas abscisas son $x=a$ y $x=b$. Suponemos que no hay más puntos intermedios de corte en el intervalo $[a, b]$ (ver figura del ejemplo, donde $a = – 1$ $b = 3$). El área entre ambas curvas es el valor absoluto de la integral de $f–g$ en dicho intevalo:

$$\text{Área} = \left|\int_a^b (f(x)-g(x))dx\right|$$

Ejemplo: Calcular el área limitada por las curvas $f(x) = x^2–1$ y $g(x) = 5+4x–x^2$. Comenzamos hallando dónde se cortan:



$$\left.\begin{array}{r} y = x^2-1 \\ y = 5+4x-x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2-1 = 5+4x-x^2 \Rightarrow 2x^2–4x–6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -1 \text{ ó } x = 3$$

Por lo tanto:

$$\text{Área} = \left|\int_{-1}^3 \left[\left(5+4x-x^2\right)-\left(x^2-1\right)\right]dx\right| = \left|\int_{-1}^3 \left(6+4x-2x^2\right)dx\right| =$$

$$\left|\left[6x+2x^2-\frac{2}{3}x^3\right]_{-1}^3\right| = \boxed{\frac{64}{3}}$$