

ESPACIOS AFÍN Y EUCLÍDEO

Nota: Los procedimientos expuestos no son los únicos que resuelven los problemas

• **Definición**

El espacio afín son los puntos coexistiendo junto al espacio vectorial V_3 , con un *sistema de referencia* (un punto fijo O del espacio y una base, que siempre consideramos ortonormal). Se identifican las coordenadas de los puntos con las de sus vectores de posición (ver definición un poco más adelante).

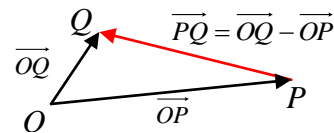
El espacio euclídeo o métrico es lo mismo, pero disponiendo del producto escalar, con lo que se puede hablar de ángulos, perpendicularidad, distancias y áreas. Normalmente trabajamos en el espacio euclídeo, con todas las herramientas a nuestro alcance.

• **Vector de posición**

Si $P(x, y, z) \Rightarrow$ Su vector de posición es el que une el origen del sistema de referencia O con el punto P . Como se ha dicho, P y su vector de posición se identifican y tienen las mismas coordenadas: $\overrightarrow{OP} = (x, y, z)$

• **Coordenadas del vector que une dos puntos**

$P(x, y, z); Q(x', y', z') \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = (x'-x, y'-y, z'-z)$

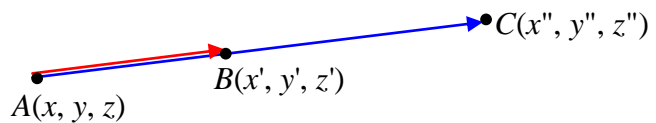


• **Comprobar si tres puntos están alineados**

$A(x, y, z), B(x', y', z'), C(x'', y'', z'')$ están alineados si los vectores

$\overrightarrow{AB} = (x'-x, y'-y, z'-z)$ y

$\overrightarrow{AC} = (x''-x, y''-y, z''-z)$ tienen la



misma dirección. Esto es, si son proporcionales. Si los denominadores son no nulos, la condición es:

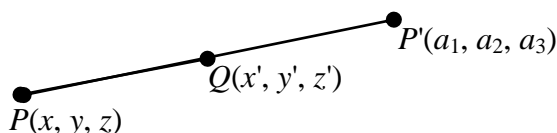
$$\frac{x''-x}{x'-x} = \frac{y''-y}{y'-y} = \frac{z''-z}{z'-z}$$

y, en general, por rangos: $\text{rango} \begin{pmatrix} x'-x & y'-y & z'-z \\ x''-x & y''-x & z''-z \end{pmatrix} = 1$

• **Punto medio de un segmento**

$A(x, y, z), B(x', y', z') \Rightarrow M\left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}, \frac{z+z'}{2}\right)$

• **Simétrico de un punto respecto de otro**

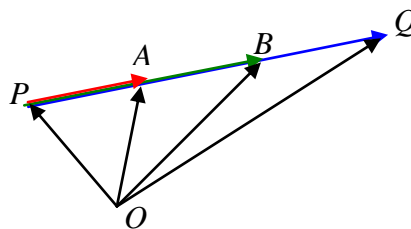


Conocidos $P(x, y, z)$ y $Q(x', y', z')$, para hallar las coordenadas de P' consideramos que Q es el punto medio del segmento PP' . Por tanto se despejan a_1, a_2 y a_3 en:

$$\frac{x+a_1}{2} = x' \quad \frac{y+a_2}{2} = y' \quad \frac{z+a_3}{2} = z'$$

• **Dividir un segmento en varios iguales**

Por ejemplo, para dividir el segmento PQ en 3 partes iguales, hallamos las coordenadas de los puntos que causan la división: A y B . Es lo mismo que calcular las coordenadas de sus vectores de posición:



$$\vec{OA} = \vec{OP} + \vec{PA} = \vec{OP} + \frac{1}{3}\vec{PQ} = \vec{OP} + \frac{1}{3}(\vec{OQ} - \vec{OP})$$

$$\vec{OB} = \vec{OP} + \vec{PB} = \vec{OP} + \frac{2}{3}\vec{PQ} = \vec{OP} + \frac{2}{3}(\vec{OQ} - \vec{OP})$$

