MATEMÁTICAS 2º BACH C.N.YS. 15 de octubre de 2007

Límites y Continuidad

1) Calcular los siguientes límites: *(5 puntos)*

a) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x \operatorname{tg} x$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2^x}{4x^3 - 2}$

c) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^2 - 3}{x - 1} - \dfrac{x^2 + 3}{x + 1} \right)$

d) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x^3 - 5x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4x + 4}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt[3]{8x^3 - 5x}}{4x - 2}$

2) Calcular las derivadas de: *(3 puntos)*

a) $f(x) = -\dfrac{2x^5}{\cos x}$ b) $g(x) = -\dfrac{3}{2} \ln \sqrt{7x}$ c) $h(x) = \dfrac{e^{3x-5}}{2}$

3) Dada la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{2 - x} & \text{si } x < 0 \\ 2^{a-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Estudie la continuidad de esa función, calculando el valor de *a* que la haga continua, si es que es posible. *(2 puntos)*

[Soluciones]

1) Calcular:

a) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x \operatorname{tg} x = \pm\infty$ puesto que al tender tg *x* a ±∞ (según que *x* tienda a π/2 por la derecha o por la izquierda) mientras que sen *x* tiende a 1, el producto tiende a infinito.

b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x}{4x^3-2} = +\infty$, porque la exponencial de base mayor que 1 crece mucho más rápidamente que cualquier polinómica, por lo que el numerador produce un infinito de orden superior al del denominador. El signo es + porque el numerador es positivo (las exponenciales siempre dan resultados estrictamente positivos) y el denominador, cuando *x* tiende a +∞, también.

Con todo, lo mejor ante un examen de Selectividad no es emplear este resultado, sino L'Hôpital, que es adecuado a este nivel:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x}{4x^3-2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2^x \ln 2}{12x^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2^x \ln^2 2}{24x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x \ln^3 2}{24} = \left(\frac{\infty}{24}\right) = +\infty$$

Es +∞ porque todos los factores de numerador y denominador son siempre positivos.

c) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-3}{x-1} - \frac{x^2+3}{x+1}\right) =$ (en principio, produce la indeterminación ∞–∞) =

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x^2-3)(x+1)}{(x-1)(x+1)} - \frac{(x^2+3)(x-1)}{(x+1)(x-1)}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x^3+x^2-3x-3)-(x^3-x^2+3x-3)}{(x-1)(x+1)}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+x^2-3x-3-x^3+x^2-3x+3}{x^2-1}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-6x}{x^2-1}\right) = \frac{2}{1} = 2$$

d) $\lim_{x\to 2} \frac{3x^3-5x^2-4x+4}{x^2-4x+4}$ Produce la indeterminación 0/0. Descomponemos por Ruffini, probando en *x*=2:

	3	–5	–4	4
2		6	2	–4
	3	1	–2	0

	1	–4	4
2		2	–4
	1	–2	0

Por tanto, $\lim_{x\to 2} \frac{3x^3-5x^2-4x+4}{x^2-4x+4} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(3x^2+x-2)}{(x-2)(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{3x^2+x-2}{x-2} = =$

$\frac{12+2-2}{2-2} = \infty$ sin signo; calculando los límites laterales se vería cuando es +∞ y cuando –∞.

e) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{8x^3-5x}}{4x-2} =$ (en el ∞, equivale a quedarse sólo con los sumandos de máxima potencia) $= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{8x^3}}{4x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{8}\sqrt[3]{x^3}}{4x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{4x} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

2) Calcular las derivadas de:

a) $f(x) = -\dfrac{2x^5}{\cos x}$ **b)** $g(x) = -\dfrac{3}{2}\ln\sqrt{7x}$ **c)** $h(x) = \dfrac{e^{3x-5}}{2}$

<u>Soluciones</u>:

a) $f'(x) = -\dfrac{10x^4\cos x + 2x^5 \operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$

b) Simplificamos antes de derivar, aplicando propiedades de logaritmos neperianos: $g(x) = -\dfrac{3}{2}\dfrac{1}{2}\ln 7x = -\dfrac{3}{4}\ln 7x \Rightarrow g'(x) = -\dfrac{3}{4}\dfrac{7}{7x} = -\dfrac{3}{4x}$

c) Como $h(x) = \dfrac{1}{2}e^{3x-5} \Rightarrow h'(x) = \dfrac{1}{2}3e^{3x-5} = \dfrac{3}{2}e^{3x-5}$

3) Dada la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{2-x} & \text{si } x < 0 \\ 2^{a-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

a) Estudie la continuidad de esa función, calculando el valor de *a* que la haga continua, si es que es posible.

- <u>Intervalo (–∞,0)</u>: *f* coincide con $y = \dfrac{4}{2-x}$, que es continua en su dominio. La única operación que presenta problemas de entre las que figuran en dicha función es la división, porque no se puede dividir entre 0. Por tanto, es continua en todo R–{2} (2 anula el denominador). Pero 2, que es la única discontinuidad, no pertenece a (–∞,0), zona donde *f* coincide con esta función ⇒ *f* es continua en todo (–∞,0).
- <u>Intervalo (0,+∞)</u>: *f* coincide con $y = 2^{a-x}$, que es continua en su dominio, cualquiera que sea el valor de *a*, porque todas las exponenciales lo son. Dicho dominio, como en todas las exponenciales, es todo R ⇒ *f* es continua en todo (0,+∞).
- <u>$x = 0$</u>: En las funciones definidas a trozos, los puntos de conexión siempre hay que estudiarlos por separado. Como $\exists f(0)=2^a$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{4}{2-x} = 2$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} 2^{a-x} = 2^a$ ⇒ *f* tiene una discontinuidad de salto finito (de primera especie) en x=0 salvo si estos valores coinciden, es decir, si $2=2^a$ ⇔ $1=a$

En resumen, si *a*=1, *f* es continua en todo R, pero si *a*≠1, lo es en R–{0} y tiene una discontinuidad de salto finito en *x*=0.

MATEMÁTICAS 2º BACH C.N.YS. 9 de noviembre de 2007
Límites, Continuidad, Derivadas, Optimización

1) (Junio 03) Calcular:
   a) $\lim_{x\to+\infty} (x+3)e^{-x}$
   b) $\lim_{x\to-\infty} (x+3)e^{-x}$
   c) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{(x+3)e^{-x}}{x}$
   d) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{(x+3)e^{-x}}{x}$
2) (Junio 04) Se sabe que la función $f : (-1, +\infty) \to \mathrm{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{si} \quad -1 < x < 0 \\ \dfrac{x^2 + a}{x+1} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

   es continua en $(-1, +\infty)$. Halla el valor de a. Deriva la función para dicho valor.
3) (Junio 07) Sea $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ la función definida por $f(x) = 2x^3 + 12x^2 + ax + b$. Determina a y b sabiendo que la recta tangente a la gráfica de f en su punto de inflexión es la recta $y = 2x + 3$.
4) (Junio 07) Determina dos números reales positivos sabiendo que su suma es 10 y que el producto de sus cuadrados es máximo.

Soluciones

1) (Junio 03) Calcular:

a) $\lim_{x\to+\infty}(x+3)e^{-x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+3}{e^x} = 0$, puesto que tanto el numerador como el denominador tienden a $+\infty$, pero la exponencial produce un infinito de orden superior al de cualquier polinómica o potencia. También podría haberse resuelto fácilmente por L'Hôpital, que es como debe hacerse en Selectividad.

b) $\lim_{x\to-\infty}(x+3)e^{-x} = -\infty\cdot e^{+\infty} = -\infty\cdot(+\infty) = -\infty$. Aquí no podría aplicarse L'Hôpital, puesto que ni siquiera se produce indeterminación.

c) $\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+3)e^{-x}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+3}{x}\frac{1}{e^x} = 1\cdot\frac{1}{+\infty} = 1\cdot 0 = 0$

d) $\lim_{x\to-\infty}\frac{(x+3)e^{-x}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x+3}{x}e^{-x} = 1\cdot(+\infty) = +\infty$

2) (Junio 04) Se sabe que la función $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4x+3 & \text{si } -1<x<0 \\ \dfrac{x^2+a}{x+1} & \text{si } x\ge 0\end{cases}$$

es continua en $(-1, +\infty)$. Halla el valor de a. Deriva la función para dicho valor.

La fórmula con que se define f en el intervalo $(-1, 0)$ es un polinomio, por lo que es continua en la zona. La correspondiente a $(0, +\infty)$ es una función racional con discontinuidad en -1 (que anula el denominador); pero como $-1\notin(0, +\infty)$ no afecta a la continuidad en este intervalo. Luego la función, en efecto, es continua en todo el intervalo en el que está definida $(-1, +\infty)$, salvo quizás en el punto de conexión de las dos definiciones, esto es, x=0. En el enunciado se nos dice que ahí también es continua, por lo que vamos a exigirlo. Ello requerirá la coincidencia de los límites laterales en dicho punto:

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}(x^2-4x+3)=3 \qquad \lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{x^2+a}{x+1}=a$$

Por tanto, $a = 3$. Con ello, existirá $\lim_{x\to0}f(x)$ y coincidirá con $f(0) = a = 3$, con lo que la función será continua.

Al ser continua, podemos derivar directamente aplicando las reglas en intervalos abiertos:

$$f'(x)=\begin{cases} 2x-4 & \text{si } -1<x<0 \\ \dfrac{2x(x+1)-(x^2+3)}{(x+1)^2} & \text{si } x>0\end{cases} = \begin{cases} 2x-4 & \text{si } -1<x<0 \\ \dfrac{2x^2+2x-x^2-3}{(x+1)^2} & \text{si } x>0\end{cases} =$$

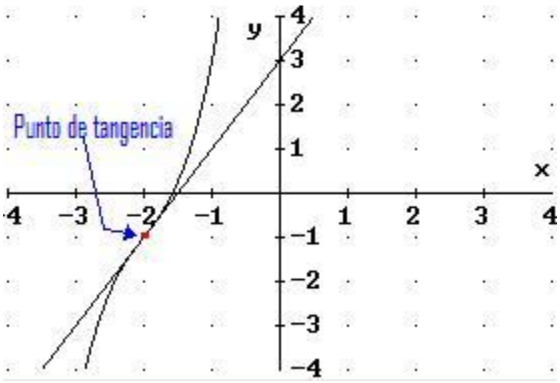
$$=\begin{cases} 2x-4 & \text{si } -1<x<0 \\ \dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2} & \text{si } x>0\end{cases}$$

Falta estudiar la existencia de $f'(0)$. Como $f'(0^-) = 2\cdot0-4 = -4$ y $f'(0^+) = -\frac{3}{1} = -3$, al no coincidir no es posible que exista. Luego la función no es derivable en x=0 y la expresión final de su derivada es la anterior.

3) (Junio 07) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = 2x^3 + 12x^2 + ax + b$. Determina a y b sabiendo que la recta tangente a la gráfica de f en su punto de inflexión es la recta $y = 2x + 3$.

