IES Fernando de Herrera **Curso 2016 / 17**

Primer trimestre – Observación evaluable escrita nº 1 – 2º Bach CT

NOMBRE: ____

Instrucciones: **1)** Todos los **folios** deben tener el **nombre** y estar **numerados** en la parte superior. **2)** Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. **3)** No se puede usar **corrector ni lápiz**, y el bolígrafo debe ser de **tinta indeleble**. Se aconseja no usar borrador. **4)** Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar** la respuesta a una pregunta con las de otras. **5)** **Desatender las instrucciones puede penalizarse con hasta 1 punto** o la **anulación** en caso de usar tinta corregible.

1) Sea $f : (-\infty, 10) \to \mathrm{R}$ la función definida por $f(x) = \begin{cases} a^x - 6 & \text{si} \quad x < 2 \\ |x-5| & \text{si} \quad 2 \le x < 10 \end{cases}$.

   a) Determinar a sabiendo que f es continua y que $a > 0$. *(1 punto)*

   b) Estudiar la derivabilidad de f. *(1,5 puntos)*

2) Calcular el siguiente límite: $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln(x)} - \dfrac{2}{x^2-1}\right)$ *(2,5 puntos)*

3) Sea $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ la función definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Calcular los valores de a, b, c y d sabiendo que f verifica: *(2,5 puntos)*
   - El punto $(0, 1)$ es un punto de inflexión de la gráfica de f.
   - f tiene un mínimo local en el punto de abscisa $x = 1$.
   - La recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$ tiene pendiente 1.

4) De entre todos los triángulos cuya base y altura suman 20 cm, ¿qué longitud tiene la base del de área máxima? *(2,5 puntos)*

SOLUCIONES

1) Sea $f : (-\infty, 10) \to \mathrm{R}$ la función definida por $f(x) = \begin{cases} a^x - 6 & \text{si} \quad x < 2 \\ |x-5| & \text{si} \quad 2 \le x < 10 \end{cases}$.

a) Determinar a sabiendo que f es continua y que $a > 0$. *(1 punto)*

Estudiemos la continuidad de f: si no fuera continua, independientemente del valor de a, el problema no tendría solución. Para ello, tenemos en cuenta que, como $a > 0$, a^x es una función exponencial habitual.

- $(-\infty, 2)$: f está definida por la suma de una exponencial y una constante, ambas continuas en todo R. Luego, en particular, es continua en los puntos de este intervalo.
- $(2, 10)$: El valor absoluto de una función continua, y una polinómica lo es en todo R, es una función continua. Luego f lo es en este intervalo.
- $x = 2$: 1) $\exists f(2) = |2 - 5| = 3$; 2) $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (a^x - 6) = a^2 - 6$; $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} |x-5| = 3$. Como es continua, estos tres resultados deben coincidir:
$$a^2 - 6 = 3 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = 3 \text{ } (a > 0, \text{ como sabemos})$$

Por tanto, f es continua en todo su dominio si, y sólo si $\boxed{a = 3}$.

b) Estudiar la derivabilidad de f. *(1,5 puntos)*

Para derivar la función, debemos separar el valor absoluto en dos trozos, acudiendo a su definición, pues dicha función no es derivable directamente.

Sabemos que $|t| = \begin{cases} -t & \text{si} \quad t < 0 \\ t & \text{si} \quad t \ge 0 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow |x-5| = \begin{cases} -(x-5) & \text{si} \quad x-5 < 0 \\ x-5 & \text{si} \quad x-5 \ge 0 \end{cases} = \begin{cases} -x+5 & \text{si} \quad x < 5 \\ x-5 & \text{si} \quad x \ge 5 \end{cases} \Rightarrow$$