• **Módulo de un vector** (Espacio euclídeo)

Se calcula por medio del producto escalar. Si $\vec{u} = (x, y, z)$:

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

• **Ecuación de la recta**

• **Conocidos un punto $P(p_1, p_2, p_3)$ y un vector de dirección $\vec{d} = (d_1, d_2, d_3)$**

○ Ecuación vectorial

$$(x, y, z) = (p_1, p_2, p_3) + \lambda (d_1, d_2, d_3)$$

○ Ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = p_1 + \lambda d_1 \\ y = p_2 + \lambda d_2 \\ z = p_3 + \lambda d_3 \end{cases} \quad \text{Es la ec. vectorial escrita componente a componente.}$$

○ Ecuación continua

$$\frac{x - p_1}{d_1} = \frac{y - p_2}{d_2} = \frac{z - p_3}{d_3} \quad \text{Son tres igualdades (1ª = 2ª, 2ª = 3ª, 1ª = 3ª).}$$

Si **se conocen dos puntos** de la recta, $A = (a_1, a_2, a_3)$ y $B = (b_1, b_2, b_3) \Rightarrow \vec{d} = \vec{OB} - \vec{OA} = (b_1, b_2, b_3) - (a_1, a_2, a_3) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$ es un *vector de dirección* de la misma, y se pueden construir las ecuaciones vectorial, paramétricas y continua.

• **Conocidos dos planos cuya intersección es la recta**

○ Ecuación en forma implícita o general

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{La matriz de los coeficientes tiene rango 2.} \\ \text{Cada una de las dos ecuaciones es un plano.} \end{array}$$

Hay infinitas ecuaciones vectoriales, paramétricas, continuas e implícitas de una misma recta.

• **Paso entre vectorial, paramétricas y continua**

Es trivial, por cuanto están explicitados el punto y el vector de dirección.

• **Paso de vectorial / paramétricas / continua a forma implícita (general)**

Se escribe la ec. en forma continua. Se toman dos cualesquiera de las tres igualdades, se quitan denominadores y se despejan para igualarlas a 0.

- Paso de forma implícita (general) a paramétricas**
 - Si en cada una de las dos ecuaciones aparecen sólo dos variables, una de ellas repetida, a la variable que se repite se le llama λ y se despeja la otra variable en cada una de las dos ecuaciones. La tercera ecuación paramétrica es la variable repetida igualada a λ .
 - En caso contrario, se busca un menor de orden 2 distinto de cero en las ecuaciones implícitas. La variable que no figura en el menor, se iguala a λ y se pasa al segundo miembro. Se resuelve el sistema, en función de λ . La tercera ecuación paramétrica es la variable que se pasó al segundo miembro igualada a λ . En el caso de que una de las variables no aparezca en ninguna de las dos ecuaciones, el procedimiento es el mismo; la particularidad es que las variables que sí aparecen van a proporcionar valores fijos, y la variable que no está se iguala a λ .
- Conseguir un vector de dirección desde la forma implícita (general)**
 Se puede pasar a paramétricas. O se multiplican vectorialmente $(a, b, c) \times (a', b', c')$.
- Conseguir coordenadas de puntos de la recta**
 En paramétricas o vectorial, se da a λ un valor arbitrario. Es lo más fácil.
 En continua o implícita, se da un valor arbitrario a una de las variables, y se despejan las otras dos.
- Saber si un punto está en la recta**
 En paramétricas, se sustituyen las variables por las coordenadas del punto. El λ resultante debe ser el mismo en las tres ecuaciones que quedan; de lo contrario, el punto no está en la recta.
 En continua o implícita, se sustituyen las variables por las coordenadas del punto y se ve si las igualdades resultan ciertas (sí pertenece) o falsas (no está en la recta).
- Posiciones relativas de dos rectas**
 Pueden: a) Cruzarse (sin cortarse); b) Cortarse; c) Ser paralelas; d) Coincidentes.
 En los casos *a* y *b* los vectores de dirección son lin. indep. (es decir, no son proporcionales, uno no es múltiplo del otro). Se diferencian en que tienen un punto en común, o no lo tienen.
 En los casos *c* y *d* los vectores de dirección respectivos son lin. dependientes (es decir, son proporcionales, uno es múltiplo del otro). Se diferencian en que tienen algún punto en común (tendrán infinitos, entonces) o no lo tienen.
 Para averiguarlo, lo más fácil es igualar las ecuaciones paramétricas respectivas, pero tomando letras distintas para los parámetros: por ejemplo *s* para el de la primera recta y *t* para el de la segunda. Se discute el sistema resultante de tres ecuaciones con dos incógnitas *s* y *t*:

