NOMBRE: ____

1) Sea la función $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ definida por $f(x) = e^x(x^2 - x + 1)$
   a) Calcular dominio, cortes con los ejes y asíntotas *(1 punto)*
   b) Estudiar la monotonía y extremos relativos *(1 punto)*
   c) Estudiar la curvatura y los puntos de inflexión *(1 punto)*
   d) Esbozar la gráfica de f *(1 punto)*
2) Calcular: $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{\text{sen } x}}{x^2}$ *(1 punto)*
3) En el primer cuadrante representamos un rectángulo de tal manera que tiene un vértice en el origen de coordenadas y el vértice opuesto en la parábola $y = -x^2 + 3$. Determinar las dimensiones del rectángulo para que su área sea máxima. *(2,5 puntos)*
4) Sea la función $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} e^x(x^2 + ax) & si \quad x \le 0 \\ \dfrac{bx^2 + c}{x + 1} & si \quad x > 0 \end{cases}$$

   Calcular las constantes a, b y c sabiendo que f es derivable y que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$ tiene pendiente 3. Dar la expresión final de su función derivada, para los valores obtenidos. *(2,5 puntos)*

SOLUCIONES

1) Sea la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x(x^2 - x + 1)$

a) Calcular dominio, cortes con los ejes y asíntotas *(1 punto)*

- $\boxed{\text{Dom}(f) = \mathbb{R}}$, porque e^x puede calcularse $\forall x$, y lo mismo ocurre con cualquier polinomio. Por tanto, el producto siempre puede calcularse.
- $x = 0 \Rightarrow f(0) = 1\cdot 1 = 1$. Corta en $\boxed{(0, 1)}$.
- $y = 0 \Rightarrow 0 = e^x(x^2 - x + 1) \Rightarrow$ (Un producto vale 0 si, y sólo si se anula algún factor): $\begin{cases} e^x = 0, \text{ que no ocurre nunca, pues } e^x > 0, \forall x \\ x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2}, \text{ sin solución} \end{cases}$

  Por tanto, $\boxed{\text{no corta a OX}}$.
- Asíntotas verticales: $\boxed{\text{No tiene}}$, porque no presenta discontinuidades (es producto de funciones elementales con dominio R).
- Asíntotas horizontales: El comportamiento de la función exponencial es diferente en $+\infty$ y en $-\infty$. Los estudiamos por separado:

  $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x(x^2 - x + 1) = +\infty\cdot(+\infty) = +\infty$. $\boxed{\text{No tiene cuando } x \text{ tiende a } +\infty}$.

  $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x(x^2 - x + 1) = (0\cdot\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 - x + 1}{e^{-x}} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Esta indeterminación, a diferencia de la primera, puede resolverse aplicando la Regla de L'Hôpital, al tratarse del cociente de dos funciones derivables en todo R. Así, ya que:

  $$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x - 1}{-e^{-x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{e^{-x}} = \left(\frac{2}{\infty}\right) = 0$$

  (donde se ha aplicado L'Hôpital otra vez), el límite inicial vale 0. Por tanto, la recta $\boxed{y = 0 \text{ es asíntota horizontal cuando } x \text{ tiende a } -\infty}$.
- Asíntotas oblicuas: Sólo la estudiamos cuando x tiende a $+\infty$, porque por el otro lado volveríamos a obtener la asíntota horizontal que ya conocemos:

  $$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x(x^2 - x + 1)}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \text{ (L'Hôpital)} =$$

  $$= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x(x^2 - x + 1) + e^x(2x - 1)}{1} = \lim_{x \to +\infty} e^x(x^2 + x) = +\infty\cdot(+\infty) = +\infty$$

  Luego $\boxed{\text{no tiene asíntotas oblicuas}}$. Y la función tiende a ponerse vertical cuando x tiende a $+\infty$, porque su pendiente tiende a hacerse infinita, como en las rectas verticales.

b) Estudiar la monotonía y extremos relativos *(1 punto)*

$$f'(x) = e^x(x^2 - x + 1) + e^x(2x - 1) = \boxed{e^x(x^2 + x)}$$

- Discontinuidades de f ó de f': No tiene, por ser ambas producto de una exponencial por una polinómica.
- $f'(x) = 0$: $e^x(x^2 + x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} e^x = 0, \text{ nunca} \\ x^2 + x = 0 \Rightarrow x(x+1) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ó } x = -1 \end{cases}$

  Por tanto:

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, +\infty)$
f'	+	0	–	0	+
f	↗	Mx	↘	mín	↗

  Luego es $\boxed{\textit{creciente} \text{ en } (-\infty, -1) \text{ y en } (0, +\infty), \text{ y } \textit{decreciente} \text{ en } (-1, 0)}$.

