IES Fernando de Herrera **Curso 2014 / 15**

Primer trimestre – Simulacro de examen – 2º Bach CT

NOMBRE: ____

Instrucciones: **1)** Todos los **folios** deben tener el **nombre** y estar **numerados** en la parte superior. **2)** Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. **3)** No se puede usar **corrector ni lápiz**. Se aconseja no usar borrador. **4)** Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar** la respuesta a una pregunta con las de otras.

1) Sea $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ la función definida por $f(x) = x^2 e^{-x^2}$.
   a) Hallar las asíntotas de la gráfica de f. *(1 punto)*
   b) Determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y calcular sus extremos relativos o locales (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función). *(1 punto)*
   c) Esbozar la gráfica de f. *(0,5 puntos)*

2) Se desea construir una caja cerrada de base cuadrada con una capacidad de 80 cm^3. Para la tapa y la superficie lateral se usa un material que cuesta 1€ / cm^2 y para la base se emplea un material un 50% más caro. Hallar las dimensiones de la caja para que su coste sea mínimo. *(2,5 puntos)*

3) Se sabe que la función $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$ tiene un máximo absoluto en el punto de abscisa $x = 1$, que su gráfica pasa por el punto (1, 4) y que $\int_{-1}^{3} f(x)dx = \frac{32}{3}$. Hallar a, b y c. *(2,5 puntos)*

4) Calcular la integral $\int \frac{3x^3 + x^2 - 10x + 1}{x^2 - x - 2} dx$ *(2,5 puntos)*

SOLUCIONES

Descontar 0,2p cada vez que se cambie un $=$ por un $\Rightarrow$, o al revés. Penalizar severamente no explicar suficientemente, presentación confusa o errores de sintaxis matemática. Descontar entre 0.3p por cada despiste simple o por cada error de cálculo, que no alteren la dificultad del ejercicio.

1) Sea $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ la función definida por $f(x) = x^2 e^{-x^2}$.

a) Hallar las asíntotas de la gráfica de *f*. *(1 punto)*

- Asíntotas verticales: No tiene, porque f es continua en R (producto de dos elementales cuyo dominio es R). *(0,2 p)*
- Asíntotas horizontales: La función exponencial tiene diferente comportamiento en $-\infty$ y en $+\infty$. Pero en nuestra función, al tomar límites cuando $x \to \infty$, como en el exponente de e la x está al cuadrado, dará el mismo resultado en $-\infty$ y en $+\infty$. Así:

$$\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x^2} = \left((+\infty)e^{-\infty} = \infty\cdot 0\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

Tenemos un cociente de funciones derivables con una de las indeterminaciones en las que es aplicable L'Hôpital:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{2xe^{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = \left(\frac{1}{\infty}\right) = 0$$

Por tanto, el límite original vale lo mismo, con lo que la recta $\boxed{y = 0}$ es asíntota horizontal. *(0,8 p. Si no se da la ec. de la asíntota completa, 0,4 p)*

- Asíntotas oblicuas: Si intentamos calcularla, volveremos a obtener la misma asíntota horizontal que ya tenemos. *(0,2 p)*

b) Determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y calcular sus extremos relativos o locales (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función). *(1 punto)*

$$f'(x) = 2xe^{-x^2} - x^2 2xe^{-x^2} = 2xe^{-x^2}(1-x^2) \qquad (0{,}1\ p)$$

- Discontinuidades de f ó de f': No hay.
- $f'(x) = 0$: $2xe^{-x^2}(1-x^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \Rightarrow x = 0; \text{ ó}: \\ e^{-x^2} = 0, \text{ imposible; ó}: \\ 1-x^2 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ ó } x = 1 \end{cases}$

Dividimos R (el dominio) en intervalos mediante los puntos obtenidos:

