SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES (Resumen)

- **Expresión matricial**
- El sistema lineal de m ecuaciones con n incógnitas siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = c_m \end{array}\right\}$$

se expresa en forma matricial, así:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \ldots \\ c_m \end{pmatrix}$$

que, abreviadamente, es: $A \cdot X = C$.

- La matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ se llama **matriz de los coeficientes**.
- La matriz $A' = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & c_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & c_m \end{array}\right)$ se denomina **matriz ampliada**.
- Los valores $c_1, c_2, \ldots, c_m$ se llaman **términos independientes**. C es la matriz de los términos independientes.

- **Tipos de sistemas de ecuaciones lineales**
- Si el sistema tiene alguna solución, se dice **compatible**. En caso contrario, **incompatible**.
- Si el sistema tiene solución única, se dice **compatible determinado**. Si tiene infinitas soluciones, **compatible indeterminado**. No hay más posibilidades en lo que se refiere a sistemas compatibles.
- Si los términos independientes ($c_1, c_2, \ldots, c_m$) valen todos 0, el sistema se llama **homogéneo**. *Los sistemas homogéneos son siempre compatibles*, pues todos ellos tienen como solución $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (0, 0, \ldots, 0)$, a la que se denomina *solución trivial*. Pueden ser compatibles determinados o indeterminados, pero no incompatibles.

- **Teorema de Rouché, o de Rouché-Frobenius**
- El sistema $A \cdot X = C$ es compatible $\Leftrightarrow$ $r(A) = r(A')$
- Caso de que sea compatible, si el rango común es igual al número de incógnitas, el sistema es compatible determinado. Si es menor, es compatible indeterminado.

Notas:

1) El rango común cuando el sistema es compatible, no puede ser mayor que el número de incógnitas (pues éste es el número de columnas de A, y el rango de una matriz es el número de columnas, y de filas, linealmente independientes).
2) Si $r(A) \neq r(A')$ es porque $r(A) < r(A')$, pues A' es idéntica a A pero con una columna más, que será la que no dependa linealmente del resto de columnas.

- **Regla de Cramer**
- Si:
  1) $m = n$ (igual número de ecuaciones que de incógnitas) y
  2) $|A| \neq 0$ (o sea, el sistema es compatible determinado, porque A' sólo tiene n filas),

  entonces, las soluciones son:

$$x_1 = \frac{|A_{x_1}|}{|A|}, \quad x_2 = \frac{|A_{x_2}|}{|A|}, \quad \dots \quad , x_n = \frac{|A_{x_n}|}{|A|}$$

  donde A_{x_i} es la matriz resultante de sustituir en la matriz A la columna de los coeficientes de x_i por la columna de los términos independientes.

- **Discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales cualesquiera**
- Calculamos $r(A)$ y $r(A')$ y los comparamos.
  - Si $r(A) \neq r(A')$, el sistema es <u>incompatible</u> y no tiene solución.
  - Si $r(A) = r(A')$, entonces:
    - Si $r(A) = r(A') = n$, el sistema es <u>compatible determinado</u> y se puede resolver por <u>Cramer</u>.
    - $r(A) = r(A') < n$, el sistema es <u>compatible indeterminado</u>.
      - Las incógnitas que no forman parte del menor principal se pasan al segundo miembro (el de los términos independientes).
      - Cada una de ellas se considera un parámetro, es decir, una letra cuyo valor podemos elegir arbitrariamente, y que tratamos como si fuera un número conocido.
      - Queda un nuevo sistema con una matriz de los coeficientes cuadrada cuyo determinante es no nulo (el menor principal).
      - Por tanto, para cada valor arbitrario de los parámetros, el sistema sería compatible determinado y se puede resolver por Cramer.
      - Se obtienen infinitas soluciones, porque para cada conjunto de valores arbitrarios de los parámetros se obtiene un conjunto de soluciones diferente.
- Si <u>en el sistema de ecuaciones inicial hay parámetros</u>, se realiza el estudio del rango procediendo a la inversa, es decir, de mayor a menor dimensión, tal como se indicó en el documento de *Determinantes*.

- **Discusión y resolución por el método de Gauss**
- <u>Se *triangulariza* la matriz ampliada</u> como se explicó en el documento de Determinantes cuando explicamos cómo calcular el rango de una matriz por el método de

Gauss, pero teniendo en cuenta que la columna correspondiente a los términos independientes no puede ser, en ningún paso, la que se trabaje para convertir en ceros todas sus posiciones menos la de la fila usada en el paso actual y en los anteriores. Es decir, en realidad triangularizamos la parte de la matriz de los coeficientes, pero trabajando con la matriz ampliada completa.

- Tras *triangularizar*:
  - Si alguna fila está compuesta íntegramente de *ceros* salvo la posición correspondiente a los términos independientes, el sistema es **incompatible**: No tiene solución y hemos terminado.
  - Si alguna fila resulta estar completamente compuesta de *ceros*, se elimina: la ecuación correspondiente es combinación lineal del resto y no aporta información al sistema.
  - Si tras ello resulta igual número de ecuaciones que de incógnitas, el sistema es **compatible determinado**. Para resolverlo, lo volvemos a escribir completo según la matriz ampliada ya triangularizada, y vamos hallando los valores de las incógnitas, empezando por la ecuación que consta de una sola incógnita y sustituyendo en las restantes: en la que tiene esa incógnita y otra, en la que las dos incógnitas conocidas hasta ahora aparecen con una tercera, etc.
  - Si, por el contrario, el número de ecuaciones resultantes es menor que el número de incógnitas, el sistema es **compatible indeterminado**. Quedarán más incógnitas que ecuaciones, de modo que, para resolverlo, escribimos el sistema correspondiente a la matriz triangularizada y pasamos al segundo miembro las incógnitas como exceden, considerándolas *parámetros*, es decir, como si cada una tuviera un valor conocido elegido libremente por nosotros. Así, el sistema sería como si fuera compatible determinado y se resuelve como se dijo antes. Para cada valor arbitrario de las incógnitas-parámetros, sale un conjunto de soluciones, y es por ello por lo que el sistema tiene infinitos conjuntos de soluciones.