$$r_1 \equiv \begin{cases} x = p_1 + sd_1 \\ y = p_2 + sd_2 \\ z = p_3 + sd_3 \end{cases} \quad r_2 \equiv \begin{cases} x = p'_1 + td'_1 \\ y = p'_2 + td'_2 \\ z = p'_3 + td'_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} sd_1 - td'_1 = p'_1 - p_1 \\ sd_2 - td'_2 = p'_2 - p_2 \\ sd_3 - td'_3 = p'_3 - p_3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$A' = \begin{pmatrix} d_1 & d'_1 & p'_1 - p_1 \\ d_2 & d'_2 & p'_2 - p_2 \\ d_3 & d'_3 & p'_3 - p_3 \end{pmatrix}$$

Si $\text{ran}(A) = 1 \Rightarrow$ Igual dirección $\Rightarrow \begin{cases} \text{ran}(A') = 1 \Rightarrow \text{S. comp. ind. : Coincident es} \\ \text{ran}(A') = 2 \Rightarrow \text{S. incompatible : Paralelas} \end{cases}$

Si $\text{ran}(A) = 2 \Rightarrow$ Distinta dirección $\Rightarrow \begin{cases} \text{ran}(A') = 2 \Rightarrow \text{S. comp. det. : Se cortan} \\ \text{ran}(A') = 3 \Rightarrow \text{S. incompatible : Se cruzan} \end{cases}$

• **Ecuación del plano**

• **Conocidos un punto $P(p_1, p_2, p_3)$ y dos vectores de dirección $\vec{u}=(u_1, u_2, u_3), \vec{v}=(v_1, v_2, v_3)$ no proporcionales**

○ Ecuación vectorial

$$(x, y, z) = (p_1, p_2, p_3) + \lambda (u_1, u_2, u_3) + \mu (v_1, v_2, v_3)$$

○ Ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = p_1 + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = p_2 + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = p_3 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases}$$

Si **se conocen tres puntos del plano que no estén alineados**: $A = (a_1, a_2, a_3), B = (b_1, b_2, b_3)$ y $C = (c_1, c_2, c_3) \Rightarrow$

$$\vec{u} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (b_1, b_2, b_3) - (a_1, a_2, a_3) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (c_1, c_2, c_3) - (a_1, a_2, a_3) = (c_1 - a_1, c_2 - a_2, c_3 - a_3)$$

son dos *vectores de dirección* del plano, y se pueden construir las ecuaciones vectorial y paramétricas.

• **Ecuación implícita (general)**

$ax + by + cz + d = 0$ $\vec{n} = (a, b, c)$ es un vector *normal* (perpendicular) al plano.

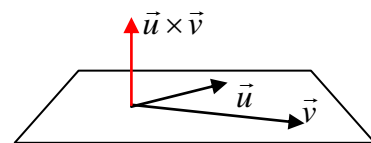
• **Obtener puntos del plano**

En paramétricas, se dan valores arbitrarios a λ y μ . En implícita, se da un valor arbitrario a dos de las tres variables, y se despeja la otra.

• **Obtener un vector normal al plano**

En paramétricas, multiplicamos vectorialmente los dos vectores de dirección: $\vec{u} \times \vec{v}$.