Si $x = -1 \Rightarrow f(-1) = e^{-1}(1 + 1 + 1) = 3/e$. $\boxed{\text{Máximo relativo en } (-1, 3/e)}$.
Si $x = 0 \Rightarrow f(0) = e^{0}(0 - 0 + 1) = 1$. $\boxed{\text{Mínimo relativo en } (0, 1)}$.

c) Estudiar la curvatura y los puntos de inflexión *(1 punto)*

$f''(x) = e^x(x^2 + x) + e^x(2x + 1) = e^x(x^2 + 3x + 1)$

- Discontinuidades de f, f' ó de f'': No tiene, por ser productos de una exponencial por una polinómica.
- $f''(x) = 0$: $e^x(x^2 + 3x + 1) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} e^x = 0, \text{ nunca} \\ x^2 + 3x + 1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \begin{cases} = \dfrac{-3-\sqrt{5}}{2} \\ = \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \end{cases}$$

Por tanto:

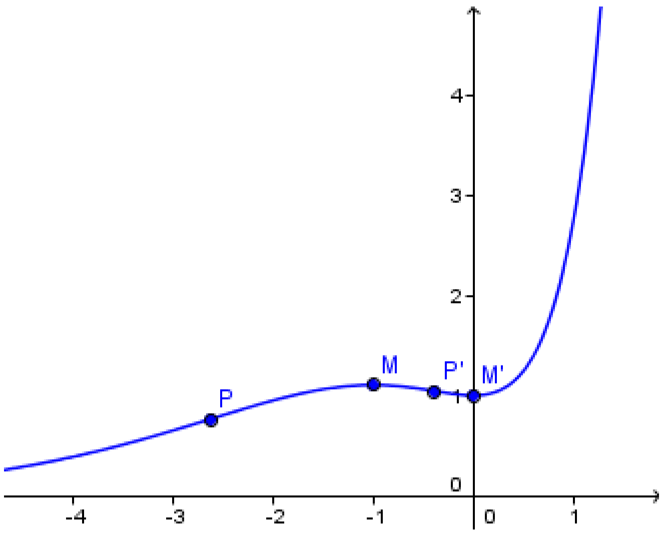
	$\left(-\infty, \frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)$	$\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$	$\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}, \frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)$	$\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$	$\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$
f''	+	0	–	0	+
f	$\cup$ (convexa)	P.I.	$\cap$ (cóncava)	P.I.	$\cup$ (convexa)

Así, es *convexa* en $\left(-\infty, \frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)$ y en $\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$, y *cóncava* en $\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}, \frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)$

Tiene puntos de inflexión en: $\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}, 0.76\right)$ y en: $\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}, 1.04\right)$

d) Esbozar la gráfica de f *(1 punto)*

Se han señalado el máximo relativo M, el mínimo relativo M', y los dos puntos de inflexión P y P'.



2) Calcular: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{\operatorname{sen} x}}{x^2}$ *(1 punto)*

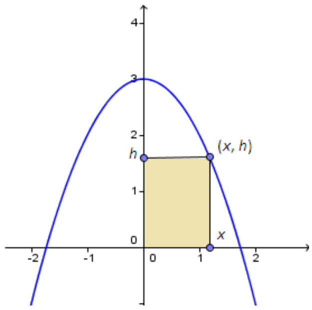
Como obtenemos la indeterminación 0/0 y tenemos el cociente de dos funciones derivables en todo R, podemos aplicar L'Hôpital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{\operatorname{sen} x} \cos x}{2x} = \left(\frac{0}{0}; \text{L' Hôpital}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{\operatorname{sen} x} \cos^2 x + e^{\operatorname{sen} x} \operatorname{sen} x}{2} =$$

$$= \frac{1-1+0}{2} = 0$$

Por tanto, $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{\operatorname{sen} x}}{x^2} = 0}$.

3) En el primer cuadrante representamos un rectángulo de tal manera que tiene un vértice en el origen de coordenadas y el vértice opuesto en la parábola $y = -x^2 + 3$. Determinar las dimensiones del rectángulo para que su área sea máxima. *(2,5 puntos)*