Calculemos el punto de inflexión:

$f'(x) = 6x^2+24x+a$ $\qquad$ $f''(x) = 12x+24$ $\qquad$ $f'''(x) = 12$



El punto de inflexión anulará la segunda derivada, pero no la tercera. Igualando a cero la segunda derivada se obtiene $x = -2$. Como $f'''(-2) = 12 \neq 0$, es un punto de inflexión, en efecto.

En dicho punto, conocemos la tangente. El punto donde se tocan la tangente y f es común a ambas gráficas. No sabemos la fórmula completa de f, pero sí la de la tangente. Entonces, por ésta, podemos averiguar la coordenada y del punto de tangencia: $y = 2(-2)+3 = -4+3 = -1$. Luego el punto de inflexión y de tangencia es $(-2, -1)$.

Conocemos la tangente en dicho punto. Dicha tangente tiene como pendiente 2. Pero la pendiente de la tangente en $x = -2$ es $f'(-2)$. Luego $f'(-2)=2$. Es decir:

$$6(-2)^2+24(-2)+a = 2 \ \Rightarrow\ 24-48+a = 2 \ \Rightarrow\ -24+a = 2 \ \Rightarrow\ a = 26$$

Por último, sabiendo que la función pasa por $(-2, -1)$, averiguamos el parámetro b:

$$f(-2) = -1 \ \Rightarrow\ 2(-2)^3+12(-2)^2+26(-2)+b = -1 \ \Rightarrow\ -16+48-52+b = -1 \ \Rightarrow$$
$$-20+b = -1 \ \Rightarrow\ b=19$$

4) (Junio 07) Determina dos números reales positivos sabiendo que su suma es 10 y que el producto de sus cuadrados es máximo.

Sean x e y los dos números. Como $x+y = 10 \ \Rightarrow\ y = 10-x$.

Hay que maximizar el producto $x^2y^2 = x^2(10-x)^2$. Es decir, la función de la que hay que calcular el máximo absoluto es $f(x) = x^2(10-x)^2$

Además, como tanto x como $10-x$ deben ser positivos, $x \in [0, 10]$

Su derivada vale: $f'(x) = 2x(10-x)^2 + x^2 2(10-x)(-1) = 2x(10-x)[(10-x) - x] = 2x(10-x)(10-2x)$

Seguimos el procedimiento general, consistente en calcular los siguientes puntos:

a) Extremos del intervalo: 0 y 10.
b) Discontinuidades de f: No tiene, por ser polinómica.
c) Discontinuidades de f': Tampoco.
d) Puntos que anulan f': $2x(10-x)(10-2x)=0$ $\Rightarrow$ como un producto vale 0 si, y sólo si, alguno de los factores se anula, debe ser: $2x=0$ (cuya solución es $x=0$) ó $10-x=0$ (cuya solución es $x=10$) ó $10-2x = 0$ (cuya solución es $x=5$)

Comparamos el comportamiento de f en cada uno de los puntos obtenidos (imágenes o límite):

$$f(0) = 0 \qquad f(10) = 0 \qquad f(5) = 625$$

Tanto el máximo como el mínimo absoluto, si se alcanzan, están entre estos puntos. Como el mayor resultado es 625, éste es el máximo absoluto, y se alcanza en $x=5$. El procedimiento también nos ha dado el mínimo absoluto, que es 0, y que se alcanza en $x=0$ y en $x=10$.

La solución es que los números son $x=5$ y $10-x=5$, y el producto máximo es 625.

MATEMÁTICAS 2º BACH C.N.YS. 19 de noviembre de 2007

Análisis (1ª parte)

1) (Septiembre 05) Sea f: R → R la función definida por $f(x) = (x - 1)^2 e^{-x}$.
   a) Halla las asíntotas de la gráfica de f. *(2 puntos)*
   b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y calcula, si existen, sus extremos relativos o locales (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función). *(2 puntos)*
   c) Esboza la gráfica de f. *(1 punto, si es consecuencia del estudio previo)*

2) (Junio 05) De la función f: R → R definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ se sabe que tiene un máximo en $x = -1$, y que corta al eje OX en el punto de abscisa $x = -2$ y tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa $x = 0$. Calcula a, b, c y d sabiendo, además, que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$ tiene pendiente 9. *(3 puntos)*

3) (Sept 01) Determina α sabiendo que existe y es finito el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} + \alpha x}{x - \operatorname{sen}(x)}$$

   Calcula dicho límite. *(2 puntos)*

Soluciones

1) (Septiembre 05) Sea f: R → R la función definida por $f(x) = (x-1)^2 e^{-x}$.

a) Halla las asíntotas de la gráfica de f. *(2 puntos)*

A.H. Hay que calcular $\lim_{x\to\infty} (x-1)^2 e^{-x}$. Pero como el comportamiento de la exponencial es diferente en $-\infty$ y en $+\infty$, hemos de diferenciarlos.

- $\lim_{x\to-\infty} (x-1)^2 e^{-x} = (+\infty \cdot e^{+\infty}) = (+\infty)(+\infty) = +\infty \quad \Rightarrow$ No hay asíntota por el lado del $-\infty$.
- $\lim_{x\to+\infty} (x-1)^2 e^{-x} = (+\infty \cdot e^{-\infty}) = (+\infty \cdot 0) = 0$, porque aunque es una indeterminación, el crecimiento de una polinómica es despreciable comparado con el de una exponencial. Otra forma de hallarlo sería por L'Hôpital (así debería ser en Selectividad):

$$\lim_{x\to+\infty} (x-1)^2 e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x-1)^2}{e^x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2(x-1)}{e^x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{+\infty} = 0$$

Como consecuencia, $y = 0$ es asíntota horizontal por el lado del $+\infty$.

A.V. No tiene, porque habría que calcular límites en los puntos de discontinuidad, y la función es continua en todo R.

A.O. Si intentamos calcularla por el lado del $+\infty$ nos volvería a salir la horizontal anterior. Pero podría haberla por el lado del $-\infty$.

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(x-1)^2 e^{-x}}{x} = \left(\frac{(+\infty)(+\infty)}{-\infty}\right) = -\infty$$

porque el infinito de la exponencial es de orden superior al que producen las polinómicas del numerador y denominador, por lo que prevalece. El signo menos es consecuencia de la regla de los signos. A la vista de este resultado concluimos que no hay asíntota oblicua.

b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y calcula, si existen, sus extremos relativos o locales y sus extremos absolutos o globales (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función). *(2 puntos)*

Derivamos: $f'(x) = 2(x-1)e^{-x} - (x-1)^2e^{-x} = e^{-x}(x-1)[2-(x-1)] = e^{-x}(x-1)(3-x)$
donde hemos sacado factor común $e^{-x}(x-1)$ en el primer paso.

Dividimos el dominio de f en intervalos mediante:

- Puntos de discontinuidad de f: No hay.
- Puntos de discontinuidad de f': No hay.
- Puntos que anulan $f'(x)$: $e^{-x}(x-1)(3-x) = 0$. Un producto vale 0 si, y sólo si alguno de los factores es cero. Por lo que:

$$\begin{cases} e^{-x} = 0 \Rightarrow \text{No tiene solución (la exponencial no se anula nunca)} \\ x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ 3 - x = 0 \Rightarrow 3 = x \end{cases}$$

El cuadro resultante con los intervalos mencionados es:

	$(-\infty, 1)$	1	$(1, 3)$	3	$(3, +\infty)$
f'	–	0	+	0	–
f	↘	Mín	↗	Máx	↘

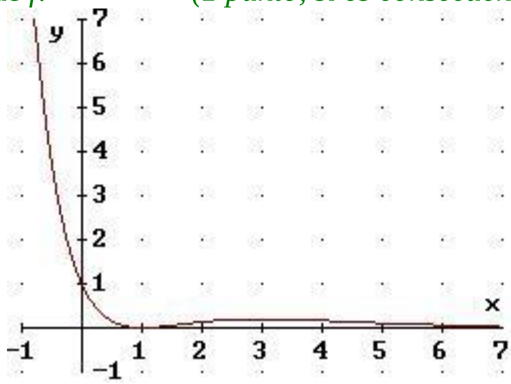
Si $x = 1 \Rightarrow y = 0$: Hay mínimo relativo en $(1, 0)$

Si $x = 3 \Rightarrow y = 4e^{-3} \approx 0.2$: Hay máximo relativo en $(3, 4e^{-3})$.

Los extremos absolutos se determinan comparando las imágenes (o límites, si no existen imágenes) en: extremos del intervalo, puntos de discontinuidad de f y de f' y extremos relativos. El intervalo de definición de f es $(-\infty, \infty)$. Calculando las asíntotas vimos que $\lim_{x\to-\infty}(x-1)^2e^{-x}=+\infty$ y $\lim_{x\to+\infty}(x-1)^2e^{-x}=0$. Y los extremos relativos acabamos de obtenerlos.

En consecuencia, la función <u>no tiene máximo absoluto</u>, puesto que sus imágenes tienden a $+\infty$ a medida que nos acercamos a $-\infty$. La menor imagen vale 0 y se alcanza <u>en $x = 1$</u>, por lo que en este valor de x <u>se alcanza el mínimo absoluto, que vale 0</u>. Téngase en cuenta que si nos acercamos a $+\infty$ la función tiende a 0, pero no lo alcanza nunca (llegaría a él en $+\infty$, pero no podemos avanzar hasta $+\infty$). Por lo que el único sitio donde se alcanza ésta mínima imagen (cero) es en $x = 1$.

c) Esboza la gráfica de *f*. *(1 punto, si es consecuencia del estudio previo)*



2) (Junio 05) De la función f: R → R definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ se sabe que tiene un máximo en $x = -1$, y que corta al eje OX en el punto de abscisa $x = -2$ y tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa $x = 0$. Calcula a, b, c y d sabiendo, además, que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$ tiene pendiente 9. *(3 puntos)*

Si tiene un máximo en $x = -1$, siendo la función derivable en todo R se debe cumplir que $f'(-1) = 0$:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \quad\Rightarrow\quad f'(-1) = 3a - 2b + c = 0 \qquad (1)$$

que es una ecuación con tres incógnitas.

Como corta a OX en el punto cuya abscisa es $x = -2$, significa que $f(-2) = 0$ (la ordenada del punto debe ser 0, por estar sobre OX). Luego:

$$-8a + 4b - 2c + d = 0 \qquad (2)$$

que es otra ecuación.

Tiene un punto de inflexión con abscisa $x = 0$. Para ello, $f''(0) = 0$. Entonces:

$$f''(x) = 6ax + 2b \quad\Rightarrow\quad f''(0) = 2b = 0 \qquad (3)$$

Por último, la pendiente de la tangente en el punto de abscisa $x = 2$ vale 9. Esto significa que:

$$f'(2) = 9 \quad\Rightarrow\quad 12a + 4b + c = 9 \qquad (4)$$

Nos han quedado 4 ecuaciones con 4 incógnitas. La ecuación (3) nos proporciona, ya, el valor de $b = 0$. Sustituyendo en las otras tres:

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & 3a + c = 0 \\ (2) & -8a - 2c + d = 0 \\ (4) & 12a + c = 9 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{lr} (1^a)\cdot(-1) & -3a - c = 0 \\ (3^a) & 12a + c = 9 \\ \hline \textit{Sumamos}: & 9a = 9 \end{array} \Rightarrow a = 1$$

Sustituyendo en la 1^a: $3 + c = 0 \Rightarrow c = -3$.