En implícita, lo tenemos directamente: $\vec{n} = (a, b, c)$.



• **Saber si un punto está en el plano**

○ Paramétricas

En paramétricas, al sustituir (x, y, z) por $A(a_1, a_2, a_3)$, deben existir λ y μ que proporcionen las coordenadas de A . Luego el sistema:

$$\begin{cases} a_1 = p_1 + \lambda u_1 + \mu v_1 & \lambda u_1 + \mu v_1 = a_1 - p_1 \\ a_2 = p_2 + \lambda u_2 + \mu v_2 & \lambda u_2 + \mu v_2 = a_2 - p_2 \\ a_3 = p_3 + \lambda u_3 + \mu v_3 & \lambda u_3 + \mu v_3 = a_3 - p_3 \end{cases} \Rightarrow$$

debe tener solución. Por tanto, como $\text{ran}(A) = 2$ (la matriz de los coeficientes; y es así porque los vectores de dirección de un plano no son proporcionales, es decir, son linealmente independientes), la condición para ello es que $\text{ran}(A') = 2$. Esto es:

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & a_1 - p_1 \\ u_2 & v_2 & a_2 - p_2 \\ u_3 & v_3 & a_3 - p_3 \end{vmatrix} = 0$$

○ **Implícita o general**

Al sustituir (x, y, z) por $A(a_1, a_2, a_3)$, la igualdad debe resultar cierta.

- **Ecuación del plano conocidos un punto $P(p_1, p_2, p_3)$ y un vector normal $\vec{n} = (a, b, c)$**

$$a(x - p_1) + b(y - p_2) + c(z - p_3) = 0$$

- **Pasar de vectorial / paramétricas a implícita (general)**

○ **Método 1**

Aprovechando la condición, en paramétricas, para que un punto esté en el plano, siendo ese punto (x, y, z) (es decir, válido para todos y cada uno de los puntos del plano), queda:

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & x - p_1 \\ u_2 & v_2 & y - p_2 \\ u_3 & v_3 & z - p_3 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante obtenemos la ecuación implícita.

○ **Método 2**

Como tenemos un punto del plano $P = (p_1, p_2, p_3)$, y obtenemos un vector normal multiplicando vectorialmente los vectores de dirección $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$, podemos escribir la ecuación del plano cuando conocemos un punto y un vector normal.

- **Pasar de implícita (general) a vectorial / paramétricas**

A una de las variables se le llama λ , a otra, μ , y la tercera se despeja en función de λ y μ .

Si alguna de las variables no aparece, se le llama λ ó μ , aunque las variables que si están en la ecuación implícita no aparecerán en función de las que no aparecen.

- **Haz de planos de base una recta**

Todos los planos que contienen a la recta (en implícitas) $r \equiv \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$ se

obtienen para cada uno de los posibles valores de λ en la ecuación:

$$ax + by + cz + d + \lambda(a'x + b'y + c'z + d') = 0$$

salvo el plano $a'x + b'y + c'z + d' = 0$, que no sale en la fórmula anterior para ningún valor de λ . A la fórmula anterior, junto con este último plano, se le llama *haz de planos de base r*.

Así, si debemos obtener un plano que contenga a r y cumpla alguna otra condición, podemos usar la fórmula anterior para averiguarlo (nos lo proporcionará cierto valor de λ). Y si ningún valor de λ nos da la respuesta, seguramente es el plano $a'x + b'y + c'z + d' = 0$.

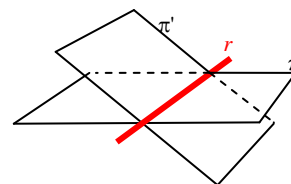
• **Posiciones relativas de dos planos**

Estudiamos el sistema formado por sus respectivas ecuaciones implícitas:

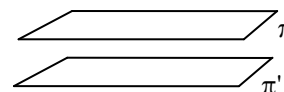
$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \Rightarrow A' = \left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{array} \right)$$

(en realidad, la última columna de la matriz ampliada sería la opuesta de lo que está escrito, pero esto es indiferente para el cálculo del rango). Tres casos posibles:

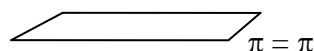
- $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2 \Rightarrow$ el sistema tiene infinitas soluciones dependientes de un parámetro (habría que llamar t a la incógnita que no está en el menor principal) \Rightarrow las soluciones serían las ecuaciones paramétricas de una recta \Rightarrow Se cortan.