	(–∞, –1)	–1	(–1, 0)	0	(0, 1)	1	(1, +∞)
f'	+	0	–	0	+	0	–
f	↗	Mx	↘	mín	↗	Mx	↘

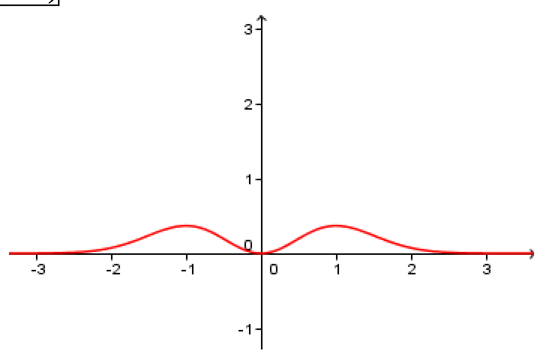
$\boxed{\text{Es } \textit{creciente} \text{ en } (-\infty, -1) \text{ y en } (0, 1), \text{ y } \textit{decreciente} \text{ en } (-1, 0) \text{ y en } (1, +\infty)}$.

- $f(-1) = e^{-1} \Rightarrow \boxed{\text{Máximo relativo en } (-1, e^{-1})}$. *(0,6p el cuadro)*
- $f(0) = 0 \Rightarrow \boxed{\text{mínimo relativo en } (0, 0)}$. *(0,1p cada extremo)*
- $f(1) = e^{-1} \Rightarrow \boxed{\text{Máximo relativo en } (1, e^{-1})}$.

c) Esbozar la gráfica de *f*. *(0,5 puntos)*

La función es, claramente, *par*. Y sólo corta a los ejes en (0, 0). Usando la información previamente obtenida, podemos esbozar la gráfica.

(Sólo si coincide con los resultados obtenidos en los apartados anteriores)



2) Se desea construir una caja cerrada de base cuadrada con una capacidad de 80 cm^3. Para la tapa y la superficie lateral se usa un material que cuesta 1€ / cm^2 y para la base se emplea un material un 50% más caro. Hallar las dimensiones de la caja para que su coste sea mínimo. *(2,5 puntos)*

Se trata de construir un prisma de base cuadrada (ortoedro). Llamemos x al largo y al ancho, y h a la altura. Ambos, en cm.

- El área de la base será x^2. Su coste, $1{,}5x^2 = \frac{3}{2}x^2$.
- El área de la tapadera será, igualmente, x^2. Su coste, x^2.
- El área lateral será la suma del área de 4 rectángulos de dimensiones $x \times h$. Es decir, sumará $4xh$. Su coste será $4xh$.
- El volumen será $x \cdot x \cdot h = 80 \Rightarrow h = 80/x^2$.

Como consecuencia de lo cual, el coste total será:

$$\frac{3}{2}x^2 + x^2 + 4x\frac{80}{x^2} = \frac{3x^2}{2} + x^2 + \frac{320}{x} = \frac{3x^3 + 2x^3 + 640}{2x} = \boxed{\frac{5x^3 + 640}{2x} = f(x)}$$

que será la función a *minimizar*. *(0,5 p la función + 0,3 p el dominio)*

<u>El dominio de la función será $(0, +\infty)$</u>, pues el lado de la base no puede llegar a 0 si queremos construir el prisma, ni ser negativo. Y podría crecer indefinidamente, disminuyendo la altura en consecuencia.

Estudiemos la monotonía de esta función.

$$f'(x) = \frac{15x^2 2x - 2(5x^3 + 640)}{4x^2} = \frac{30x^3 - 10x^3 - 1280}{4x^2} = \frac{20x^3 - 1280}{4x^2} = \boxed{\frac{5x^3 - 320}{x^2}}$$

(0,2 p la derivada)

- <u>Discontinuidades de f o de f'</u>: $x = 0$, que no está en el dominio.
- <u>$f'(x) = 0$</u>: $5x^3 - 320 = 0 \Rightarrow x^3 = 64 \Rightarrow x = \sqrt[3]{64} = 4$.

Por tanto:

	$(0, 4)$	4	$(4, +\infty)$
f'	–	0	+
f	↘	mín	↗

Lo que significa que, dada la forma de la función, el mínimo relativo encontrado también es absoluto. Las dimensiones de la caja serán, pues: *(1,5p la solución final)*

Base: Un cuadrado de 4 cm de lado.
Altura: $h = 80/4^2 = 5$ cm.
Coste (no se pide): $f(4) = \frac{5 \cdot 4^3 + 640}{2 \cdot 4} = 120$ €.