Sustituyendo los valores que ya tenemos en la 2ª: $-8+6+d=0 \quad \Rightarrow \quad d=2$.
Luego $a=1$, $b=0$, $c=-3$ y $d=2$.

3) (Sept 01) Determina α sabiendo que existe y es finito el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x}-e^{-x}+\alpha x}{x-\operatorname{sen}(x)}$$

Calcula dicho límite. *(2 puntos)*

$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x}-e^{-x}+\alpha x}{x-\operatorname{sen}(x)} = \left(\frac{1-1+0}{0-0}\right) = \left(\frac{0}{0}\right)$. Estamos en condiciones de aplicar L'Hôpital:

$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x}+e^{-x}+\alpha}{1-\cos(x)} = \left(\frac{1+1+\alpha}{1-1}\right)$.

Para cualquier valor de $\alpha \neq -2$ el límite resultaría ∞, porque el numerador valdría distinto de 0 mientras que el denominador sería 0. Entonces, el límite original debería valer, igualmente, ∞. Como sabemos que no es así, tenemos que $\boxed{\alpha=-2}$. Con ello, la expresión anterior produce la indeterminación 0/0, por lo que podemos aplicar, nuevamente, L'Hôpital:

$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x}-e^{-x}}{\operatorname{sen}(x)} = \left(\frac{1-1}{0}\right) = \left(\frac{0}{0}\right)$.

Y una vez más:

$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x}+e^{-x}}{\cos(x)} = \frac{1+1}{1} = 2$

Por tanto, cada uno de los límites anteriores, incluido el original, valen 2.

MATEMÁTICAS 2º BACH C.N.YS. 10 de diciembre de 2007

Análisis (1ª parte)

1) (Junio 06) Sea f la función definida por $f(x) = \dfrac{x^4 + 3}{x}$, para $x \neq 0$.

   a) Halla, si existen, los puntos de corte con los ejes y las asíntotas de la gráfica de *f*. *(2 puntos)*

   b) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de *f*. *(2 puntos)*

   c) Esboza la gráfica de *f*. *(1 punto, si es consecuencia del estudio previo)*

2) (Septiembre 05) Considera la integral indefinida $I = \int \dfrac{1}{\sqrt{1+x} - 1}\,dx$. Calcúlala aplicando el cambio de variable $\sqrt{1+x} - 1 = t$. *(2,5 puntos)*

3) (Sobrantes 07) Se quiere construir un depósito en forma de prisma de base cuadrada sin tapadera que tenga una capacidad de 500 m^3. ¿Qué dimensiones ha de tener el depósito para que su superficie sea mínima? *(2,5 puntos)*

Soluciones

1) (Junio 06) Sea f la función definida por $f(x) = \dfrac{x^4+3}{x}$, para $x \neq 0$.

a) Halla, si existen, los puntos de corte con los ejes y las asíntotas de la gráfica de *f*. *(2 puntos)*

Aunque no lo piden, comenzamos diciendo que Dom(f) = R – {0}, puesto que $x = 0$ no tiene imagen, al anular el denominador. Este conocimiento nos será necesario para calcular las asíntotas verticales.

- Cortes con OX: Si $y = 0 \Rightarrow 0 = \dfrac{x^4+3}{x} \Rightarrow 0 = x^4 + 3 \Rightarrow \sqrt[4]{-3} = x \Rightarrow$ No corta al eje.
- Corte con OY: Si $x = 0$ no hay imagen (no está en el dominio).
- Asíntota horizontal: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4+3}{x} = \infty$, puesto que el numerador es un polinomio de grado superior al del denominador, por lo que produce un infinito, igualmente, de orden superior. Por tanto, no hay asíntota horizontal.
- Asíntotas verticales: El único punto de discontinuidad es $x = 0$. Como $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4+3}{x} = \left(\dfrac{3}{0}\right) = \infty \Rightarrow$ La recta $x = 0$ es asíntota vertical.
- Asíntota oblicua: $m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4+3}{x^2} = \infty$, por razones idénticas a las antes expuestas. Por tanto, tampoco tiene asíntota oblicua.

b) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de *f*. *(2 puntos)*

Parece que la función pudiera tener simetrías. Como $f(-x) = \dfrac{(-x)^4+3}{-x} = -\dfrac{x^4+3}{x} = -f(x) \Rightarrow$ la función es *impar*, con lo que será simétrica respecto al origen. Esto no nos lo piden, pero nos puede ayudar a corroborar que estamos haciendo bien el cuadro de monotonía, que abordamos a continuación.

Comenzamos derivando la función:

$$f'(x) = \frac{4x^3 x - (x^4+3)}{x^2} = \frac{4x^4 - x^4 - 3}{x^2} = \frac{3x^4-3}{x^2}$$

- Discontinuidades de f: $x = 0$.
- Discontinuidades de f': $x = 0$.
- Puntos que anulan f': $0 = \dfrac{3x^4-3}{x^2} \Rightarrow 0 = 3x^4 - 3 \Rightarrow 3 = 3x^4 \Rightarrow 1 = x^4 \Rightarrow x = \pm\sqrt[4]{1} = \pm 1$.

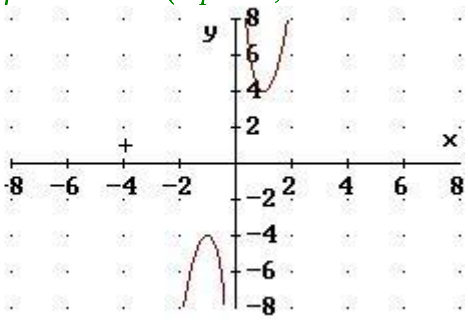
Dividimos el dominio en intervalos mediante los puntos obtenidos, para confeccionar el cuadro de monotonía:

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
f'	+	0	–	∄	–	0	+
f	↗	Máx	↘	∄	↘	mín	↗

Como $f(-1) = -4 \Rightarrow$ Tiene un máximo relativo en $(-1, -4)$

Como $f(1) = 4 \Rightarrow$ Tiene un mínimo relativo en $(1, 4)$.

c) Esboza la gráfica de *f*. *(1 punto, si es consecuencia del estudio previo)*



No nos piden, ni nos hace falta, por lo que no deberíamos incluirlo en el examen, la curvatura. Como información, la vamos a calcular, tras la advertencia anterior.
Derivamos:

$$f''(x) = \frac{12x^3x^2 - 2x(3x^4-3)}{x^4} = \frac{x[12x^4 - 2(3x^4-3)]}{x^4} = \frac{12x^4 - 6x^4 + 6}{x^3} = \frac{6x^4+6}{x^3}$$

Dividimos en intervalos el dominio de la función mediante:

- Discontinuidades de f : $x = 0$.
- Discontinuidades de f'': $x = 0$.
- Puntos que anulan f'': $0 = \dfrac{6x^4+6}{x^3} \Rightarrow 0 = 6x^4 + 6 \Rightarrow -6 = 6x^4 \Rightarrow -1 = x^4$

  $\Rightarrow x = \pm\sqrt[4]{-1}$ que no existe en R.

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
f''	–	∄	+
f	∩	∄	∪ (convexa)

No tiene, pues, puntos de inflexión.

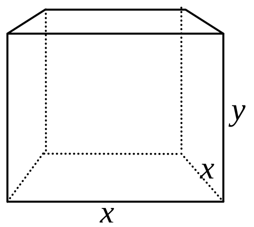
2) (Septiembre 05) Considera la integral indefinida $I = \int \frac{1}{\sqrt{1+x}-1}dx$. Calcúlala aplicando el cambio de variable $\sqrt{1+x} - 1 = t$. *(2,5 puntos)*

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x}-1}dx = \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{1+x} - 1 \to \sqrt{1+x} = t+1 \\ dt = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}dx \to dx = 2\sqrt{1+x}\,dt = 2(t+1)dt \end{array}\right] = \int \frac{1}{t}2(t+1)dt =$$

$$= 2\int \frac{t+1}{t}dt = 2\int \frac{t}{t}dt + 2\int \frac{1}{t}dt = 2\int dt + 2\int \frac{1}{t}dt = 2t + 2\ln|t| + k =$$

$$= 2\left(\sqrt{1+x} - 1\right) + 2\ln\left|\sqrt{1+x} - 1\right| + k$$

3) (Sobrantes 07) Se quiere construir un depósito en forma de prisma de base cuadrada sin tapadera que tenga una capacidad de 500 m^3. ¿Qué dimensiones ha de tener el depósito para que su superficie sea mínima? *(2,5 puntos)*



Hemos de minimizar la superficie del depósito. Ésta es el área de la base (x^2) más el de las cuatro caras verticales, cada una de las cuales vale xy (son rectángulos de base x y altura y). Es decir, hemos de minimizar la función $x^2 + 4xy$. Las unidades en las que trabaja esta función son m^2.

Por otra parte, la capacidad del depósito serán 500 m^3 (hemos de cuidar que las unidades sean las mismas; por ejemplo, si estos fueran dam^3 habría que pasarlas a m^3 para ser comparables con las de la función a minimizar). Dicha capacidad será el área de la base multiplicada por la altura, es decir, $x^2y = 500$. Despejando, $y = 500/x^2$. Sustituimos en la función a minimizar, y ésta pasa a ser de una sola variable (x), quedando así:

$$f(x) = x^2 + 4x\frac{500}{x^2} = x^2 + \frac{2000}{x}$$

Veamos el intervalo en el que oscila x. El valor mínimo de x sería 0, sin llegar a tocarlo porque el depósito sería una línea vertical. Por otra parte, el valor mínimo de y sería también 0 sin llegar tampoco a tocarlo, en cuyo caso $x^2 = 500/y$ se acercaría a infinito; por ello, el máximo valor de x sería infinito. En definitiva, $x \in (0, +\infty)$.

Derivando: $f'(x) = 2x - \dfrac{2000}{x^2}$

Analizamos las imágenes (o límites) de los siguientes valores de x:

- Extremos del intervalo: 0 y $+\infty$.
- Discontinuidades de f: 0.
- Discontinuidades de f': 0.
- $f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - \dfrac{2000}{x^2} = 0 \Rightarrow 2x = \dfrac{2000}{x^2} \Rightarrow 2x^3 = 2000 \Rightarrow x = \sqrt[3]{1000} = 10$

- Para $x = 0$: Calculamos el límite y no la imagen, porque x no pertenece al dominio, o sea, al intervalo de definición: $\lim_{x \to 0^+} x^2 + \dfrac{2000}{x} = +\infty$
- Para $x \to +\infty$: $\lim_{x \to +\infty} x^2 + \dfrac{2000}{x} = +\infty$
- Para $x = 10$: $f(10) = 100 + 200 = 300$. Además, como $f''(x) = 2 + \dfrac{4000}{x^3} \Rightarrow f''(10) > 0$, por lo que es un mínimo relativo.