Supongamos que (x, h) son las coordenadas del vértice del rectángulo que está en la parábola. Entonces, la base mide x (distancia desde el origen hasta el lugar del eje OX donde situamos x), y la altura, h.
Nos limitamos al primer cuadrante, según el enunciado. Como (x, h) está en la parábola, verifica su ecuación, es decir: $h = -x^2 + 3$. Por tanto, el área del rectángulo (base · altura) será, en función de x:

$$f(x) = x(-x^2 + 3) = -x^3 + 3x$$

Lo mínimo que puede valer x es 0, en cuyo caso el rectángulo tendría área 0 y estaría superpuesto al segmento que va desde el origen hasta el vértice de la parábola. Y lo máximo será el valor del corte de la parábola con la parte positiva del eje OX. Calculemos dicho valor:

$$-x^2 + 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

Es decir, el máximo valor posible es $\sqrt{3}$. Por tanto, nuestro esfuerzo se centrará en maximizar $f(x) = -x^3 + 3x$, con $x \in [0, \sqrt{3}]$.
Y lo haremos estudiando su monotonía.

$$f'(x) = -3x^2 + 3$$

- Discontinuidades de f ó de f': No tiene, pues ambas son polinómicas.
- $f'(x) = 0$: $-3x^2 + 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$ (ignoramos $x = -1$, porque no está en el dominio).

Por tanto:

	$(0, 1)$	1	$(1, \sqrt{3})$
f'	+	0	–
f	↗	Mx	↘

El máximo relativo está en $(1, 2)$, pues $f(1) = -1 + 3 = 2$ (recordar que f da el área del rectángulo). Por la forma de la función, este máximo relativo también lo es absoluto, pues al no haber discontinuidades, la función no puede ir más arriba. Por idénticos razonamientos, el mínimo absoluto estará en alguno, o ambos, de los extremos del dominio. Pero sólo nos piden el máximo absoluto.
Cuando $x = 1$, que es la solución obtenida, la altura valdrá $h = -x^2 + 3 = -1 + 3 = 2$.
En conclusión:

$$\boxed{\text{El rectángulo de área máxima mide } 1\ u \text{ de base y } 2\ u \text{ de altura, siendo su área de } 2\ u^2.}$$

4) Sea la función $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} e^x(x^2 + ax) & si \quad x \le 0 \\ \dfrac{bx^2 + c}{x+1} & si \quad x > 0 \end{cases}$$

Calcular las constantes a, b y c sabiendo que f es derivable y que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$ tiene pendiente 3. Dar la expresión final de su función derivada, para los valores obtenidos. *(2,5 puntos)*

Si f es derivable, también es continua. Como está definida por dos expresiones que constituyen funciones elementales, cada una en su zona de definición, y las funciones elementales son continuas en su dominio, la única discontinuidad que concierne a ellas es cuando se anule el denominador de la función racional. Esto es, cuando $x = -1$. Pero este valor no está en la zona donde f coincide con $y = \dfrac{bx^2 + c}{x+1}$, que es $(0, +\infty)$, por lo que no es discontinuidad de f. De este modo, la única discontinuidad podría proceder de $x = 0$, que es donde se conectan las dos definiciones de f. Para que no haya discontinuidad, debe existir el límite y coincidir con la imagen de $x = 0$, lo que exige la coincidencia de los dos límites laterales. Como:

$$\lim_{x\to 0^-} e^x(x^2 + ax) = 1\cdot 0 = 0; \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{bx^2 + c}{x+1} = \frac{c}{1} = c$$

Deben coincidir: $\boxed{c = 0}$.

Veamos la derivabilidad. Aplicando las fórmulas de derivación, que son válidas en intervalos abiertos, tendremos:

$$f'(x) = \begin{cases} e^x(x^2 + ax) + e^x(2x + a) & si \quad x < 0 \\ \dfrac{2bx(x+1) - bx^2}{(x+1)^2} & si \quad x > 0 \end{cases} = \begin{cases} e^x(x^2 + ax + 2x + a) & si \quad x < 0 \\ \dfrac{bx^2 + 2bx}{(x+1)^2} & si \quad x > 0 \end{cases}$$

$x = -1$ anularía el denominador de la expresión segunda. Pero no está dentro de la zona donde es válida. Así que es derivable en todo R, salvo en $x = 0$, donde aún no la hemos estudiado. Como sabemos que tiene que ser derivable también ahí, deben coincidir las derivadas laterales:

$$f'(0^-) = f'(0^+) \Leftrightarrow e^0 a = \frac{0+0}{(0+1)^2} \Leftrightarrow \boxed{a = 0}$$

Por último, la tangente en $x = 1$ tiene pendiente 3 $\Rightarrow f'(1) = 3$. Como $x = 1$ está en la zona $x > 0$, es válida la segunda forma de la derivada de f. Así:

$$\frac{b\cdot 1^2 + 2b\cdot 1}{(1+1)^2} = 3 \Leftrightarrow \frac{3b}{4} = 3 \Leftrightarrow \boxed{b = 4}$$

La expresión final de la derivada de f es, pues:

$$\boxed{f'(x) = \begin{cases} e^x(x^2 + 2x) & si \quad x \le 0 \\ \dfrac{4x^2 + 8x}{(x+1)^2} & si \quad x > 0 \end{cases}}$$

NOMBRE: ____

Instrucciones: 1) Todos los folios deben tener el nombre y estar numerados en la parte superior. 2) Todas las respuestas deben estar justificadas y simplificadas. 3) No se puede usar corrector ni lápiz. Se aconseja no usar borrador. 4) Se puede alterar el orden de las respuestas, pero no se puede intercalar la respuesta a una pregunta con las de otras.