- $\text{ran}(A) = 1$ y $\text{ran}(A') = 2 \Rightarrow$ Sistema incompatible \Rightarrow No tienen puntos en común \Rightarrow Planos paralelos.



- $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 1 \Rightarrow$ Una fila depende linealmente de la otra (son proporcionales) \Rightarrow Son la ecuación del mismo plano (una de ellas es múltiplo de la otra ecuación) \Rightarrow Son planos coincidentes.



• **Posiciones relativas de una recta y un plano**

Tomamos la recta en paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} x = p_1 + \lambda d_1 \\ y = p_2 + \lambda d_2 \\ z = p_3 + \lambda d_3 \end{cases}$$

y el plano, en implícita: $\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$. Intentamos calcular su intersección, sustituyendo x, y, z en la ecuación de π por sus expresiones en r :

$$a(p_1 + \lambda d_1) + b(p_2 + \lambda d_2) + c(p_3 + \lambda d_3) + d = 0$$

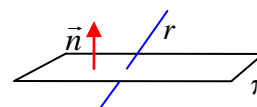
Nos queda una ecuación en λ : $ap_1 + bp_2 + cp_3 + d + \lambda(ad_1 + bd_2 + cd_3) = 0$ (1)

que, si podemos despejar, se transformará en:

$$\lambda = \frac{-(ap_1 + bp_2 + cp_3 + d)}{ad_1 + bd_2 + cd_3}$$

Casos:

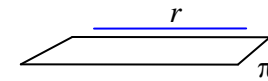
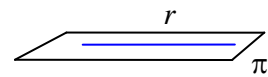
- Si el denominador es $\neq 0$: solución única para λ . Al sustituirla en las ecuaciones de r produce un punto: recta y plano se cortan en dicho punto.



En este caso, recta y plano serán perpendiculares cuando el vector de dirección de la recta $\vec{d} = (d_1, d_2, d_3)$ y el vector normal al plano $\vec{n} = (a, b, c)$ sean proporcionales.

- Si el denominador es $= 0$, no sería posible este último despeje, y la ecuación (1) tendría la forma $ap_1 + bp_2 + cp_3 + d + \lambda \cdot 0 = 0 \Rightarrow ap_1 + bp_2 + cp_3 + d = 0$. Esto puede ser cierto o no ($ap_1 + bp_2 + cp_3 + d$ es un número fijo). Entonces:

- Si es cierto, la ecuación (1) es verdadera para todo $\lambda \Rightarrow$ Todos los puntos de la recta son solución \Rightarrow la recta está contenida en el plano.
- Si no lo es, la ecuación (1) no se cumple para ningún valor de $\lambda \Rightarrow$ recta y plano no tienen ningún punto en común \Rightarrow La recta es paralela al plano.



• **Ángulo entre dos rectas**

Es el *menor* de los dos ángulos que forman sus respectivos vectores de dirección \vec{d} y \vec{d}' (por eso se toma el producto escalar del numerador en valor absoluto):

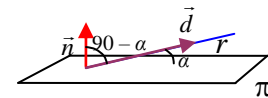
$$\cos \alpha = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{d}'|}{|\vec{d}| |\vec{d}'|}$$

• **Condición de perpendicularidad de dos rectas**

$$\vec{d} \cdot \vec{d}' = 0$$

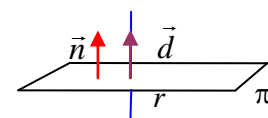
• **Ángulo entre recta y plano**

$$\text{sen } \alpha = \cos(90 - \alpha) = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{|\vec{d}| |\vec{n}|}$$