Por tanto, el mínimo absoluto se alcanza para $x = 10$ m, que es quien ha proporcionado la menor imagen o límite de entre los puntos anteriores. Dicho valor mínimo es 300 m^2. Y la altura del depósito será $y = 500/x^2 = 5$ m.

El máximo absoluto (que no nos piden) no se alcanza, pues tendería a valer infinito cuando $x = 0$, es decir, la base tiende a valer 0 y la altura infinita, o cuando x tiende a infinito, o sea, la base tiende a ser infinita con altura 0.

MATEMÁTICAS 2º BACH C.N.YS. 18 de enero de 2008

Análisis (Final)

1) (Sept 06) Sea f: R → R la función definida por $f(x) = x^2 - |x|$
   a) Estudia la derivabilidad de f. *(1,5 puntos)*
   b) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f. *(2 puntos)*
   c) Calcula los extremos relativos de f (puntos donde se alcanzan y valor de la función). *(0,5 puntos)*
2) (Jun 07) Sean f : R → R y g : R → R las funciones definidas mediante
$$f(x) = x^3 + 3x^2 \quad \text{y} \quad g(x) = x + 3.$$
   a) Esboza las gráficas de f y de g calculando sus puntos de corte. *(2 puntos)*
   b) Calcula el área de cada uno de los dos recintos limitados entre las gráficas de f y g. *(2 puntos)*
3) (Sep 06) Halla la función f : R → R sabiendo que $f''(x) = 12x - 6$ y que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$ tiene de ecuación $4x - y - 7 = 0$. *(2 puntos)*

Soluciones

1) (Sept 06) Sea f: R → R la función definida por $f(x) = x^2 - |x|$

a) Estudia la derivabilidad de f. *(1,5 puntos)*

La función $y = |x|$ se define de distinta forma según que x sea positivo o negativo.

Concretamente, $y = |x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$

Para poder estudiar nuestra f, hemos de tener esto en cuenta. Así:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ x^2 - (-x) & \text{si} \quad x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2 - x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ x^2 + x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

No hace falta comprobar que f es continua, puesto que es diferencia de dos funciones que lo son: $y = x^2$ e $y = |x|$. Por tanto, pasamos directamente a estudiar su derivabilidad. En principio,

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ 2x + 1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

a falta de estudiar la existencia de derivada en $x = 0$. Como:

$f'(0^-) = \lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} (2x + 1) = 1$ y $f'(0^+) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} (2x - 1) = -1$

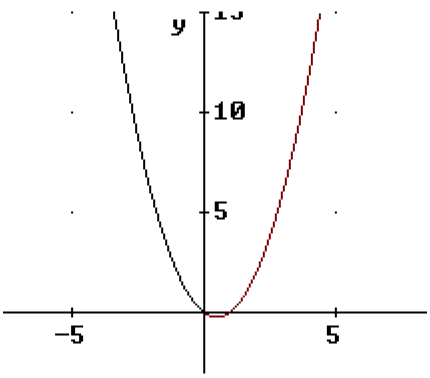
al no coincidir, f no es derivable en $x = 0$, por lo que la expresión final de f' es la anterior.

b) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f. *(2 puntos)*

Las dos fórmulas que constituyen la expresión de f son parábolas, por lo que sería válido estudiar éstas y, de ahí, extraer las conclusiones finales. También podríamos usar el procedimiento general. Lo haremos de ambas formas y por este orden.

- $y = x^2 - x$ es una parábola que se abre hacia arriba (es decir, con un mínimo), ya que el coeficiente de x^2 es positivo (vale 1). Además, como se tiene que: $0 = x^2 - x \Rightarrow 0 = x(x-1) \Rightarrow$ (un producto es 0 si, y sólo si algún factor se anula): $\begin{cases} x = 0, \quad \text{ó} \\ x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$ tenemos que corta a OX en (0, 0) y en (1, 0). El primero de estos dos puntos es también el corte con OY.

  El *eje* (simetría de la gráfica) es la recta vertical de ecuación $x = \frac{-b}{2a}$. O sea: $x = \frac{1}{2}$. Sustituyendo este valor de x en la ecuación de la parábola, con la coordenada y resultante tenemos el vértice: $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$.

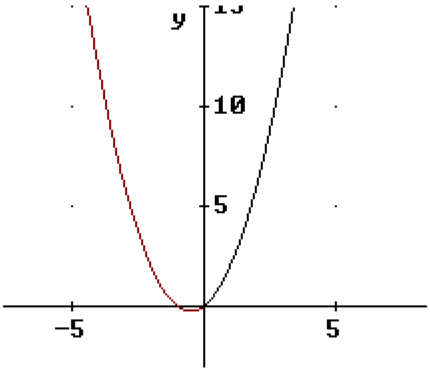
  Con todos estos datos, dibujamos esta parábola, que coincide con f si $x \geq 0$. En el gráfico adjunto, la gráfica que corresponde a f está en rojo, y el resto de la parábola, en negro. Por tanto, deducimos que f es decreciente, al menos, en [0, ½) y creciente en (½, +∞).

- $y = x^2 + x$ es una parábola que se abre, también, hacia arriba porque el coeficiente de x^2 es positivo. Además, como: $0 = x^2 + x \Rightarrow 0 = x(x + 1) \Rightarrow$

(un producto es 0 si, y sólo si algún factor se anula): $\begin{cases} x = 0, & \text{ó} \\ x + 1 = 0 \Rightarrow & x = -1 \end{cases}$

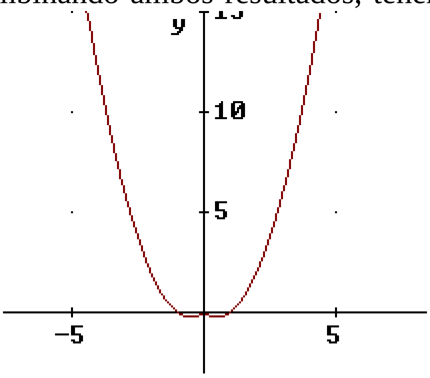
tenemos que corta a OX en (0, 0) y en (–1, 0). El primero de estos dos puntos es también el corte con OY.

El *eje* (simetría de la gráfica) es la recta vertical de ecuación $x = \frac{-b}{2a}$. O sea: $x = -\frac{1}{2}$. Sustituyendo este valor de x en la ecuación de la parábola, con la coordenada y resultante tenemos el vértice: $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$.



Con todos estos datos, dibujamos esta parábola, que coincide con f si x <0. En el gráfico adjunto, la parte de la gráfica que corresponde a f se ha dibujado en rojo. Por tanto, de esta segunda parábola deducimos que f resulta ser decreciente en (–∞, –½) y creciente en (–½, 0).

Combinando ambos resultados, tenemos la gráfica completa de f, que hemos puesto a la izquierda.



Como consecuencia, f es decreciente en (–∞, –½), creciente en (–½, 0), decreciente en (0, ½) y creciente en (½, +∞).

Hagámoslo ahora por el procedimiento general.

- Discontinuidades de f: No tiene.
- Discontinuidades de f ’: $x = 0$ (ahí, no existía f ’)
- Puntos que anulan f ’:

  Para valores x >0: $2x - 1 = 0 \Rightarrow x = ½$ que, en efecto, cumple que x>0.

  Para valores x <0: $2x + 1 = 0 \Rightarrow x = –½$ que también cumple que x<0.

  Luego ambos valores son válidos (si alguno hubiera salido fuera de la zona en la que la fórmula coincide con f habría de ser desechado).

Construimos el cuadro correspondiente, dando valores arbitrarios a x dentro de cada uno de los intervalos resultantes para, al sustituirlo en f ’, obtener su signo. El resultado es el mismo de antes:

	(–∞,–½)	–½	(–½, 0)	0	(0, ½)	½	(½, +∞)
f ’	–	0	+	∄	–	0	+
f	↘	mín	↗	Máx	↘	mín	↗

Observar que en $x = 0$ no existe f ’, pero sí f. Como a la izquierda es creciente y a la derecha decreciente, hay un máximo relativo.

c) Calcula los extremos relativos de f (puntos donde se alcanzan y valor de la función). *(0,5 puntos)*

Tenemos los valores de x donde se alcanzan los extremos relativos, del apartado anterior. Sustituyéndolos en la fórmula de f, obtenemos las coordenadas y correspondientes, de manera que el resultado es:
Máximo relativo en (0, 0).
Mínimos relativos en $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$ y en $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$.

2) (Jun 07) Sean $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas mediante

$$f(x) = x^3 + 3x^2 \quad \text{y} \quad g(x) = x + 3.$$

a) Esboza las gráficas de f y de g calculando sus puntos de corte. *(2 puntos)*

$f(x)$ es polinómica de tercer grado. Como el término de máxima potencia es x^3, cuando $x \to -\infty$ las imágenes de f se van también a $-\infty$, y cuando $x \to +\infty$ se van a $+\infty$. Calculamos los extremos relativos:

$f'(x) = 3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x(3x+6) = 0 \Rightarrow$ (alguno de los factores debe ser 0): $x=0$ ó $3x+6=0$ (de donde $x=-2$).

Como $f''(x) = 6x+6$, resulta:

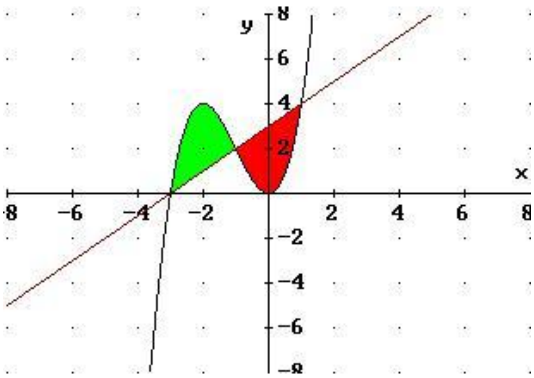
- $f''(0) = 6 > 0 \Rightarrow$ en $x=0$ hay un *mínimo relativo*. Como $f(0)=0$, sus coordenadas son (0, 0)
- $f''(-2) = -12+6 = -6 < 0 \Rightarrow$ en $x=-2$ hay un *máximo relativo*. Como $f(-2) = -8 + 12 = 4$, sus coordenadas son $(-2, 4)$

Por tanto, la gráfica es la del gráfico de más adelante.

$g(x) = x+3$ es una recta, fácil de dibujar dando algunos valores a x. Se ha dibujado también en el gráfico.