3) Se sabe que la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$ tiene un máximo absoluto en el punto de abscisa $x = 1$, que su gráfica pasa por el punto $(1, 4)$ y que $\int_{-1}^{3} f(x)dx = \frac{32}{3}$. Hallar a, b y c. *(2,5 puntos)*

La función que nos dan es cuadrática, cuya gráfica es una parábola. Para tener un máximo absoluto, debe ser cóncava, y dicho máximo absoluto será el máximo relativo. Luego lo que tenemos es un máximo relativo en $(1, 4)$.

Un teorema nos dice que si $f'(a) = 0$ y $f''(a) < 0 \Rightarrow$ hay un máximo relativo en $x = a$. Vamos a exigir esto para conseguirlo:

$$f'(x) = 2ax + b \Rightarrow f'(1) = \boxed{2a + b = 0} \quad (1)$$ *(0,3p)*

Tenemos una relación entre a y b, que nos garantiza lo que nos piden, siempre que $f''(1) < 0$, que comprobaremos cuando tengamos más información.

Por otra parte, si pasa por (1, 4) $\Rightarrow f(1) = 4 \Rightarrow \boxed{a + b + c = 4}$ (2). Tenemos una segunda condición. *(0,3p)*

Por último:

$$\int_{-1}^{3} f(x)dx = \int_{-1}^{3}(ax^2+bx+c)dx = \left[a\frac{x^3}{3}+b\frac{x^2}{2}+cx\right]_{-1}^{3} =$$

$$= \left(a\frac{3^3}{3}+b\frac{3^2}{2}+c3\right)-\left(a\frac{(-1)^3}{3}+b\frac{(-1)^2}{2}+c(-1)\right) = 9a+\frac{9b}{2}+3c-\left(-\frac{a}{3}+\frac{b}{2}-c\right) =$$

$$= 9a+\frac{9b}{2}+3c+\frac{a}{3}-\frac{b}{2}+c = \frac{28}{3}a+4b+4c = \frac{32}{3} \Rightarrow 28a + 12b + 12c = 32 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{7a + 3b + 3c = 8} \ (3)$$ *(0,9p)*

Resolvemos el sistema formado por las tres ecuaciones encontradas, por Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 7 & 3 & 3 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3-3F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

3ª ec: $4a = -4 \Rightarrow \boxed{a = -1}$
1ª ec: $2\cdot(-1) + b = 0 \Rightarrow \boxed{b = 2}$
2ª ec: $-1 + 2 + c = 4 \Rightarrow \boxed{c = 3}$

Luego la función solicitada es: $\boxed{f(x) = -x^2 + 2x + 3}$. *(0,5p)*

Y esta función verifica lo único que nos queda: $f''(x) = -1 \Rightarrow f''(1) = -1 < 0$, por lo que, en efecto, lo que hay en $x = -1$ es un *máximo*. *(0,5p)*

4) Calcular la integral $\int \frac{3x^3+x^2-10x+1}{x^2-x-2}dx$ *(2,5 puntos)*

Estamos ante una integral racional. Como el grado del numerador es mayor o igual que el del denominador, hemos de comenzar con la división entre ambos:

$$\begin{array}{rrrr|l} 3x^3 & + x^2 & - 10x & + 1 & x^2-x-2 \\ \cline{5-5} -3x^3 & + 3x^2 & + 6x & & 3x+4 \\ \cline{1-4} & 4x^2 & - 4x & + 1 & \\ & -4x^2 & + 4x & + 8 & \\ \cline{2-4} & & & 9 & \end{array}$$