Sustituyendo y combinando esta definición con la de f, restringiéndonos a la zona en la que actúa $|x-5|$:

$$f(x) = \begin{cases} 3^x - 6 & \text{si} \quad x < 2 \\ -x+5 & \text{si} \quad 2 \le x < 5 \\ x-5 & \text{si} \quad 5 \le x < 10 \end{cases}$$

Ahora podemos derivar. Lo hacemos directamente en intervalos abiertos aplicando los resultados de las tablas de derivadas, y luego estudiamos qué sucede en los puntos de conexión de las diferentes definiciones de f:

$$f'(x) = \begin{cases} 3^x \ln 3 & \text{si} \quad x < 2 \\ -1 & \text{si} \quad 2 < x < 5 \\ 1 & \text{si} \quad 5 < x < 10 \end{cases}$$

- $x = 2$: $f'(2^-) = 3^2 \ln 3 = 9 \ln 3$; $f'(2^+) = -1$. Como no coinciden, $\nexists f'(2)$.
- $x = 5$: $f'(5^-) = -1$; $f'(5^+) = 1$. No coinciden $\Rightarrow \nexists f'(5)$.

Por tanto, la expresión definitiva de f' es la que teníamos:

$$\boxed{f'(x) = \begin{cases} 3^x \ln 3 & \text{si} \quad x < 2 \\ -1 & \text{si} \quad 2 < x < 5 \\ 1 & \text{si} \quad 5 < x < 10 \end{cases}}$$

2) Calcular el siguiente límite: $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln(x)}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$ *(2,5 puntos)*

En principio, al sustituir, obtenemos la indeterminación $\infty-\infty$ (sería $-\infty+\infty$ si $x\to 1^-$ y $+\infty-\infty$, si la tendencia es por la derecha). Vamos a cambiar la expresión:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln(x)}-\frac{2}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1-2\ln(x)}{(x^2-1)\ln(x)}=\left(\frac{1-1-0}{(1-1)0}=\frac{0}{0}\right)$$

Como tanto el numerador como el denominador son derivables en un entorno de 1, podemos aplicar la regla de L'Hôpital, y el límite tendrá el valor del siguiente:

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x-2\frac{1}{x}}{2x\ln(x)+(x^2-1)\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{2x^2-2}{x}}{\frac{2x^2\ln(x)+x^2-1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-2}{2x^2\ln(x)+x^2-1}$$

Seguimos con la misma indeterminación y con numerador y denominador derivables en un entorno de $x=1$. Volvemos a aplicar L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 1}\frac{4x}{4x\ln(x)+2x^2\frac{1}{x}+2x}=\lim_{x\to 1}\frac{4x}{4x\ln(x)+2x+2x}=\lim_{x\to 1}\frac{4x}{4x\ln(x)+4x}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln(x)+1}=1$$

Por tanto, todos los límites anteriores toman este valor:

$$\boxed{\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln(x)}-\frac{2}{x^2-1}\right)=1}$$

3) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. Calcular los valores de a, b, c y d sabiendo que f verifica: *(2,5 puntos)*

- El punto $(0, 1)$ es un punto de inflexión de la gráfica de f.
- f tiene un mínimo local en el punto de abscisa $x = 1$.
- La recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$ tiene pendiente 1.

- El punto $(0, 1)$ es un punto de inflexión de la gráfica de f: Exigiendo que $f''(0)=0$ y que $f'''(0)\neq 0$, garantizaremos que en $x = 0$ hay un punto de inflexión. Como quiera que:

  $$f'(x)=3ax^2+2bx+c \qquad f''(x)=6ax+2b \qquad f'''(x)=6a$$

  las condiciones mencionadas se traducen en que:

  $$2b=0\Rightarrow \boxed{b=0} \quad \text{y en que} \quad 6a\neq 0\Rightarrow a\neq 0 \quad (1)$$