Sus gráficas se cortan en aquellos valores de x que den la misma imagen: $f(x) = g(x) \Rightarrow x^3+3x^2=x+3 \Rightarrow x^3+3x^2-x-3 = 0$. Resolvemos por Ruffini:

	1	3	–1	–3
1		1	4	3
	1	4	3	0
–1		–1	–3	
	1	3	0	
–3		–3		
	1	0		



Calculando las imágenes mediante g, que es más fácil que con f, tenemos las coordenadas de los puntos de corte: $(-3, 0)$, $(-1, 2)$ y $(1, 4)$

b) Calcula el área de cada uno de los dos recintos limitados entre las gráficas de f y g. *(2 puntos)*

El área sombreada en verde es:

$$A_1 = \int_{-3}^{-1}\left[\left(x^3+3x^2\right)-(x+3)\right]dx = \int_{-3}^{-1}(x^3+3x^2-x-3)\,dx = \left[\frac{x^4}{4}+x^3-\frac{x^2}{2}-3x\right]_{-3}^{-1} =$$

$$= \left(\frac{1}{4}-1-\frac{1}{2}+3\right)-\left(\frac{81}{4}-27-\frac{9}{2}+9\right) = \left(\frac{1}{4}+2-\frac{2}{4}\right)-\left(\frac{81-108-18+36}{4}\right) =$$

$$= \left(-\frac{1}{4}+2\right)-\left(\frac{117-126}{4}\right)=\frac{7}{4}-\frac{-9}{4}=\frac{16}{4}=4\ \mathrm{u}^2$$

Y el área roja:

$$A_2 = \int_{-1}^{1}\left[(x+3)-(x^3+3x^2)\right]dx = \int_{1}^{-1}\left[(x^3+3x^2)-(x+3)\right]dx = \int_{1}^{-1}(x^3+3x^2-x-3)\,dx =$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}+x^3-\frac{x^2}{2}-3x\right]_1^{-1}=\left(\frac{1}{4}-1-\frac{1}{2}+3\right)-\left(\frac{1}{4}+1-\frac{1}{2}-3\right)=\frac{7}{4}-\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{4}-2\right)=$$

$$=\frac{7}{4}+\frac{9}{4}=4\ \mathrm{u}^2$$

donde en el primer paso, hemos cambiado el orden de la resta en el integrando, con lo que el signo de la integral cambia; pero al cambiar los límites de integración volvemos al signo original. Con ello, aprovechamos los resultados del cálculo previo. u^2 significa "unidades al cuadrado", siendo dicha unidad u la de longitud en la que se miden los ejes de coordenadas.

3) (Sep 06) Halla la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sabiendo que $f''(x) = 12x - 6$ y que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$ tiene de ecuación $4x - y - 7 = 0$.
(2 puntos)

Este problema puede abordarse suponiendo que si f'' es un polinomio de primer grado, entonces f' es de segundo grado y f de tercer grado. Así que $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, y proceder a calcular los parámetros a, b, c, d con las condiciones del enunciado. Pero nosotros utilizaremos integrales indefinidas.

Si $f''(x) = 12x - 6 \Rightarrow f'(x) = \int (12x-6)\,dx = 6x^2 - 6x + k$.

La ecuación de la tangente en $x = 2$ es, despejando: $y = 4x - 7$, por lo que su pendiente es 4. Por la interpretación geométrica de la derivada, esto significa que $f'(2) = 4$. Usando el resultado de la integral anterior:

$$6\cdot4 - 6\cdot2 + k = 4 \Rightarrow 12 + k = 4 \Rightarrow k = -8$$

Luego $f'(x) = 6x^2 - 6x - 8$. Por tanto, $f(x) = \int (6x^2-6x-8)\,dx = 2x^3 - 3x^2 - 8x + c$.

Necesitamos un punto de la gráfica de f para hallar c. Pero tenemos la ecuación de la recta tangente en $x = 2$. Dicha recta pasa por el mismo punto de la gráfica de f correspondiente a $x = 2$, puesto que es tangente en dicho punto. Entonces, por la ecuación de la tangente podemos hallar la coordenada y de dicho punto: $y = 4\cdot2 - 7 = 1$. Obligando a que la f obtenida pase por (2, 1) tenemos que:

$$2\cdot2^3 - 3\cdot2^2 - 8\cdot2 + c = 1 \Rightarrow 16 - 12 - 16 + c = 1 \Rightarrow c = 13$$

Luego: $\boxed{f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 8x + 13}$.

MATEMÁTICAS 2º BACH C.N.YS. 28 de enero de 2008

Análisis (Final - Recuperación)

1) (Sob 07) Sea f: R $\to$ R la función definida por $f(x) = x^2$.
   a) Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$. *(1,5 puntos)*
   b) Dibuja el recinto limitado por la gráfica de f, la recta tangente obtenida en el apartado anterior y el eje OX. Calcula su área. *(2 puntos)*

2) (Sob 06) Sea f la función definida por $f(x) = \dfrac{x^4 + 3}{x}$, para $x \neq 0$.
   a) Halla, si existen, los puntos de corte con los ejes y las asíntotas de la gráfica de f. *(1 punto)*
   b) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de f. *(1,5 puntos)*
   Esboza la gráfica de f. *(1 punto)*

3) (Sob 07) Sea $I = \displaystyle\int \frac{2}{2 - e^x}\,dx$.
   a) Expresa I haciendo el cambio de variable $t = e^x$. *(1 punto)*
   b) Calcula I. *(2 puntos)*

Soluciones

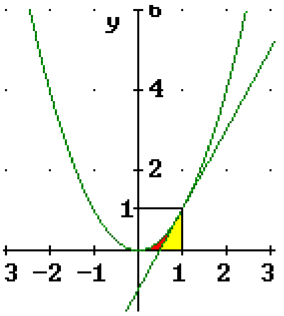
1) (Sob 07) Sea f: R → R la función definida por $f(x) = x^2$.

a) Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$. *(1,5 puntos)*

- Punto de tangencia: Si $x = 1 \Rightarrow f(1) = 1^2 = 1 \Rightarrow$ Es (1, 1).
- Pendiente de la tangente: Como $f'(x) = 2x \Rightarrow m = f'(1) = 2$.

Por tanto, la ecuación de la recta tangente es (usando la ecuación de la recta en forma punto-pendiente): $y - 1 = 2(x - 1) \Rightarrow \boxed{y = 2x - 1}$.

b) Dibuja el recinto limitado por la gráfica de f, la recta tangente obtenida en el apartado anterior y el eje OX. Calcula su área. *(2 puntos)*



La función f es la parábola que conocemos bien. Por tanto, la gráfica es la adjunta, en la que se ha destacado en rojo el pequeño recinto cuya área nos solicitan.

El área de dicho recinto NO es la que queda entre las curvas entre $x = 0$ y $x = 1$, porque ello comprende también al triángulo formado entre la recta tangente y los ejes en el cuarto cuadrante. Hay que calcular el área que queda bajo la curva entre $x = 0$ y $x = 1$ (zona roja más zona amarilla) y restarle el área que queda bajo la tangente entre el punto de corte de ésta con OX (que, dando a y el valor 0 en la ecuación de la tangente se ve que es $x = ½$) y $x = 1$ (zona amarilla):

$$A = \int_0^1 x^2 dx - \int_{1/2}^1 (2x-1)dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=1} - \left[x^2 - x\right]_{x=1/2}^{x=1} =$$

$$= \left(\frac{1}{3} - 0\right) - \left[(1-1) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)\right] = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}\ u^2.$$

2) (Sob 06) Sea f la función definida por $f(x) = \dfrac{x^4+3}{x}$, para $x \neq 0$.

a) Halla, si existen, los puntos de corte con los ejes y las asíntotas de la gráfica de f. *(1 punto)*

Dominio: $D(f) = \mathrm{R} - \{0\}$

Puntos de corte con los ejes

- OY: Si $x = 0 \Rightarrow$ No hay imagen, puesto que se anula el denominador (es el único punto que no pertenece al dominio).
- OX: Si $y = 0 \Rightarrow$ Para que la fracción se anule, el numerador debe anularse (y comprobaríamos, después, que las soluciones que obtengamos no anulan el denominador): $x^4 + 3 = 0 \Rightarrow x^4 = -3$ que no tiene solución.

Por tanto, la función no corta a ninguno de los dos ejes.

Asíntotas

- Horizontales: Como $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^4+3}{x} = \infty$, la función no tiene asíntotas horizontales, ni por el lado de $-\infty$ ni por el de $+\infty$ (hemos tomado límite con x tendiendo a infinito sin signo, englobando a ambos a la vez). Si quisiésemos afinar más, $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^4+3}{x} = -\infty$ y $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^4+3}{x} = +\infty$, pero entretenerse en esto no merece la pena, puesto que esta información la obtendremos posteriormente de la monotonía.

- Verticales: El único punto de discontinuidad lo tenemos en $x = 0$. Como $\lim_{x\to 0} \frac{x^4+3}{x} = \infty$ la recta de ecuación $\boxed{x = 0}$ es asíntota vertical.
- Oblicuas: $m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^4+3}{x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4+3}{x^2} = \infty$ puesto que el numerador es un polinomio de grado superior al del denominador, por lo que produce un infinito de orden superior. Por tanto, no hay asíntota oblicua.

b) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de f. *(1,5 puntos)*

$$f'(x) = \frac{4x^3 x - 1\cdot(x^4+3)}{x^2} = \frac{4x^4 - x^4 - 3}{x^2} = \frac{3x^4 - 3}{x^2}$$

- Discontinuidades de f: $x = 0$.
- Discontinuidades de f': $x = 0$ (anula el denominador).
- Puntos que anulan f': $3x^4 - 3 = 0 \Rightarrow 3(x^4 - 1) = 0 \Rightarrow x^4 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt[4]{1} = \pm 1$.

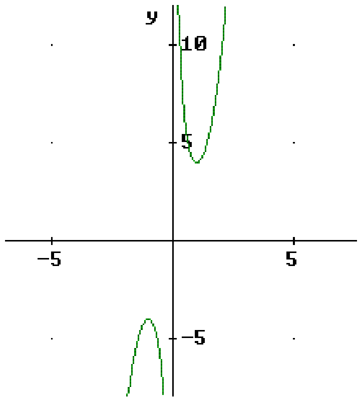
Dividimos el dominio en intervalos mediante los puntos obtenidos:

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
f'	+	0	–	∄	–	0	+
f	↗	Máx	↘	∄	↘	mín	↗

Si $x = -1 \Rightarrow f(-1) = -4 \Rightarrow$ El máximo relativo es $(-1, -4)$

Si $x = 1 \Rightarrow f(1) = 4 \Rightarrow$ El mínimo relativo es $(1, 4)$

c) Esboza la gráfica de f. *(1 punto)*



3) (Sob 07) Sea $I = \int \frac{2}{2-e^x}\,dx$.

a) Expresa I haciendo el cambio de variable $t = e^x$. *(1 punto)*

$$I = \int \frac{2}{2-e^x}\,dx = \left[\begin{array}{l} t = e^x \\ dt = e^x dx \to dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t} \end{array}\right] = \int \frac{2}{2-t}\frac{dt}{t} = \int \frac{2}{t(2-t)}$$

b) Calcula I. *(2 puntos)*

Descomponemos el integrando en suma de fracciones simples:

$$\frac{2}{t(2-t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{2-t} = \frac{A(2-t)+Bt}{t(2-t)}$$

Para que la primera y la última fracción coincidan, deben ser iguales los numeradores, puesto que los denominadores lo son:

$$2 = A(2 - t) + Bt$$

- Si $t = 2 \Rightarrow 2 = 2B \Rightarrow B = 1$
- Si $t = 0 \Rightarrow 2 = 2A \Rightarrow A = 1$

Por tanto:

$$I = \int \frac{1}{t}dt + \int \frac{1}{2-t}dt = \text{Ln } |\text{t}| - \text{Ln } |2 - t| + k =$$
$$= \text{Ln } |e^x| - \text{Ln } |2 - e^x| + k = x - \text{Ln } |2 - e^x| + k$$

Puesto que $|e^x| = |e|^x = e^x$. Y $\text{Ln}(e^x) = x\text{Ln}(e) = x\cdot 1 = x$.