Por tanto:

$$\frac{3x^3+x^2-10x+1}{x^2-x-2} = \frac{(x^2-x-2)(3x+4)+9}{x^2-x-2} = \frac{(x^2-x-2)(3x+4)}{x^2-x-2}+\frac{9}{x^2-x-2} =$$

$$= 3x + 4 + \frac{9}{x^2-x-2}$$

Por otra parte, factorizamos el denominador:

$$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \frac{1\pm 3}{2} = \left\langle \begin{array}{l} =-1 \\ =2 \end{array} \right. \Rightarrow x^2 - x - 2 = 1(x + 1)(x - 2)$$

Descomponemos en suma de fracciones simples la fracción algebraica anterior:

$$\frac{9}{x^2-x-2} = \frac{9}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x+1)}{(x+1)(x-2)}$$

Para lo que basta con que sean iguales los numeradores:

$$9 = A(x-2) + B(x+1)$$

Veamos qué valores son los de A y B. Para ello, damos valores a x:

- $x = 2$: $9 = 0 + 3B \Rightarrow B = 3$
- $x = -1$: $9 = -3A + 0 \Rightarrow A = -3$

Con todo ello:

$$\frac{9}{x^2-x-2} = \frac{-3}{x+1} + \frac{3}{x-2}$$ *(0,5 puntos)*

Por lo que:

$$\int \frac{3x^3+x^2-10x+1}{x^2-x-2}dx = \int (3x+4)dx + \int \frac{-3}{x+1}dx + \int \frac{3}{x-2}dx =$$

$$= \boxed{3\frac{x^2}{2} + 4x - 3\ln|x+1| + 3\ln|x-2| + k}$$ *(2 puntos)*

NOMBRE: ____

Instrucciones: **1)** Todos los **folios** deben tener el **nombre** y estar **numerados** en la parte superior. **2)** Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. **3)** No se puede usar **corrector ni lápiz**. Se aconseja no usar borrador. **4)** Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar** la respuesta a una pregunta con las de otras.

1) Sabiendo que $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{a}{\ln x}\right)$ es finito, calcular a y el valor del límite (ln denota el logaritmo neperiano). *(2 puntos)*

2) Sea f la función definida por $f(x) = \frac{1}{2x} + \ln x$ para $x > 0$ (ln denota el logaritmo neperiano).
   a) Determina el punto de la gráfica de f en el que la pendiente de la recta tangente es máxima. *(1,5 puntos)*
   b) Hallar la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$. *(0,5 puntos)*

3) Calcular $\int_2^4 \frac{x^2}{x^2-6x+5}\,dx$ *(2 puntos)*

4) Determinar una función derivable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sabiendo que $f(1) = -1$ y que:

$$f'(x) = \begin{cases} x^2-2x & \text{si } x<0 \\ e^x-1 & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$$ *(2 puntos)*

5) Estudiar la derivabilidad de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por *(2 puntos)*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1-|x|} & \text{si } x\neq -1 \text{ y } x\neq 1 \\ 0 & \text{si } x=-1 \text{ ó } x=1 \end{cases}$$

SOLUCIONES

Descontar 0,2p cada vez que se cambie un $=$ por un $\Rightarrow$, o al revés. Descontar, igualmente, por no explicar suficientemente, por presentación confusa o por errores de sintaxis matemática; y hacerlo con severidad. Descontar entre 0.3p por cada despiste simple o por cada error de cálculo, que no alteren la dificultad del ejercicio.

1) Sabiendo que $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{a}{\ln x}\right)$ es finito, calcular a y el valor del límite (ln denota el logaritmo neperiano). *(2 puntos)*

Suponiendo $a < 0$, se tiene:

$$\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{a}{\ln x}\right) = (-\infty-\infty) = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{a}{\ln x}\right) = (+\infty+\infty) = +\infty$$

con lo que el límite completo valdría ∞ (sin signo).