1) Determinar el valor de las constantes c y d sabiendo que la gráfica de la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 + 3x^2 + cx + d$ tiene como recta tangente en su punto de inflexión a la recta $y = 3x + 4$. *(2 puntos)*

2) Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = (x - 1)\ln(x)$. Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(1, -3/2)$. *(2 puntos)*

3) Calcular: $\lim_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x) - \operatorname{sen} x}{x \cdot \operatorname{sen} x}$ *(1,5 puntos)*

4) Considerar la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x + 3)e^{-x}$.
   a) Hallar las asíntotas de la gráfica de f. *(1 punto)*
   b) Determinar los extremos relativos de f y los puntos de inflexión de su gráfica. *(1 punto)*
   c) Esbozar la gráfica de f. *(0,5 puntos)*

5) De entre todos los rectángulos que tienen uno de sus vértices en el origen de coordenadas, el opuesto de este vértice en la curva $y = \dfrac{2x^2}{x^2 - 1}$ $(x > 1)$, uno de sus lados situado sobre el semieje positivo de abscisas y otro lado sobre el semieje positivo de ordenadas, halla el que tiene área mínima. *(2 puntos)*

SOLUCIONES

1) Determinar el valor de las constantes c y d sabiendo que la gráfica de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 + 3x^2 + cx + d$ tiene como recta tangente en su punto de inflexión a la recta $y = 3x + 4$. *(2 puntos)*

f, por ser polinómica, es continua y derivable indefinidamente. Por tanto, su punto de inflexión debe estar donde su segunda derivada se anule.

$$f'(x) = 3x^2 + 6x + c$$
$$f''(x) = 6x + 6$$

$f''(x) = 0 \iff 6x + 6 = 0 \iff x = -1$. Por tanto, $y = 3x + 4$ es recta tangente en el punto $x = -1$.

Al ser recta tangente, tiene un punto en común con f. Como la imagen de $x = -1$ por la recta es: $y = -3 + 4 = 1$, el punto $(-1, 1)$ es también un punto de la gráfica de f. En consecuencia, $f(-1) = 1 \Rightarrow -1 + 3 - c + d = 1 \Rightarrow \boxed{-c + d = -1}$.

Por otra parte, la pendiente de la recta tangente en $x = -1$ vale 3. Dicha pendiente es, también, $f'(-1)$. Luego:

$f'(-1) = 3 \iff 3 - 6 + c = 3 \iff -3 + c = 3 \iff \boxed{c = 6}$.

Sustituyendo en la ecuación que obtuvimos antes, $-6 + d = -1 \iff \boxed{d = 5}$.

2) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = (x - 1)\ln(x)$. Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(1, -3/2)$. *(2 puntos)*

Todas las primitivas de f nos la proporciona su integral indefinida, que pasamos a calcular *por partes*, dado que tenemos el producto de dos funciones que sabemos derivar, y una de ellas la sabemos integrar (éste es un indicio de que probablemente podamos resolverla por el método indicado):

$$\int (x-1)\ln(x)\,dx = \begin{bmatrix} u = \ln(x) \Rightarrow & du = \frac{1}{x}dx \\ dv = (x-1)dx \Rightarrow & v = \frac{x^2}{2} - x \end{bmatrix} = \frac{x^2 - 2x}{2}\ln(x) - \int \frac{x^2 - 2x}{2}\frac{1}{x}dx =$$

$$= \frac{x^2 - 2x}{2}\ln(x) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2 - 2x}{x}dx = \frac{x^2 - 2x}{2}\ln(x) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x}dx + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x}dx =$$

$$= \frac{x^2 - 2x}{2}\ln(x) - \frac{1}{2}\int x\,dx + \int dx = \frac{x^2 - 2x}{2}\ln(x) - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} + x + k =$$

$$= \frac{x^2 - 2x}{2}\ln(x) - \frac{1}{4}x^2 + x + k$$

De todas ellas, nos piden la que pasa por $(1, -3/2)$. Es decir:

$$\frac{1-2}{2}\ln(1) - \frac{1}{4} + 1 + k = -\frac{3}{2} \Rightarrow k = -\frac{3}{2} + \frac{1}{4} - 1 = -\frac{9}{4}$$