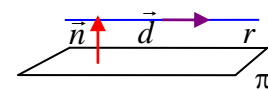
• **Condición de perpendicularidad de recta y plano**

\vec{d} y \vec{n} son proporcionales



• **Condición de paralelismo de recta y plano**

$\vec{d} \cdot \vec{n} = 0$ (son perpendiculares)



• **Ángulo entre dos planos**

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{n}'|}{|\vec{n}| |\vec{n}'|}$$

• **Condición de perpendicularidad de dos planos**

$$\vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$$

• **Distancia entre dos puntos**

Si los puntos son $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$:

$$d(P_1, P_2) = |\overrightarrow{P_1 P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

• **Distancia de un punto a un plano**

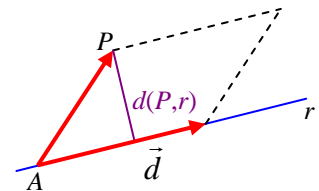
Si el punto es $P(x_1, y_1, z_1)$ y el plano es $\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$:

$$d(P, \pi) = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

• **Distancia de un punto a una recta**

Si P es el punto, A es un punto *cualquiera* de r y \vec{d} es el vector de dirección de r :

$$d(P, r) = \frac{|\vec{d} \times \vec{AP}|}{|\vec{d}|} = \frac{\text{Área del paralelogramo}}{\text{base}}$$

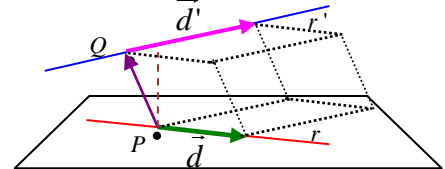


• **Distancia entre dos rectas**

- **Si son coincidentes:** $d(r, r') = 0$
- **Si son paralelas:** $d(r, r') = d(P, r')$, siendo P un punto cualquiera de r .
- **Si se cortan:** La distancia será 0.
- **Si se cruzan:** Sean P y Q sendos puntos cualesquiera de r y r' respectivamente, y sean \vec{d} y \vec{d}' los vectores de dirección de las dos rectas:

$$d(r, r') = \frac{|[\vec{d}, \vec{d}', \vec{PQ}]|}{|\vec{d} \times \vec{d}'|}$$

(Es la distancia entre los planos paralelos que contienen a cada recta y al vector de dirección de la otra recta = volumen del paralelepípedo entre área de la base = altura del paralelepípedo)



• **Perpendicular común a dos rectas que se cruzan**

Para hallar la recta s perpendicular a las rectas r y r' (que se cruzan), procedemos de la siguiente forma:

- 1) Hallamos un plano paralelo a las dos rectas: α . Para ello, tomamos los respectivos vectores de dirección de las dos rectas, y un punto cualquiera; el más fácil es $(0, 0, 0)$. El producto vectorial de los vectores de dirección de las rectas nos da un vector normal al plano α : $\vec{d} \times \vec{d}' = (n_1, n_2, n_3)$. Por tanto:

$$\alpha \equiv n_1(x-0) + n_2(y-0) + n_3(z-0) = 0$$

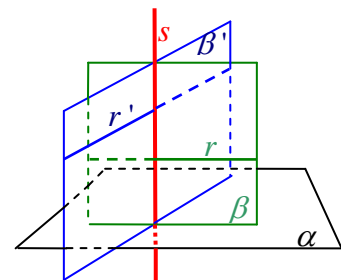
- 2) Construimos el plano β perpendicular a α y que contenga a r . Dos vectores contenidos en el plano son (n_1, n_2, n_3) y \vec{d} , y como punto vale cualquiera de r :

$$\beta \equiv \begin{vmatrix} x-a_1 & y-a_2 & z-a_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix} = 0$$

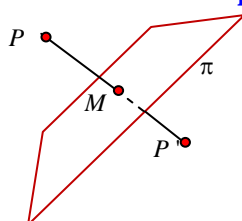
- 3) Construimos el plano β' perpendicular a α y que contenga a r' . Dos vectores contenidos en el plano son (n_1, n_2, n_3) y \vec{d}' , y como punto vale cualquiera de r' :

$$\beta' \equiv \begin{vmatrix} x-a'_1 & y-a'_2 & z-a'_3 \\ d'_1 & d'_2 & d'_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix} = 0$$

- 4) La perpendicular común buscada es la intersección de β y β' .