Si $a = 0$:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{a}{\ln x}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{x}{x-1} = \infty$$

Como nos dicen que el límite es finito, <u>debe ser $a > 0$</u>. En este supuesto, obtenemos la indeterminación $+\infty - \infty$ ó $-\infty + \infty$, según que tendamos a 1 por la derecha o por la izquierda. Vamos a intentar convertirla en alguna en las que sea aplicable la Regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{a}{\ln x}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{x\ln x - a(x-1)}{(x-1)\ln x} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

Podemos encontrar un intervalo simétrico en torno a 1 donde las funciones del numerador y del denominador son continuas en el cerrado y derivables en el abierto, por lo que es aplicable L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x + x\frac{1}{x} - a}{\ln x + (x-1)\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1}\frac{\ln x + 1 - a}{\ln x + \frac{x-1}{x}} = \left(\frac{1-a}{0}\right)$$

Si $a \neq 1$, el límite valdría infinito. Por tanto, la única posibilidad de que sea finito es que $a = 1$. En ese caso, es aplicable, nuevamente L'Hôpital, por lo que vamos a continuar para ver si, en efecto, el límite resulta finito y, además, porque nos lo solicita el enunciado:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{x-(x-1)}{x^2}} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Así que el problema tiene solución si $\boxed{a = 1 \text{ y el resultado del límite es } ½}$.

(Si no se comprueban las condiciones completas en las que L'Hôpital es aplicable, descontar 0.5p. Si ni siquiera se dice que se está aplicando L'Hôpital, descontar 1p. No es necesaria la comprobación previa de que debe ser $a > 0$)

2) Sea f la función definida por $f(x) = \frac{1}{2x} + \ln x$ para $x > 0$ (ln denota el logaritmo neperiano).

a) Determina el punto de la gráfica de f en el que la pendiente de la recta tangente es máxima. *(1,5 puntos)*

La pendiente en $(x, f(x))$ es, según la *Interpretación Geométrica de la Derivada*, $m = f'(x)$. O sea:

$$m = f'(x) = -\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x} = \frac{-1+2x}{2x^2}$$

Esta pendiente varía, evidentemente, con x. Es una función de x a la que vamos a llamar $g(x)$. Así, buscamos el valor de x que produce el *máximo absoluto* de la función:

$$g(x) = \frac{2x-1}{2x^2} \quad \text{con } x \in (0, +\infty)$$

por ser el intervalo indicado el Dom(f) y para cuyos valores existe, también, $g(x)$. Buscaremos los extremos absolutos a través del estudio de la monotonía de g:

$$g'(x) = \frac{2\cdot 2x^2 - (2x-1)4x}{(2x^2)^2} = \frac{4x^2 - 8x^2 + 4x}{4x^4} = \frac{-4x^2+4x}{4x^4} = \frac{4(-x^2+x)}{4x^4} =$$

$$\frac{-x^2+x}{x^4} = \frac{-x+1}{x^3}$$

- Discontinuidades de g ó g': No tiene.
- $g'(x) = 0$: $-x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

Así:

	(0, 1)	1	(1, +∞)
g'	+	0	–
g	↗	Máx	↘

La forma de la función nos dice que este máximo relativo también es absoluto. Así, $\boxed{\text{la pendiente máxima se obtiene cuando } x = 1 \text{ y vale } m = g(1) = 1/2}$.

(Si no se ha especificado el dominio de g, descontar 0,5p)

b) Hallar la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$. *(0,5 puntos)*

- Punto de tangencia: $x = 1 \Rightarrow f(1) = ½$: (1, ½).
- Pendiente de la *tangente*: $m = ½$ (del apartado anterior)
- Pendiente de la *normal*: $m' = \frac{-1}{m} = \frac{-1}{1/2} = -2$
- Recta *normal*: Usando la ecuación punto-pendiente la obtenemos.

$$y - ½ = -2(x-1) \Rightarrow y = -2x + 2 + ½ \Rightarrow \boxed{y = -2x + \frac{5}{2}}$$

3) Calcular $\int_2^4 \frac{x^2}{x^2-6x+5}dx$ *(2 puntos)*

Como el grado del numerador de esta integral racional es mayor o igual que el del denominador, habría que comenzar realizando la división de un polinomio entre otro. Pero cuando el grado es igual, como en este caso, podemos intentar evitarla:

$$I = \int_2^4 \frac{x^2}{x^2-6x+5}dx = \int_2^4 \frac{x^2-6x+5+6x-5}{x^2-6x+5}dx =$$

$$= \int_2^4 \frac{x^2-6x+5}{x^2-6x+5}dx + \int_2^4 \frac{6x-5}{x^2-6x+5}dx = \int_2^4 dx + I_1 = [x]_2^4 + I_1 = (4-2) + I_1 = 2 + I_1$$