  Por otro lado, en este punto hay un dato no utilizado y que resulta crucial, y es que la ordenada del punto de inflexión es 1, es decir, que $f(0)=1\Rightarrow \boxed{d=1}$.
- f tiene un mínimo local en el punto de abscisa $x = 1$: Al tratarse de una función indefinidamente derivable, para que esto se cumpla bastará exigir que $f'(1)=0$ y que $f''(1)>0$ (de lo contrario, sería un máximo y el problema no tendría solución). Así:

  $$3a+c=0 \quad (2), \qquad \text{siendo } 6a>0\Leftrightarrow a>0 \quad (3)$$
- La recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$ tiene pendiente 1: La pendiente de dicha tangente será $f'(2)$. Hay, entonces, que exigir que $f'(2)=1$:

$$3a4 + c = 1 \ \Rightarrow\ 12a + c = 1 \quad (4)$$

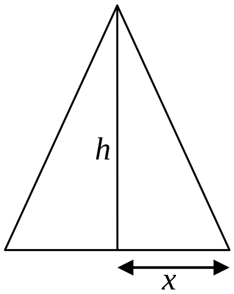
Si despejamos en (4) y sustituimos en (2):

$$c = 1 - 12a \ \Rightarrow\ 3a + 1 - 12a = 0 \ \Rightarrow\ -9a + 1 = 0 \ \Rightarrow\ \boxed{a = 1/9}.$$

Con esto, se verifican las exigencias (1) y (3). Sustituyendo en (2): $1/3 + c = 0 \ \Rightarrow$ $\boxed{c = -1/3}$.

En definitiva: $\boxed{a = 1/9,\ b = 0,\ \ c = -1/3,\ d = 1}$. Reiteramos la necesidad de las condiciones (1) y (3).

4) De entre todos los triángulos cuya base y altura suman 20 cm, ¿qué longitud tiene la base del de área máxima? *(2,5 puntos)*



Llamando x a la semibase y h a la altura, la restricción del enunciado nos impone que:

$$2x + h = 20 \ \Rightarrow\ h = 20 - 2x$$

El mínimo valor que podría tomar x es 0, en cuyo caso la altura debería medir 20. Cuando h decrece, x aumenta, y el mínimo valor para la altura es 0, con lo que sería la base quien mediría 20 y, por lo tanto, la semibase x valdría 10. Por tanto:

$$x \in [0, 10]$$

El área del triángulo es $2xh/2 = xh = x(20 - 2x) = -2x^2 + 20x$. Y es lo que hay que maximizar. Es decir, el problema consiste en hallar el máximo absoluto de la función:

$$f(x) = -2x^2 + 20x, \ \text{con}\ \ x \in [0, 10]$$

que verifica: $f\,'(x) = -4x + 20$

Al tratarse de una parábola cóncava, el máximo absoluto coincidirá con el vértice, siempre y cuando se encuentre dentro del dominio. Con todo, seguiremos el procedimiento general.

Puntos a estudiar:

- Extremos del dominio: 0; 10. Se verifica que: $f(0) = 0$; $f(10) = -2\cdot 100 + 20\cdot 10 = 0$.
- Discontinuidades de f: No tiene (es un polinomio).
- Discontinuidades de $f\,'$: No tiene.
- $f\,'(x) = 0$: $-4x + 20 = 0 \ \Rightarrow\ x = 5$. Y se tiene que: $f(5) = -2\cdot 25 + 20\cdot 5 = 50$.

Por tanto, el máximo absoluto es 50 para $x = 5$. La solución del problema es:

$\boxed{\text{El área máxima es de } 50 \text{ cm}^2 \text{ para una base de } 2x = 10 \text{ cm}}$.

NOMBRE: ____

Instrucciones: **1)** Todos los **folios** deben tener el **nombre** y estar **numerados** en la parte superior. **2)** Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. **3)** No se puede usar **corrector ni lápiz**, y el bolígrafo debe ser de **tinta indeleble**. Se aconseja no usar borrador. **4)** Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar** la respuesta a una pregunta con las de otras. **5)** **Desatender las instrucciones puede penalizarse con hasta 1 punto** o la **anulación** en caso de usar tinta corregible.