MATEMÁTICAS 2º BACH C.N.YS. 6 de febrero de 2008

Análisis (Final – Recuperación 2ª)

1) (Sob 07) Sea f la función definida, para $x \neq 2$ y $x \neq -2$, por $f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x^2 - 4}$.

   a) Determina las asíntotas de la gráfica de f. *(1 punto)*

   b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de f (puntos donde se obtienen y valores que alcanzan). *(1,5 puntos)*

   c) Esboza la gráfica de f. *(1 punto)*

2) (Sob 07) Calcula:

   a) $\displaystyle\int \frac{3x + 4}{x^2 + 1}\,dx$ *(1,5 puntos)*

   b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos(2x)\,dx$ *(2 puntos)*

3) (Sob 06) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$

   a) Determina $a, b \in \mathbb{R}$ sabiendo que la gráfica de f pasa por el punto (2, 2) y tiene un punto de inflexión de abscisa $x = 0$. *(1,5 puntos)*

   b) Calcula las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de inflexión. *(1,5 puntos)*

Soluciones

1) (Sob 07) Sea f la función definida, para $x \neq 2$ y $x \neq -2$, por $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x^2-4}$.

a) Determina las asíntotas de la gráfica de f. *(1 punto)*

Como los valores de x que anulan el denominador son -2 y 2, Dom(f) = R – {–2, 2}

- Asíntota horizontal: Como $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2+3}{x^2-4} = 1$, puesto que la máxima potencia de x tanto del numerador como del denominador es 2, y los coeficientes de los términos correspondientes valen, ambos, 1, siendo su cociente, también, 1. Por tanto, la recta horizontal de ecuación $\boxed{y=1}$ es A.H.
- Asíntota vertical: Hay dos discontinuidades para estudiar:

$\lim_{x\to -2} \dfrac{x^2+3}{x^2-4} = \left(\dfrac{7}{0}\right) = \infty \Rightarrow$ La recta vertical de ecuación $\boxed{x=-2}$ es A.V.

$\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2+3}{x^2-4} = \left(\dfrac{7}{0}\right) = \infty \Rightarrow$ La recta vertical de ecuación $\boxed{x=2}$ es A.V.

- Asíntota oblicua: Como tiene A.H. tanto por el lado del $+\infty$ como por el del $-\infty$, si intentamos calcular la A.O. obtendríamos otra vez la A.H.

b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de f (puntos donde se obtienen y valores que alcanzan). *(1,5 puntos)*

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-4)-2x(x^2+3)}{(x^2-4)^2} = \frac{2x[(x^2-4)-(x^2+3)]}{(x^2-4)^2} = \frac{2x(x^2-4-x^2-3)}{(x^2-4)^2} =$$

$$= \frac{2x(-7)}{(x^2-4)^2} = \frac{-14x}{(x^2-4)^2}$$

- Discontinuidades de f: -2 y 2 (no están en el dominio)
- Discontinuidades de f': -2 y 2 (anulan el denominador, por lo que no tienen imagen)
- Puntos que anulan f': $-14x = 0 \Rightarrow x = 0$.

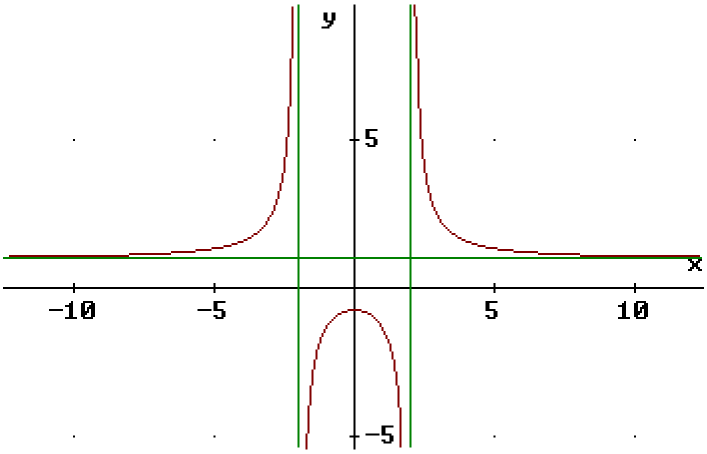
Dividimos el dominio en intervalos mediante los puntos obtenidos y averiguamos el signo de f' en cada uno de ellos, para lo que basta elegir un punto arbitrario del intervalo en cuestión y sustituirlo en f', anotando su signo, porque en todos los puntos del intervalo el signo de f' es el mismo (garantizado por el Teorema de Bolzano). Como el denominador de f' es el cuadrado de una expresión, siempre va a ser positivo, con lo que basta comprobar el signo del numerador:

	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
f'	+	∄	+	0	–	∄	–
f	↗	∄	↗	Máx	↘	∄	↘

Como $f(0) = -3/4$, las coordenadas del máximo relativo son $(0, -3/4)$

c) Esboza la gráfica de f. *(1 punto)*

Hemos dibujado en color verde las dos asíntotas verticales y la asíntota horizontal. La gráfica queda como sigue, aprovechando los conocimientos que de la función tenemos merced al estudio que de ella hemos realizado:



2) (Sob 07) Calcula:

a) $\int \frac{3x+4}{x^2+1}dx$ *(1,5 puntos)*

Aplicando propiedades inmediatas de integrales:

$$\int \frac{3x+4}{x^2+1}dx = \int \frac{3x}{x^2+1}dx + \int \frac{4}{x^2+1}dx = 3\int \frac{x}{x^2+1}dx + 4\int \frac{1}{x^2+1}dx =$$

La segunda integral es inmediata. La primera, como la derivada del denominador es $2x$, sólo necesita un coeficiente 2 en el numerador para ser un logaritmo neperiano:

$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx + \text{arctg } x + k = \frac{3}{2}\text{Ln}(x^2+1) + \text{arctg } x + k$$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos(2x)dx$ *(2 puntos)*

El integrando es producto de dos funciones. Ambas sabemos derivarlas e integrarlas, por lo que la abordamos *por partes*. Llamaremos $u = x$ porque, de lo contrario, al integrarla aumentaría el grado de x en el integrando, lo que no nos conviene: nos interesa que este factor desaparezca.

La integral de $\cos(2x)$ es inmediata (basta ajustar coeficientes); pero si no la viésemos, la plantearíamos aparte mediante un cambio de variable $t = 2x$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos(2x)dx = \begin{bmatrix} u = x \to du = dx \\ dv = \cos 2xdx \to v = \frac{1}{2}\text{sen } 2x \end{bmatrix} = \left[\frac{1}{2}x\,\text{sen } 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{sen } 2xdx =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\frac{\pi}{4}\text{sen }\frac{\pi}{2} - 0\right) + \left[\frac{1}{2}\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} + \left(\frac{1}{4}\cos\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\cos 0\right) = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$$

3) (Sob 06) Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$

a) Determina $a, b \in \mathbb{R}$ sabiendo que la gráfica de f pasa por el punto (2, 2) y tiene un punto de inflexión de abscisa $x = 0$. *(1,5 puntos)*

- Pasa por (2, 2) $\Rightarrow$ $f(2) = 2$ $\Rightarrow$ $8 + 4a + 2b + 1 = 2$ $\Rightarrow$ $4a + 2b = -7$ (*)
- Punto de inflexión en $x = 0$: Como $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ y $f''(x) = 6x + 2a$, para que haya un p. de inflexión en $x = 0$ exigimos que $f''(0) = 0$ $\Rightarrow$ $2a = 0$ $\Rightarrow$ $\boxed{a = 0}$.

Sustituyendo este resultado en (*): $2b = -7$ $\Rightarrow$ $\boxed{b = -7/2}$.

Por tanto, la función es $f(x) = x^3 - \frac{7}{2}x + 1$

b) Calcula las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de inflexión. *(1,5 puntos)*

Como $f(0) = 1$, el punto de inflexión es $(0, 1)$.

Como $f'(x) = 3x^2 - \frac{7}{2} \Rightarrow$ la pendiente de la recta tangente en dicho punto será: $m = f'(0) = -\frac{7}{2}$.

La recta *tangente* es, pues: $y - 1 = -\frac{7}{2}(x - 0) \Rightarrow \boxed{y = -\frac{7}{2}x + 1}$.

La *normal* es perpendicular a la tangente en el mismo punto de tangencia. Lo único que varía respecto a la *tangente* es la pendiente: $m' = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{-7/2} = \frac{2}{7}$. Por tanto, la *normal* es: $y - 1 = \frac{2}{7}(x - 0) \Rightarrow \boxed{y = \frac{2}{7}x + 1}$.

MATEMÁTICAS 2º BACH C.N.YS. 7 de mayo de 2008

Análisis (Final – Recuperación 3ª)

1) (Sob 07) Sea $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^2 \text{Ln}(x)$ (Ln denota la función logaritmo neperiano).
   a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de f (puntos donde se obtienen y valores que se alcanzan). *(2,5 puntos)*
   b) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = \sqrt{e}$. *(1 punto)*
2) (Sob 06) Calcula:
   a) $\int \frac{5x^2 - x - 160}{x^2 - 25} dx$. *(2 puntos)*
   b) $\int (2x - 3) \cdot \text{tg}(x^2 - 3x) dx$. *(1,5 puntos)*
3) (Sob 06) Halla el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = \text{sen } x$ y las rectas tangentes a dicha gráfica en los puntos de abscisas $x = 0$ y $x = \pi$. *(3 ptos)*

Soluciones

1) (Sob 07) Sea $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^2\text{Ln}(x)$ (Ln denota la función logaritmo neperiano).

a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de f (puntos donde se obtienen y valores que se alcanzan). *(2,5 puntos)*

Nos dan el dominio: $(0, +\infty)$, que es correcto, puesto que coincide con el de la función $\text{Ln}(x)$, que es la única operación con restricciones a la hora de calcular imagen que aparece en la fórmula de f. En dicho intervalo, f es continua.

Derivamos: $f'(x) = 2x\,\text{Ln}(x) + x^2\dfrac{1}{x} = 2x\,\text{Ln}(x) + x$.

La función derivada es continua en el mismo intervalo donde lo es f.