Descomponemos en suma de fracciones simples el integrando de I_1. Para ello, comenzamos por averiguar las raíces del denominador:

$x^2 - 6x + 5 = 0 \;\Rightarrow\; x = \dfrac{6\pm\sqrt{36-20}}{2} = \dfrac{6\pm 4}{2} = \langle {=1 \atop =5} \;\Rightarrow\; x^2 - 6x + 5 = 1(x-1)(x-5)$

Por tanto:

$$\frac{6x-5}{x^2-6x+5} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-5} = \frac{A(x-5)+B(x-1)}{(x-1)(x-5)}$$

Lo que será cierto si los numeradores coinciden:

$$6x - 5 = A(x-5) + B(x-1)$$

Y para averiguar qué valores de A y B verifican la igualdad, damos valores convenientes a x:

- $x = 1$: $1 = -4A + 0 \;\Rightarrow\; A = -1/4$
- $x = 5$: $25 = 0 + 4B \;\Rightarrow\; B = 25/4$

De esta manera:

$$I_1 = -\frac{1}{4}\int_2^4 \frac{1}{x-1}dx + \frac{25}{4}\int_2^4 \frac{1}{x-5}dx = -\frac{1}{4}\left[\ln|x-1|\right]_2^4 + \frac{25}{4}\left[\ln|x-5|\right]_2^4 =$$

$$= -\frac{1}{4}(\ln 3 - \ln 1) + \frac{25}{4}(\ln 1 - \ln 3) = -\frac{1}{4}\ln 3 - \frac{25}{4}\ln 3 = -\frac{13}{2}\ln 3$$

Sustituyendo arriba, tenemos, finalmente:

$$\boxed{I = 2 - \frac{13}{2}\ln 3}$$

4) Determinar una función derivable $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sabiendo que $f(1) = -1$ y que:

$$f'(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si} \quad x < 0 \\ e^x - 1 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

(2 puntos)

Esta función procede de derivar una definida a trozos. Los teoremas de las tablas de derivadas funcionan en intervalos abiertos, por lo que cada una de las dos fórmulas que componen f deben tener una primitiva en sus correspondientes abiertos. Además, sabemos que $f'(0) = e^0 - 1 = 0$, lo que usaremos para completar f. Procedamos:

$$\int (x^2 - 2x)dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + k$$

$$\int (e^x - 1)dx = e^x - x + k'$$

Así que, inicialmente, nos queda:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{3} - x^2 + k & \text{si} \quad x < 0 \\ e^x - x + k' & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Para ser derivable, debe ser continua. Así: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \Leftrightarrow \boxed{k = 1 + k'}$ (1).

Además, $f(1) = -1 \;\Rightarrow\; e - 1 + k' = -1 \;\Rightarrow\; \boxed{k' = -e} \;\Rightarrow$ De (1): $\boxed{k = 1 - e}$.

La imagen de $x = 0$ debe coincidir con el resultado de estos dos límites laterales: basta poner un igual en cualquiera de las dos definiciones. Lo hacemos en la segunda, por coherencia con la fórmula de f'. De modo que, finalmente:

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{3} - x^2 + 1 - e & \text{si} \quad x < 0 \\ e^x - x - e & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}}$$

5) Estudiar la derivabilidad de la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por *(2 puntos)*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1-|x|} & \text{si} \quad x \neq -1 \text{ y } x \neq 1 \\ 0 & \text{si} \quad x = -1 \text{ ó } x = 1 \end{cases}$$

Para estudiar la derivabilidad, hemos de considerar, previamente, la continuidad, porque si tuviera alguna discontinuidad, en ella no podría ser derivable.
Salvo en dos puntos (–1 y 1), la función está definida por el cociente de dos funciones continuas (x, por un lado, y $1 - |x|$, que lo es por ser suma de dos continuas). Será, pues, continua salvo en los puntos que anulen el denominador, esto es, salvo en:

$$1 - |x| = 0 \Leftrightarrow 1 = |x| \Leftrightarrow x = -1 \text{ ó } x = 1$$

(recordar una propiedad del valor absoluto: $|x| = a \Leftrightarrow x = -a$ ó $x = a$). Estudiemos dichos puntos.