1) Calcular $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{\operatorname{sen} x}}{x^2}$ *(1,5 puntos)*

2) Sea f: R → R la función definida por $f(x) = x^2|x - 3|$.
   a) Calcular $f''(x)$. *(1 punto)*
   b) Estudiar la monotonía de f y sus extremos relativos. *(1 punto)*
   c) Estudiar la curvatura y puntos de inflexión. *(0,5 puntos)*
   d) Esbozar la gráfica de f y calcular sus extremos absolutos. *(1 punto)*

3) Calcular $\displaystyle\int \frac{x^3 + x^2}{x^2 + x - 2}\,dx$ *(2,5 puntos)*

4) Determina la función $f : (0, \infty) \to$ R sabiendo que $f''(x) = \ln(x)$ y que su gráfica tiene tangente horizontal en el punto $P(1, 2)$ (ln denota la función logaritmo neperiano). *(2,5 puntos)*

SOLUCIONES

1) Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - e^{\text{sen}\,x}}{x^2}$ *(1,5 puntos)*

Si intentamos sustituir x por 0, obtenemos la indeterminación 0/0. Como numerador y denominador son derivables en todo R, podemos aplicar el Teorema de L'Hôpital y, si llegamos a algún resultado, el límite coincidirá con el mismo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{\text{sen}\,x}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{\text{sen}\,x}\cos x}{2x} = \left(\frac{1-1\cdot 1}{0} = \frac{0}{0},\ \text{num y den deriv : L'Hôp}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{\text{sen}\,x}\cos^2 x + e^{\text{sen}\,x}\text{sen}\,x}{2} = \frac{1-1\cdot 1^2+1\cdot 0}{2} = \boxed{0}$$

2) Sea f: R → R la función definida por $f(x) = x^2|x-3|$.

a) Calcular $f''(x)$. *(1 punto)*

Para derivar una función en la que interviene un valor absoluto, la convertimos en definida a trozos, usando la definición de valor absoluto:

$$f(x) = x^2|x-3| = \begin{cases} x^2[-(x-3)] & \text{si} \quad x-3<0 \\ x^2(x-3) & \text{si} \quad x-3\ge 0\end{cases} = \begin{cases} -x^3+3x^2 & \text{si} \quad x<3 \\ x^3-3x^2 & \text{si} \quad x\ge 3\end{cases}$$

Las polinómicas son funciones continuas en todo R. El valor absoluto de una función continua ($x-3$) es continua. El producto de funciones continuas (x por $|x-3|$) es continuo. Por tanto, f es continua en todo R y podemos abordar el estudio de su derivada. Aplicando las reglas de la tabla de derivadas:

$$\boxed{f'(x) = \begin{cases} -3x^2+6x & \text{si} \quad x<3 \\ 3x^2-6x & \text{si} \quad x>3\end{cases}}$$

Falta ver si $\exists f'(3)$. Como las funciones que definen a f' continúan existiendo y siendo continuas más allá de los respectivos intervalos en los que actúan, se tiene que:

$f'(3^-) = -3\cdot 3^2 + 6\cdot 3 = -27+18 = -9$; $f'(3^+) = 3\cdot 3^2 - 6\cdot 3 = 27-18 = 9$

que nos lleva a que la función no es derivable en 3, por no coincidir sus derivadas laterales. Por tanto, la expresión obtenida anteriormente para f' es la definitiva. Y así:

$$\boxed{f''(x) = \begin{cases} -6x+6 & \text{si} \quad x<3 \\ 6x-6 & \text{si} \quad x>3\end{cases}}$$

que es, también, definitiva, porque al no ser f' continua en 3, puesto que no tiene imagen en dicho punto, no puede ser derivable, por lo que no existe $f''(3)$.

b) Estudiar la monotonía de f y sus extremos relativos. *(1 punto)*

- Discontinuidades de f: No tiene.
- Discontinuidades de f': 3.
- $f'(x) = 0$:
  - Si $x < 3$: $-3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow -3x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0$ ó $x = 2$. Ambas válidas porque son menores que 3.
  - Si $x > 3$; $3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x = 0$ ó $x = 2$. Ninguna válida.