Por último, $f'(x) = 0 \iff 2x\,\text{Ln}(x) + x = 0 \iff x\,(2\,\text{Ln}(x) + 1) = 0 \iff x = 0$ (que no pertenece al dominio) ó $2\,\text{Ln}(x) + 1 = 0$, que ocurre cuando $\text{Ln}(x) = -1/2$, es decir, si $x = e^{-1/2}$ (recordar que el resultado de un logaritmo es el exponente).

Por tanto, dividimos el dominio en intervalos por el único punto obtenido:

	$(0, e^{-1/2})$	$e^{-1/2}$	$(e^{-1/2}, +\infty)$
f'	–	0	+
f	↘	mín	↗

Como $f(e^{-1/2}) = \left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^2 \text{Ln}\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = e^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{2e}$, las coordenadas del mínimo son $\left(e^{-\frac{1}{2}}, -\dfrac{1}{2e}\right)$.

b) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = \sqrt{e}$. *(1 punto)*

$f(\sqrt{e}) = \left(\sqrt{e}\right)^2 \text{Ln}\left(\sqrt{e}\right) = e\dfrac{1}{2}\text{Ln}(e) = \dfrac{e}{2}\cdot 1 = \dfrac{e}{2}$

Por tanto, el punto de tangencia es $\left(\sqrt{e}, \dfrac{e}{2}\right)$.

La tangente tendrá por pendiente:

$$m = f'(\sqrt{e}) = 2\sqrt{e}\,\text{Ln}(\sqrt{e}) + \sqrt{e} = 2\sqrt{e}\,\frac{1}{2}\text{Ln}(e) + \sqrt{e} = \sqrt{e}\cdot 1 + \sqrt{e} = 2\sqrt{e}$$

Por tanto, usando la forma punto-pendiente de la ecuación de una recta, la tangente es:

$$y - \frac{e}{2} = 2\sqrt{e}\,(x - \sqrt{e}) \Rightarrow y = 2\sqrt{e}\,x - 2e + \frac{e}{2} \Rightarrow \boxed{y = \sqrt{e}\,x - \frac{3e}{2}}$$

2) (Sob 06) Calcula:

a) $\displaystyle\int \frac{5x^2 - x - 160}{x^2 - 25}\,dx$. *(2 puntos)*

Se trata, claramente, de una integral racional. El grado del numerador no es menor que el del denominador, por lo que el procedimiento general nos obliga a dividir numerador entre denominador y sustituir el numerador, usando que dividendo es igual a divisor por cociente más resto.

Sin embargo, podemos conseguir que parte de los sumandos que forman el numerador sean igual al denominador, y descomponer la integral en sumas, siendo este un procedimiento más corto (si es que nos damos cuenta). Y sería así:

$$\int \frac{5x^2 - x - 160}{x^2 - 25}dx = \int \frac{5x^2 - 125 + 125 - x - 160}{x^2 - 25}dx = \int \frac{5x^2 - 125}{x^2 - 25}dx +$$

$$\int \frac{125 - x - 160}{x^2 - 25}dx = \int \frac{5(x^2 - 25)}{x^2 - 25}dx + \int \frac{-x - 35}{x^2 - 25}dx = 5\int dx + I_1 = 5x + I_1$$

Nos centramos en el integrando de I_1. Descomponemos en factores irreducibles el denominador, lo que es inmediato si consideramos que se trata de una diferencia de cuadrados. Por el teorema que permite descomponer fracciones algebraicas donde el grado del numerador es menor que el del denominador:

$$\frac{-x - 35}{(x-5)(x+5)} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x+5} = \frac{A(x+5) + B(x-5)}{(x-5)(x+5)}$$

De donde, igualando los numeradores de la primera y la última fracciones:

$$-x - 35 = A(x + 5) + B(x - 5)$$

Si damos valores a x, nos queda:

- $x = -5 \Rightarrow -40 = B(-10) \Rightarrow B = 4$
- $x = 5 \Rightarrow -30 = 10A \Rightarrow A = -3$

Por tanto:

$$\frac{-x - 35}{(x-5)(x+5)} = \frac{-3}{x-5} + \frac{4}{x+5}$$

De donde:

$$I_1 = -3\int \frac{dx}{x-5} + 4\int \frac{dx}{x+5} = -3 \text{ Ln } (x-5) + 4 \text{ Ln } (x+5) + C$$

Por tanto, sustituyendo:

$$\boxed{\int \frac{5x^2 - x - 160}{x^2 - 25}dx = 5x - 3 \text{ Ln } (x-5) + 4 \text{ Ln } (x+5) + C}$$

b) $\int (2x - 3)\cdot\text{tg}(x^2 - 3x)dx$. *(1,5 puntos)*

Observando el integrando, tenemos que $(2x - 3)$ es la derivada del argumento de la tangente. Por tanto, podemos intentar un cambio de variable:

$$\int (2x-3)\cdot\text{tg}(x^2 - 3x)dx = \left[\begin{array}{c} t = x^2 - 3x \\ dt = (2x-3)dx \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{2x-3} \end{array}\right] =$$

$$= \int (2x-3)\cdot\text{tg}(t)\frac{dt}{2x-3} = \int \text{tg}(t)dt = \int \frac{\text{sen}(t)}{\cos(t)}dt = -\int \frac{-\text{sen}(t)}{\cos(t)}dt$$

Como el numerador es la derivada del denominador:

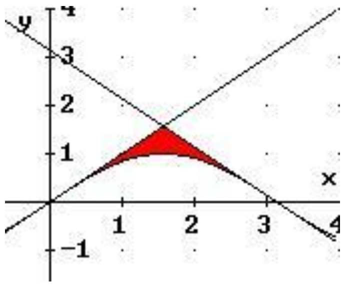
$$= -\text{Ln}(\cos(t)) + k = \boxed{-\text{Ln}(\cos(x^2 - 3x)) + k}$$

3) (Sob 06) Halla el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = \text{sen } x$ y las rectas tangentes a dicha gráfica en los puntos de abscisas $x = 0$ y $x = \pi$. *(3 ptos)*

Habremos de empezar calculando las ecuaciones de dichas tangentes.

- $x = 0$. Punto de tangencia: $f(0) = \text{sen } 0 = 0 \Rightarrow (0, 0)$.
  Pendiente: $f'(x) = \cos x \Rightarrow m = f'(0) = \cos 0 = 1$
  Ecuación de la tangente: $y - 0 = 1\cdot(x - 0) \Rightarrow \boxed{y = x}$.

- $x = \pi$. Punto de tangencia: $f(\pi) = \text{sen}\ \pi = 0 \ \Rightarrow\ (\pi, 0)$.
  Pendiente: $f'(x) = \cos x \ \Rightarrow\ m = f'(\pi) = \cos \pi = -1$
  Ecuación de la tangente: $y - 0 = -1\cdot(x - \pi) \ \Rightarrow\ \boxed{y = -x + \pi}$.



Como la gráfica de $y = \text{sen}\ x$ es conocida, podemos esbozar la situación en el dibujo adjunto.
Se ha marcado en rojo la zona de la que nos piden calcular el área.
Vamos a precisar el punto de corte de las dos tangentes. Poniendo en un sistema sus respectivas ecuaciones y, por igualación:

$$x = -x + \pi \ \Rightarrow\ 2x = \pi \ \Rightarrow\ x = \frac{\pi}{2}$$

No necesitamos el valor de y. El área es, entonces:

$$\int_0^{\pi/2} \left[x - \text{sen}\ x\right] dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \left[(-x + \pi) - \text{sen}\ x\right] dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + \cos x\right]_0^{\pi/2} + \left[-\frac{x^2}{2} + \pi x + \cos x\right]_{\pi/2}^{\pi} =$$

$$= \left(\frac{\frac{\pi^2}{4}}{2} + 0\right) - (0 + 1) + \left(-\frac{\pi^2}{2} + \pi^2 - 1\right) - \left(-\frac{\frac{\pi^2}{4}}{2} + \pi\frac{\pi}{2} + 0\right) =$$

$$= \frac{\pi^2}{8} - 1 - \frac{\pi^2}{2} + \pi^2 - 1 + \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi^2 - 4\pi^2 + 8\pi^2 + \pi^2 + 4\pi^2}{8} - 2 =$$

$$= \frac{10\pi^2}{8} - 2 = \frac{5\pi^2}{4} - 2 \quad u^2$$

MATEMÁTICAS 2º BACH C.N.YS. 16 de Mayo de 2.008
Análisis (Final – Recuperación 4ª)

1) (Sob 02 Granada) Sea f la función definida por $f(x) = \frac{9x - 3}{x^2 - 2x}$ para $x \neq 0$ y $x \neq 2$.
   a) Calcula las asíntotas de la gráfica de f. *(2 puntos)*
   b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f. *(2 puntos)*
   c) Con los datos obtenidos, esboza la gráfica de f. *(1 punto)*
2) (Sob 02 Granada) Sea $\mathrm{Ln}(x)$ el logaritmo neperiano de x. Esboza el recinto limitado por los ejes coordenados y las gráficas de las funciones $y = 1$ e $y = \mathrm{Ln}(x)$. Calcula su área. *(5 puntos)*

Soluciones

1) (Sob 02 Granada) Sea f la función definida por $f(x) = \dfrac{9x-3}{x^2-2x}$ para $x \neq 0$ y $x \neq 2$.

a) Calcula las asíntotas de la gráfica de f. *(2 puntos)*

- Horizontales. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{9x-3}{x^2-2x} = 0$, puesto que se trata de un cociente de polinomios donde el grado del denominador es superior al del polinomio del numerador, por lo que produce un infinito de orden superior al de éste. Por tanto, la recta $\boxed{y = 0}$ es asíntota horizontal, tanto por el lado del $-\infty$ como por el $+\infty$.
- Verticales. Hemos de calcular los límites en los puntos de discontinuidad de f. Éstos son $x = 0$ y $x = 2$, únicos valores que anulan el denominador y que, por tanto, no están en el dominio.

$$\lim_{x\to 0} \frac{9x-3}{x^2-2x} = \infty \quad \Rightarrow \quad \text{la recta } \boxed{x = 0} \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{9x-3}{x^2-2x} = \infty \quad \Rightarrow \quad \text{la recta } \boxed{x = 2} \text{ es asíntota vertical.}$$

- Oblicuas: No tiene, porque si intentásemos calcularlas volveríamos a obtener la asíntota horizontal.

b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f. *(2 puntos)*

Hemos de derivar la función.

$$f'(x) = \frac{9(x^2-2x)-(9x-3)(2x-2)}{(x^2-2x)^2} = \frac{9x^2-18x-(18x^2-18x-6x+6)}{(x^2-2x)^2} =$$

$$= \frac{-9x^2+6x-6}{(x^2-2x)^2}$$

- Discontinuidades de f: $x = 0$ y $x = 2$ (no están en el dominio, como se dijo).
- Discontinuidades de f': Las mismas, porque anulan el denominador.
- $f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; -9x^2+6x-6 = 0 \;\Rightarrow\;$ (simplificando entre –3): $3x^2 - 2x + 2 = 0$

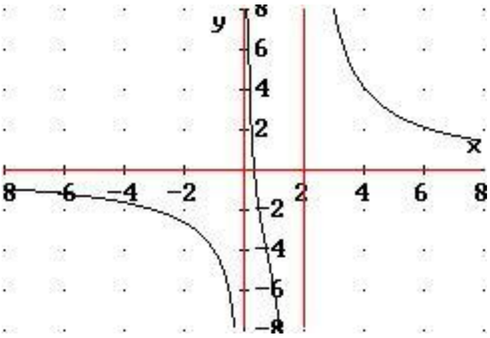
$\Rightarrow\; x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-24}}{6} \;\Rightarrow\;$ no tiene soluciones.