La función solicitada es, pues:

$$\boxed{F(x) = \frac{x^2 - 2x}{2}\ln(x) - \frac{1}{4}x^2 + x - \frac{9}{4}}$$

3) Calcular: $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - \text{sen}\, x}{x \cdot \text{sen}\, x}$ *(1,5 puntos)*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\text{sen }x}{x\cdot\text{sen }x}=\left(\frac{0-0}{0\cdot 0}=\frac{0}{0}\text{ L' Hôpital}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-\cos x}{\text{sen }x+x\cos x}=$$

$$=\left(\frac{1-1}{0+0\cdot 1}=\frac{0}{0}\text{ L' Hôpital}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{(1+x)^2}+\text{sen }x}{\cos x+\cos x-x\text{ sen }x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{(1+x)^2}+\text{sen }x}{2\cos x-x\text{ sen }x}=$$

$$=\frac{-1+0}{2\cdot 1-0}=-\frac{1}{2}$$

Se ha podido aplicar L'Hôpital porque teníamos la indeterminación 0/0 y funciones derivables en un entorno de 0 en numerador denominador.

4) Considerar la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=(x+3)e^{-x}$.

a) Hallar las asíntotas de la gráfica de f. *(1 punto)*

- Verticales: Al tratarse del producto de dos funciones continuas en R, f es continua en R, por lo que $\boxed{\text{no tiene asíntotas verticales}}$.
- Horizontales: El comportamiento de la función exponencial es diferente cuando avanzamos a $-\infty$ que cuando lo hacemos hacia $+\infty$. Por tanto, distinguimos los límites:

  $$\lim_{x\to-\infty}(x+3)e^{-x}=(-\infty\cdot e^{+\infty}=-\infty\cdot(+\infty))=-\infty\ \Rightarrow\ \boxed{\text{No tiene cuando } x\to-\infty}.$$

  $$\lim_{x\to+\infty}(x+3)e^{-x}=(-\infty\cdot e^{-\infty}=-\infty\cdot 0)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+3}{e^x}=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)=$$

  Con el cambio que hemos hecho, tenemos el cociente de dos funciones derivables con una de las indeterminaciones que se puede abordar por L'Hôpital:

  $$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=\left(\frac{1}{+\infty}\right)=0\ \Rightarrow\ \boxed{\text{La recta } y=0 \text{ es a. horizontal con } x\to+\infty}.$$

- Oblicuas: Cuando $x\to+\infty$, tiene asíntota horizontal, por lo que si intentamos calcular una oblicua obtendríamos la horizontal que ya conocemos. Estudiamos sólo el comportamiento cuando $x\to-\infty$. La asíntota, de existir, sería $y=mx+n$:

  $$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x+3)e^{-x}}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty},\text{ L' Hôpital}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}-(x+3)e^{-x}}{1}=$$

  $$=\lim_{x\to-\infty}(1-x-3)e^{-x}=\lim_{x\to-\infty}(-x-2)e^{-x}=(-\infty\cdot(+\infty))=-\infty$$

  Por lo que $\boxed{\text{no tiene asíntotas oblicuas}}$.

  Tenemos información adicional: Cuando $x\to-\infty$, la función se va al $-\infty$ (nos lo dice el resultado que obtuvimos al calcular la asíntota horizontal correspondiente) y, además, tiende a ponerse vertical, porque su pendiente se hace ∞, según este último cálculo.

b) Determinar los extremos relativos de f y los puntos de inflexión de su gráfica. *(1 punto)*

$f'(x)=e^{-x}(-x-2)$
$f''(x)=-e^{-x}(-x-2)+e^{-x}(-1)=e^{-x}(x+2-1)=e^{-x}(x+1)$

Al ser continua y derivable, sus extremos relativos estarán donde se anule la derivada:

$e^{-x}(-x-2) \Rightarrow (e^{-x}$ no se anula nunca$)$ $-x-2=0 \Rightarrow x=-2$

$f''(-2) = e^{2}(-2+1) = -e^{2} < 0 \Rightarrow$ Es un máximo. Sus coordenadas son:

$$f(-2) = (-2+3)e^{2} = e^{2}$$

Luego tiene un único $\boxed{\text{máximo relativo en } (-2, e^{2})}$.