Luego el cuadro de monotonía es:

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, 3)$	3	$(3, +\infty)$
f'	–	0	+	0	–	∄	+
f	↘	Mín	↗	Máx	↘	Mín	↗

- $f(0) = 0 \Rightarrow$ mínimo relativo en (0, 0).

- $f(2) = 4 \Rightarrow$ máximo relativo en (2, 4).
- $f(3) = 0 \Rightarrow$ mínimo relativo en (3, 0). (f' no existe pero f, sí: punto *anguloso*)

c) Estudiar la curvatura y puntos de inflexión. *(0,5 puntos)*

- Discontinuidades de f: No tiene.
- Discontinuidades de f' y f'': 3.
- $f''(x) = 0$:
  - Si $x < 3$: $-6x + 6 = 0 \Rightarrow x = 1$, válida porque es menor que 3.
  - Si $x > 3$; $6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$, no válida.

	$(-\infty, 1)$	1	(1, 3)	3	$(3, +\infty)$
f'	+	0	–	∄	+
f	∪ **(convexa)**	P.I.	∩ **(cóncava)**	P.I.	∪ **(convexa)**

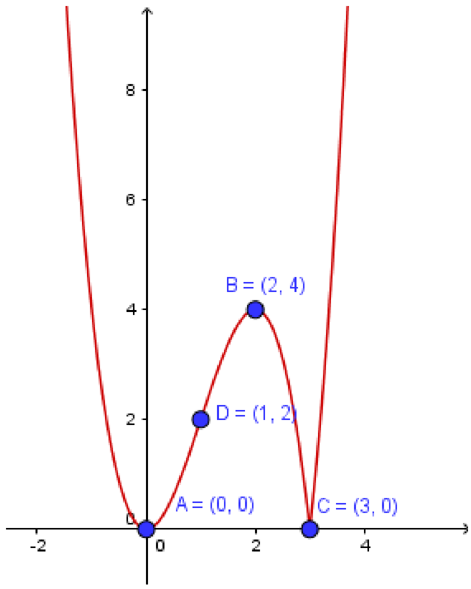
Tiene dos puntos de inflexión:

- $f(1) = 2$: Punto de inflexión en (1, 2).
- $f(3) = 0$: Punto de inflexión en (3, 0).

d) Esbozar la gráfica de f y calcular sus extremos absolutos. *(1 punto)*

$$x^2|x-3| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ó} \\ x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \end{cases}$$

Luego corta a OX en (0, 0) y (3, 0).
Con los datos que tenemos y sabiendo que las funciones polinómicas no tienen asíntotas, basta para trazar la gráfica (junto a estas líneas).
De ella se deduce que no tiene máximos absolutos, puesto que la función no está acotada superiormente.
El mínimo absoluto vale 0 y se alcanza en $x = 0$ y en $x = 3$.



3) Calcular $\int \frac{x^3 + x^2}{x^2 + x - 2} dx$ *(2,5 puntos)*

Como el grado del numerador es mayor o igual que el del denominador, comenzamos por realizar la división de uno entre el otro:

$$\begin{array}{r|l} x^3 + x^2 & x^2 + x - 2 \\ \cline{2-2} -x^3 - x^2 + 2x & x \\ \hline 2x & \end{array}$$

De donde:

$$\frac{x^3 + x^2}{x^2 + x - 2} = \frac{x(x^2 + x - 2) + 2x}{x^2 + x - 2} = x + \frac{2x}{x^2 + x - 2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{x^3 + x^2}{x^2 + x - 2} dx = \int x dx + \int \frac{2x}{x^2 + x - 2} dx = \frac{x^2}{2} + \int \frac{2x}{x^2 + x - 2} dx$$