Dividimos el dominio en intervalos mediante los puntos obtenidos. Como estos puntos son sólo los que no pertenecen al dominio, nos queda éste:

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
f'	–	$\nexists$	–	$\nexists$	–
f	↘	$\nexists$	↘	$\nexists$	↘

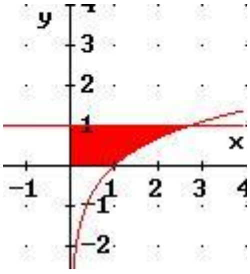
La función siempre es decreciente y no tiene extremos relativos.

c) Con los datos obtenidos, esboza la gráfica de f. *(1 punto)*



La gráfica de f es la adjunta, dónde en rojo se han trazado las dos asíntotas verticales y la horizontal.

2) (Sob 02 Granada) Sea Ln(x) el logaritmo neperiano de x. Esboza el recinto limitado por los ejes coordenados y las gráficas de las funciones $y = 1$ e $y = \text{Ln}(x)$. Calcula su área. *(5 puntos)*



Es conocida la gráfica de $y = \text{Ln}(x)$. La función $y = 1$ es una recta horizontal. Por tanto, el recinto que nos solicitan es el del gráfico, donde se ha señalado en rojo el recinto cuya área nos piden.

La abscisa del punto de corte de ambas gráficas es:

$$\left.\begin{array}{l} y = \text{Ln}(x) \\ y = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Ln}(x) = 1 \Rightarrow x = e$$

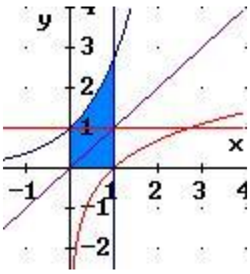
Por tanto, el área de dicho recinto es la que queda bajo la recta entre $x = 0$ y $x = \text{e}$, menos la que deja por debajo la función $y = \text{Ln}(x)$ entre $x = 1$ y $x = \text{e}$.

Área bajo la recta = $\int_0^e 1dx = [x]_0^e = e$

Área bajo la curva = $\int_1^e \text{Ln}(x)dx = \left[\begin{array}{lll} u = \text{Ln}(x) & \Rightarrow & du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx & \Rightarrow & v = x \end{array}\right] = [x\,\text{Ln}(x)]_1^e - \int_1^e dx =$

$= (e\,\text{Ln}(e) - 1\,\text{Ln}(1)) - [x]_1^e = (\text{e}\cdot 1 - 0) - (\text{e} - 1) = \text{e} - \text{e} + 1 = 1$

Por tanto, <u>el área pedida vale $\boxed{\text{e} - 1}$ u^2</u>.



Hay <u>otra forma</u> de solucionar el problema más fácil y mucho más corta. Consiste en realizar un gráfico simétrico del anterior respecto de $y = x$ (bisectriz del primer y tercer cuadrante). La gráfica simétrica de $y = \text{Ln}(x)$ respecto de $y = x$ sabemos que es su función inversa que, en este caso, es $y = \text{e}^x$. Y la simétrica de $y = 1$ es $x = 1$.
Por tanto, el área inicial mide lo mismo que el área marcada en azul en el gráfico adjunto. Y ésta es:

$$A = \int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = \text{e}^1 - \text{e}^0 = \boxed{\text{e} - 1}\ u^2$$

MATEMÁTICAS 2º BACH C.N.YS. 27 de mayo de 2008

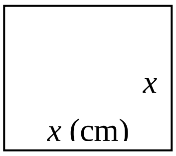
Análisis (Final – Recuperación 5ª)

1) (Sob 07) Tenemos que fabricar dos chapas cuadradas con dos materiales distintos. El precio de cada uno de estos materiales es de 2 y 3 euros por **centímetro cuadrado**, respectivamente. Por otra parte, la suma de los perímetros de los dos cuadrados tiene que ser 1 **metro**. ¿Cómo hemos de elegir los lados de los cuadrados si queremos que el coste total sea mínimo? *(4 puntos)*
2) (Sob 07) Sea $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ la función definida por $f(x) = x(x-3)^2$.
   a) Calcula los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y los extremos relativos de f (puntos donde se obtienen y valores que se alcanzan). *(2 puntos)*
   b) Haz un esbozo de la gráfica de f. *(1 punto)*
   c) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas. *(3 ptos)*

Soluciones

1) (Sob 07) Tenemos que fabricar dos chapas cuadradas con dos materiales distintos. El precio de cada uno de estos materiales es de 2 y 3 euros por **centímetro cuadrado**, respectivamente. Por otra parte, la suma de los perímetros de los dos cuadrados tiene que ser 1 **metro**. ¿Cómo hemos de elegir los lados de los cuadrados si queremos que el coste total sea mínimo? *(4 puntos)*

Para evitar el problema de la diferencia de unidades de medida (por un lado, centímetros y por otro, metros), trabajaremos siempre en cm.



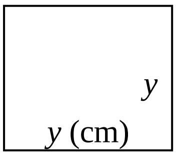
Primer cuadrado

Perímetro: $4x$

Área: x^2 (cm^2)

Coste del material:2 €/cm^2

Coste del cuadrado: $2x^2$ €



Segundo cuadrado

Perímetro: $4y$

Área: y^2 (cm^2)

Coste del material:3 €/cm^2

Coste del cuadrado: $3y^2$ €

Hay que minimizar el coste total, que es: $2x^2 + 3\,y^2$.

Tenemos una restricción que relaciona las variables, que es que el perímetro debe ser de 100 cm. Por tanto:

$$4x + 4y = 100 \;\Rightarrow\; x + y = 25 \;\Rightarrow\; \boxed{y = 25 - x}$$

Luego el coste total, que es la función a minimizar, queda como:

$$\boxed{f(x) = 2x^2 + 3\,(25 - x)^2}$$

Por otro lado:

$$\begin{cases} x \text{ no puede ser negativo: } x \geq 0. \\ y \text{ tampoco puede serlo: } y \geq 0 \;\Rightarrow\; (y = 25 - x):\; 25 - x \geq 0 \;\Rightarrow\; 25 \geq x \end{cases}$$

Es decir, $0 \leq x \leq 25 \;\Rightarrow\; \boxed{x \in [0, 25]}$.

Se tiene que:

$$f'(x) = 4x + 3\cdot 2\cdot(25 - x)(-1) = 4x - 6(25 - x) = 4x - 150 + 6x = 10x - 150$$

Aplicamos el procedimiento general para calcular extremos absolutos:

- Extremos del dominio (o intervalos que lo componen mediante uniones): 0 y 25.
- Discontinuidades de f: No tiene (es polinómica).
- Discontinuidades de f': No tiene (es polinómica).
- $f'(x) = 0$: $10x - 150 = 0 \;\Rightarrow\; 10x = 150 \;\Rightarrow\; x = 15$.

Comparamos las imágenes en los puntos anteriores:

- $x = 0$: $f(0) = 3\cdot 25^2 = 1.875$
- $x = 25$: $f(25) = 2\cdot 25^2 = 1.250$
- $x = 15$: $f(15) = 2\cdot 15^2 + 3(25 - 15)^2 = 750$

Por tanto, el máximo absoluto (coste total máximo), que no se pide, se obtiene para $x = 0 \;\Rightarrow\; y = 25 - 0 = 25$, y es de 1.875 €. Y el mínimo absoluto (coste total mínimo), que es lo que nos piden, es para $x = 15$ cm (primer cuadrado), $y = 25 - 15 = 10$ cm (segundo cuadrado), con un coste total de 750€.

El procedimiento abreviado consiste en calcular únicamente los extremos relativos. En nuestro caso, después de igualar la primera derivada a 0, se obtiene $x = 15$. Y se trata de un mínimo, porque:

$$f''(x) = 10 \;\Rightarrow\; f''(15) = 10 > 0 \;\Rightarrow\; \text{mínimo en } x = 10.$$

Y con ello se obtiene la misma solución: $x = 15$ cm (primer cuadrado, el de 2 €/cm^2), con $y = 25 - 15 = 10$ cm (segundo cuadrado), siendo el coste total de 750€. Nótese que este procedimiento no facilita el coste total máximo.

2) (Sob 07) Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x(x-3)^2$.

a) Calcula los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y los extremos relativos de f (puntos donde se obtienen y valores que se alcanzan). *(2 puntos)*

Dom(f) = R, y la función no tiene discontinuidades (se trata de una expresión polinómica). Estudiemos la monotonía.

$$f(x) = x(x^2 - 6x + 9) = x^3 - 6x^2 + 9x \;\Rightarrow\; f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

- Discontinuidades de f ó f': No tienen, por ser polinómicas.
- $f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; 3x^2 - 12x + 9 = 0 \;\Rightarrow\; x^2 - 4x + 3 = 0 \;\Rightarrow\; x = 1$ ó $x = 3$.

Por tanto:

	$(-\infty, 1)$	1	(1, 3)	3	$(3, +\infty)$
f'	+	0	–	0	+
f	↗	Máx	↘	Mín	↗

Como $f(1) = 4$ y $f(3) = 0$, las coordenadas del máximo relativo son (1, 4) y las del mínimo, (3, 0).

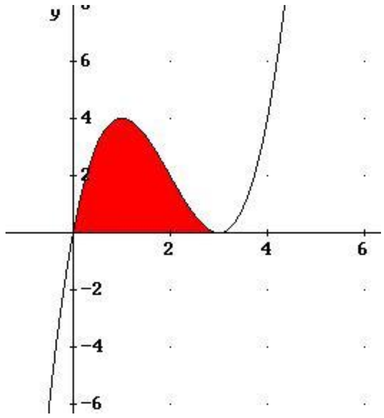
b) Haz un esbozo de la gráfica de f. *(1 punto)*

Una función polinómica no tiene asíntotas. Para mejorar un poco la precisión, calculamos los cortes con los ejes.

$x = 0 \;\Rightarrow\; y = 0$.

$y = 0 \;\Rightarrow\; x(x-3)^2 = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$ ó $(x-3)^2 = 0$, de donde $x = 3$.

O sea, corta en (0, 0) y (3, 0). La gráfica es, entonces, la adjunta.



c) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas. *(3 ptos)*

Hay que calcular el área destacada en el gráfico anterior:

$$Área = \int_0^3 (x^3 - 6x^2 + 9x)dx = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 9\frac{x^2}{2}\right]_0^3 = \left(\frac{81}{4} - 2\cdot 27 + \frac{81}{2}\right) - 0 = \frac{27}{4} \quad u^2$$