Por ser continua e indefinidamente derivable, su punto de inflexión lo obtendremos al anular f'':

$e^{-x}(x+1) = 0 \Rightarrow (e^{-x}$ no se anula nunca$)$ $x+1=0 \Rightarrow x=-1$

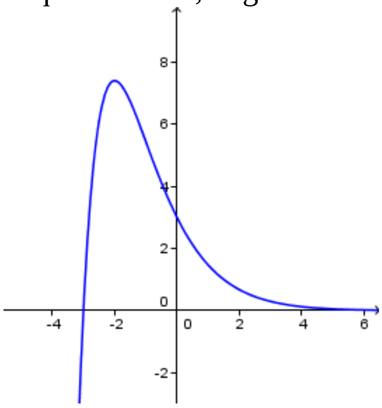
Dado que $f'''(x) = -e^{-x}(x+1) + e^{-x} = e^{-x}(-x-1+1) = -x\,e^{-x} \Rightarrow f'''(-1) = -e \neq 0 \Rightarrow$ Es un $\boxed{\text{punto de inflexión: } (-1, 2e)}$.

c) Esbozar la gráfica de f. *(0,5 puntos)*

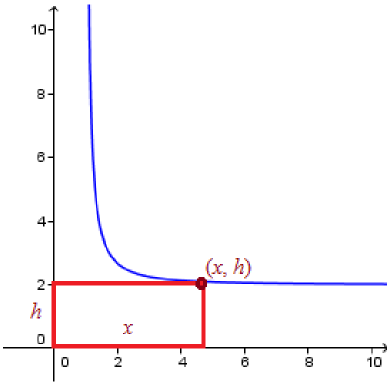
Hallamos los cortes con los ejes de coordenadas:

- $x = 0 \Rightarrow y = 3$: $\boxed{(0, 3)}$.
- $y = 0 \Rightarrow (x+3)e^{-x} = 0 \Rightarrow x = -3$: $\boxed{(-3, 0)}$.

Usando toda la información que tenemos, la gráfica debe ser:



5) De entre todos los rectángulos que tienen uno de sus vértices en el origen de coordenadas, el opuesto de este vértice en la curva $y = \dfrac{2x^2}{x^2-1}$ $(x > 1)$, uno de sus lados situado sobre el semieje positivo de abscisas y otro lado sobre el semieje positivo de ordenadas, halla el que tiene área mínima. *(2 puntos)*



Llamemos x a la base, h a la altura del rectángulo.

Por las condiciones del enunciado, $x > 1$ y no está acotada superiormente.

Como el punto (x, h) está en la gráfica de la curva dada, se tiene que $h = \dfrac{2x^2}{x^2-1}$. De modo que el área del rectángulo (*base* · *altura*), en función de x, vendrá dada por la función:

$$f(x) = x\cdot\frac{2x^2}{x^2-1} = \frac{2x^3}{x^2-1},\ x \in (1, +\infty)$$

que es a quien tendremos que calcularle su mínimo absoluto. Lo haremos analizando su monotonía:

$$f'(x) = \frac{6x^2(x^2-1) - 2x^3 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{6x^4 - 6x^2 - 4x^4}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^4 - 6x^2}{(x^2-1)^2}$$

- Discontinuidades de f ó de f': No tiene en $(1, +\infty)$. Sólo serían -1 y 1 (anulan el denominador), que no están en el dominio.
- $f'(x) = 0$: $2x^4 - 6x^2 = 0 \Rightarrow x^2(2x^2 - 6) = 0 \Rightarrow x = 0 \notin (0, +\infty)$ ó $2x^2 - 6 = 0$ $\Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = -\sqrt{3} \notin (0, +\infty)$ ó $x = \sqrt{3}$.

Por tanto:

	$(1, \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
f'	–	0	+
f	↘	mín	↗

Dada la forma de la función, el mínimo relativo hallado también es mínimo absoluto. Además:

- $x = \sqrt{3} \Rightarrow h = \frac{2\cdot 3}{3-1} = \frac{6}{2} = 3$
- $f(\sqrt{3}) = \frac{2\cdot 3\cdot\sqrt{3}}{3-1} = 3\sqrt{3}$

El rectángulo de área mínima tiene $\sqrt{3}\ u$ de base, $3\ u$ de altura y $3\sqrt{3}\ u^2$ de área.

IES Fernando de Herrera **Curso 2014 / 15**

Primer trimestre - Recuperación – 2º Bach CT

NOMBRE: ____

Instrucciones: **1)** Todos los **folios** deben tener el **nombre** y estar **numerados** en la parte superior. **2)** Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. **3)** No se puede usar **corrector ni lápiz**. Se aconseja no usar borrador. **4)** Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar** la respuesta a una pregunta con las de otras.

1) Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$. Hallar b, c y d sabiendo que f tiene un máximo relativo en $x = -1$ y que $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1} = 4$. *(2,5 ptos)*

2) Calcular $\int_0^1 \frac{x^2}{2x^2 - 2x - 4}\,dx$ *(2,5 puntos)*

3) Calcular $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x}$ *(2,5 puntos)*

4) Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función derivable definida por

$$f(x) = \begin{cases} a - x & \text{si} \quad x \le 1 \\ \frac{b}{x} + \ln x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

a) Calcular a y b. *(1 punto)*

b) Para $a = 3$ y $b = 2$ calcular los extremos absolutos de f en el intervalo $[0, e]$ (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan). *(1,5 puntos)*

SOLUCIONES

1) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$. Hallar b, c y d sabiendo que f tiene un máximo relativo en $x = -1$ y que $\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{x-1} = 4$. *(2,5 ptos)*

- Es suficiente para que haya un máximo relativo en $x = -1$ que $f'(-1) = 0$ y $f''(-1) < 0$. Como $f'(x) = 3x^2 + 2bx + c$, se debe cumplir: $\boxed{3 - 2b + c = 0}$ (1)
- Si sustituimos $x = 1$ en el límite, el denominador se anula. Como el resultado del límite es finito (vale 4), debe, necesariamente, anularse también el numerador: $f(1) = 0 \Rightarrow 1 + b + c + d = 0 \Rightarrow \boxed{b + c + d = -1}$ (2)
- Siendo $f(x)$ y $x - 1$ ilimitadamente derivables, porque así les ocurre a los polinomios, y la indeterminación del límite es 0 / 0, podemos aplicar L`Hôpital y el límite resultante debe dar finito y valer 4 (de lo contrario, el límite original valdría otra cosa):

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^3 + bx^2 + cx + d}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2 + 2bx + c}{1} = \boxed{3 + 2b + c = 4} \quad (3)$$

Las tres condiciones nos llevan a un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas cuya solución será lo que nos solicitan. Resolvemos dicho sistema por Gauss.

$$\begin{cases} -2b + c = -3 \\ b + c + d = -1 \\ 2b + c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_1} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

<u>3ª ec</u>: $4b = 4 \Rightarrow \boxed{b = 1}$

<u>1ª ec</u>: $-2\cdot 1 + c = -3 \Rightarrow -2 + c = -3 \Rightarrow \boxed{c = -1}$

<u>2ª ec</u>: $1 - 1 + d = -1 \Rightarrow \boxed{d = -1}$

Luego $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$

2) Calcular $\int_0^1 \frac{x^2}{2x^2 - 2x - 4} dx$ *(2,5 puntos)*

Estamos ante una integral racional. Como el grado del numerador es mayor o igual que el del denominador, hemos de comenzar con la división entre ambos. Pero si nos fijamos bien, como ambos grados coinciden, podemos evitarla así:

$$I = \int_0^1 \frac{x^2}{2x^2 - 2x - 4} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{x^2 - x - 2} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2 - x - 2 + x + 2}{x^2 - x - 2} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - x - 2} dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x + 2}{x^2 - x - 2} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x + 2}{x^2 - x - 2} dx$$

Si hubiésemos efectuado la división de los polinomios, habríamos llegado al mismo resultado.

Hagamos ahora cada integral por separado. La primera es trivial:

$$\frac{1}{2}\int_0^1 dx = \frac{1}{2}[x]_0^1 = \frac{1}{2}(1 - 0) = \frac{1}{2}$$

Para la segunda (prescindimos del ½), descomponemos el integrando en suma de fracciones simples, para lo que tenemos en cuenta que:

$$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \left\langle \begin{matrix} = -1 \\ = 2 \end{matrix} \right. \Rightarrow x^2 - x - 2 = 1(x + 1)(x - 2)$$

Con lo que:

$$\frac{x+2}{x^2-x-2} = \frac{x+2}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x+1)}{(x+1)(x-2)}$$

Para lo que basta con que sean iguales los numeradores:

$$x + 2 = A(x - 2) + B(x + 1)$$

Veamos qué valores son los de A y B. Para ello, damos valores a x:

- $x = 2$: $4 = 0 + 3B \Rightarrow B = 4/3$
- $x = -1$: $1 = -3A + 0 \Rightarrow A = -1/3$

Con todo ello:

$$\frac{x+2}{x^2-x-2} = \frac{-1}{3}\frac{1}{x+1} + \frac{4}{3}\frac{1}{x-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{x+2}{x^2-x-2}dx = \frac{-1}{3}\int_0^1 \frac{1}{x+1}dx + \frac{4}{3}\int_0^1 \frac{1}{x-2}dx =$$

$$= \frac{-1}{3}\left[\ln|x+1|\right]_0^1 + \frac{4}{3}\left[\ln|x-2|\right]_0^1 = \frac{-1}{3}(\ln 2 - \ln 1) + \frac{4}{3}(\ln 1 - \ln 2) =$$

$$= \frac{-\ln 2}{3} + \frac{-4\ln 2}{3} = \frac{-5\ln 2}{3}$$

Sustituyendo:

$$I = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{-5\ln 2}{3} = \boxed{\frac{1}{2} - \frac{5\ln 2}{6}}$$