- $x = -1$: 1) $\exists f(-1) = 0$; 2) $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{1}{1-|x|} = \dfrac{1}{1-1} = \infty$. Por tanto, presenta una discontinuidad asintótica. No vamos a detenernos en averiguar si es, además, de salto infinito, pues no nos piden el estudio de la continuidad.
- $x = 1$: 1) $\exists f(1) = 0$; 2) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{1-|x|} = \dfrac{1}{1-1} = \infty$. Por tanto, presenta, igualmente, una discontinuidad asintótica.

De este modo, f es continua en $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$. Por tanto, no puede ser derivable ni en –1 ni en 1. *(0,5p)*

Podemos derivar directamente aplicando las fórmulas de derivación en intervalos abiertos. Pero con esta función nos encontramos con un valor absoluto, función no elemental, cuya derivada no podemos obtener directamente. Es necesario aplicar la definición de valor absoluto para desembarazarse del mismo y tener la función definida a trozos pero a través de funciones elementales, que podamos derivar.
Sabemos que la definición referida es:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Nos vamos a f. En la expresión $\dfrac{1}{1-|x|}$, diferenciamos, entonces, cuando estemos considerando valores $x \geq 0$ y $x < 0$, y sustituimos según lo anterior, pero considerando que dicha expresión es válida sólo si x no es –1 ni 1, lo que nos lleva a excluir dichos puntos de las zonas $x \geq 0$ y $x < 0$, si bien cada uno de ellos está sólo en una de esas zonas:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1-x} & \text{si} \quad x \geq 0 \text{ y } x \neq 1 \\ \dfrac{x}{1-(-x)} & \text{si} \quad x < 0 \text{ y } x \neq -1 \\ 0 & \text{si} \quad x = -1 \text{ ó } x = 1 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{x}{1-x} & \text{si} \quad x \geq 0 \text{ y } x \neq 1 \\ \dfrac{x}{1+x} & \text{si} \quad x < 0 \text{ y } x \neq -1 \\ 0 & \text{si} \quad x = -1 \text{ ó } x = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1-x} & \text{si} \quad x \in [0,1) \cup (1,+\infty) \\ \dfrac{x}{1+x} & \text{si} \quad x \in (-\infty,-1) \cup (-1,0) \\ 0 & \text{si} \quad x = -1 \text{ ó } x = 1 \end{cases}$$

Por tanto, derivando en intervalos abiertos:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x-x(-1)}{(1-x)^2} = \dfrac{1-x+x}{(1-x)^2} = \dfrac{1}{(1-x)^2} & \text{si} \quad x \in (0,1) \cup (1,+\infty) \\ \dfrac{1+x+x}{(1+x)^2} = \dfrac{1}{(1+x)^2} & \text{si} \quad x \in (-\infty,-1) \cup (-1,0) \end{cases}$$ *(0,5p)*

Y sólo nos resta estudiar qué sucede en $x = 0$, pues sabemos que no puede ser derivable en -1 ni 1. Aplicando los resultados que tenemos:

$$f'(0^-) = \frac{1}{(1+0)^2} = 1 \quad f'(0^+) = \frac{1}{(1-0)^2} = 1 \Rightarrow \exists f'(0) = 1$$

Por tanto, la expresión definitiva de f' es:

$$\boxed{f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1-x)^2} & \text{si} \quad x \in [0,1) \cup (1,+\infty) \\ \dfrac{1}{(1+x)^2} & \text{si} \quad x \in (-\infty,-1) \cup (-1,0) \end{cases}}$$

donde hemos añadido el resultado obtenido para la derivada en 0 en la primera zona. *(1p)*