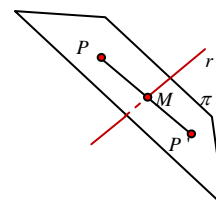
• **Simétrico de un punto respecto un plano**



- 1) Hallamos la recta perpendicular al plano que contiene al punto P , usando el vector *normal* al plano y el punto P .
- 2) Calculamos M , intersección de la recta anterior con el plano.
- 3) Calculamos el simétrico de P respecto de M .

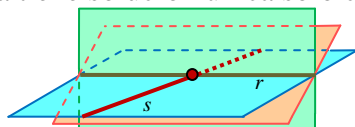
• **Simétrico de un punto respecto una recta**

- 1) Hallamos el plano π perpendicular a la recta r y que contenga al punto P , usando el vector de dirección de la recta r como vector *normal* al plano.
- 2) Hallamos M , intersección de r y π .
- 3) Calculamos el simétrico de P respecto de M .

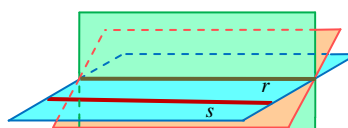


• **Plano que contiene a una recta y es paralelo a otra**

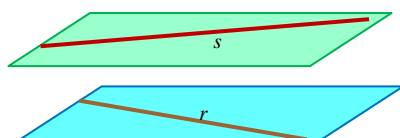
El problema tiene solución única sólo cuando las rectas se cruzan:



Si las rectas se cortan, no es posible: un plano contiene a las dos rectas. Si tomamos el haz de planos de base una de ellas (r), uno de ellos contiene a la otra recta (s) y el resto, la cortan en un punto (el común a ambas rectas).



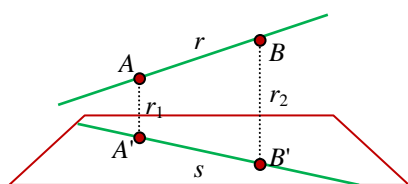
Si las rectas son paralelas, todos los planos del haz de base una de ellas (r) son paralelos a la otra, salvo uno, que la contiene también.



Si las rectas se cruzan, podemos encontrar dos planos paralelos, cada uno de los cuales contiene a una de las rectas. Luego hay un único plano que contiene a una recta (r) y es paralelo a la otra (s).

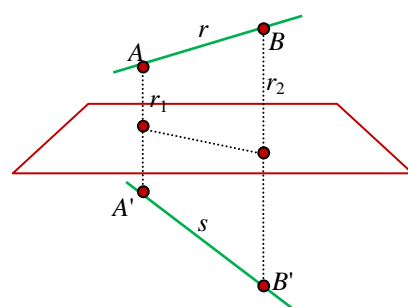
- 1) Se comprueba la posición relativa de ambas rectas.
- 2) Si se cruzan, se forma un plano con los respectivos vectores de dirección de las rectas y un punto de la recta a la que debe contener.

• **Proyección de una recta sobre un plano**



- 1) Se consiguen dos puntos A y B de la recta a proyectar (r).
- 2) Con cada uno de los puntos A y B y tomando como vector de dirección el vector normal al plano, se forman las ecuaciones de las rectas r_1 y r_2 perpendiculares al plano y que pasan por A y B .
- 3) Se calculan las intersecciones A' y B' de r_1 y r_2 con el plano.
- 4) Se forma la ecuación de la recta que pasa por A' y B' .

• **Simétrica de una recta respecto un plano**



- 1) Se consiguen dos puntos A y B de la recta (r).
- 2) Se calculan sus respectivos simétricos respecto del plano (A' y B').
- 3) Se forma la ecuación de la recta que pasa por dichos puntos simétricos.