3) Calcular $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x}$ *(2,5 puntos)*

$\tan x$ representa la tangente trigonométrica de x. Al sustituir en el límite, obtenemos la indeterminación 0/0. Como las dos funciones son derivables en un entorno de 0 (con lo que podremos encontrar un intervalo cerrado y simétrico respecto de 0 donde son continuas, y derivables en el mismo pero abierto), podemos aplicar L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+\tan^2 x - \cos x}{1-\cos x}$$

Que nos vuelve a dar la misma indeterminación. Como seguimos estando en condiciones de aplicar L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2(\tan x)(1+\tan^2 x) + \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x}$$

Y otra vez:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2(1+\tan^2 x)^2 + 2(\tan x)2(\tan x)(1+\tan^2 x) + \cos x}{\cos x} = \frac{2+0+1}{1} = 3$$

Así, todos los límites anteriores valen 3, incluido el original:

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x} = 3}$$

4) Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función derivable definida por

$$f(x) = \begin{cases} a - x & \text{si} \quad x \le 1 \\ \dfrac{b}{x} + \ln x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

a) Calcular a y b. *(1 punto)*

- $y = a - x$ es continua en todo R (es polinómica) $\Rightarrow$ en particular, lo es en el intervalo $(-\infty, 1)$.
- $y = \dfrac{b}{x} + \ln x$ es continua en $(0, +\infty)$, pues ahí lo es $\ln x$ y el primer sumando sólo tiene discontinuidad en 0. Por tanto, lo es en $(1, +\infty)$.
- Para ser derivable también tiene que ser continua en $x = 1$, que es el único punto que nos falta. Y ello exige la coincidencia de:

  1) $f(1) = a - 1$

  2) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (a - x) = a - 1$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \left(\dfrac{b}{x} + \ln x\right) = b$

Luego será continua en todo R si, y sólo si $\boxed{a - 1 = b}$. (1)

Aplicando las fórmulas de derivación, lo que puede hacerse en intervalos abiertos, tenemos:

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x < 1 \\ -\dfrac{b}{x^2} + \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Si $x > 1$, según la expresión obtenida, f no sería derivable en $x = 0$. Pero dicho valor no está en la zona $x > 1$, por lo que f es derivable en R – {1}. Para que sea derivable en todo R, lo que sabemos que ocurre, debe ser $f'(1^-) = f'(1^+) \Leftrightarrow -1 = -b + 1 \Rightarrow \boxed{b = 2}$. Y sustituyendo en (1):

$$a - 1 = 2 \Rightarrow \boxed{a = 3}.$$

b) Para $a = 3$ y $b = 2$ calcular los extremos absolutos de f en el intervalo $[0, e]$ (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan). *(1,5 puntos)*

Son los valores anteriores, para los que sabemos que f es continua y derivable. Por tanto, los extremos absolutos los encontraremos en los extremos relativos o en los extremos del intervalo, que es, en este caso $[0, e]$.

Del apartado anterior, tenemos la expresión definitiva de f', que no hemos escrito (añadimos la existencia de $f'(1)$):

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x \le 1 \\ -\dfrac{2}{x^2} + \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Como no hay discontinuidades ni en f ni en f', ésta última sólo puede cambiar de signo al atravesar el punto donde se anule.

- Si $x \le 1$ se tiene que $f'(x) = -1$, con lo que nunca se anula.
- Si $x > 1$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{-2 + x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 2$ (no anula el denominador)

No nos hace falta estudiar la monotonía ni la forma de la función, porque nos da igual que en 2 haya un máximo o un mínimo relativo: los extremos absolutos los detectaremos comparando las imágenes de los puntos candidatos: 0, e y 2 (extremos relativos y extremos del intervalo de definición, pues no hay discontinuidades ni de f ni de f'). Aún así, escribimos el cuadro de monotonía, por ilustrar cómo se haría:

	(0, 2)	2	(2, e)
f'	–	0	+
f	↘	mín	↗

Así que el mínimo (relativo y absoluto, según la forma de la función) está en 2. Reiteramos que no nos hubiera hecho falta el estudio de la monotonía. Como:

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{si} \quad x \le 1 \\ \dfrac{2}{x} + \ln x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

- $f(0) = 3$
- $f(2) = 1 + \ln 2 \approx 1.69$
- $f(e) = \dfrac{2}{e} + 1 \approx 1.74$

Lo que significa que:

$\boxed{\text{El máximo absoluto está en } (0, 3) \text{ y el mínimo absoluto en } (2, 1 + \ln 2)}$.