Para calcular esta segunda integral, descomponemos en suma de fracciones simples. Está garantizado que podremos hacerlo por el *Teorema de Descomposición en Suma de Fracciones Simples*, porque el grado del numerador es estrictamente inferior al del denominador. Teniendo presente que $x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ ó $x = 1$:

$$\frac{2x}{x^2+x-2} = \frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+B(x+2)}{x^2+x-2}$$

Tienen que coincidir los numeradores, puesto que los denominadores lo hacen:

- $x = 1$: $2 = 3B \Rightarrow B = 2/3$
- $x = -2$: $-4 = -3A \Rightarrow A = 4/3$

Entonces:

$$\int \frac{2x}{x^2+x-2}dx = \frac{4}{3}\int\frac{dx}{x+2}+\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x-1} = \frac{4}{3}\ln|x+2|+\frac{2}{3}\ln|x-1|+C$$

Por tanto:

$$\boxed{\int \frac{x^3+x^2}{x^2+x-2}dx = \frac{x^2}{2} + \frac{4}{3}\ln|x+2|+\frac{2}{3}\ln|x-1|+C}$$

4) Determina la función $f : (0, \infty) \to \mathrm{R}$ sabiendo que $f''(x) = \ln(x)$ y que su gráfica tiene tangente horizontal en el punto $P(1, 2)$ (ln denota la función logaritmo neperiano). *(2,5 puntos)*

Realizando integraciones por partes, llegamos a que:

$$f'(x) = \int f''(x)dx = \int \ln(x)dx = \begin{bmatrix} u=\ln(x) & \Rightarrow & du=\dfrac{dx}{x} \\ dv = dx & \Rightarrow & v = x\end{bmatrix} =$$

$$= x\ln(x) - \int dx = x\ln(x) - x + C$$

Como f tiene tangente horizontal en $P(1, 2) \Rightarrow m = f'(1) = 0 \Rightarrow 1\ln(1) - 1 + C = 0 \Rightarrow -1 + C = 0 \Rightarrow C = 1$. Así, $f'(x) = x\ln(x) - x + 1$

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int[x\ln(x)-x+1]dx = \int x\ln(x)dx - \int xdx + \int dx =$$

$$= \begin{bmatrix} u=\ln(x) & \Rightarrow & du=\dfrac{dx}{x} \\ dv = xdx & \Rightarrow & v = \dfrac{x^2}{2}\end{bmatrix} - \frac{x^2}{2}+x = \frac{1}{2}x^2\ln(x)-\frac{1}{2}\int xdx-\frac{x^2}{2}+x =$$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln(x)-\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}-\frac{x^2}{2}+x+k = \frac{1}{2}x^2\ln(x)-\frac{3}{4}x^2+x+k$$

Y como la función debe pasar por $P(1, 2) \Rightarrow f(1) = 2 \Rightarrow \frac{1}{2}0-\frac{3}{4}+1+k=2 \Rightarrow$ $\frac{1}{4}+k=2 \Rightarrow k=\frac{7}{4}$. Por tanto:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2}x^2\ln(x)-\frac{3}{4}x^2+x+\frac{7}{4}}$$

IES Fernando de Herrera **Curso 2016 / 17**

Primer trimestre – Recuperación 1ª ev – 2º Bach CT

NOMBRE: ____

Instrucciones: **1)** Todos los **folios** deben tener el **nombre** y estar **numerados** en la parte superior. **2)** Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. **3)** No se puede usar **corrector ni lápiz**, y el bolígrafo debe ser de **tinta indeleble**. Se aconseja no usar borrador. **4)** Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar** la respuesta a una pregunta con las de otras. **5)** **Desatender las instrucciones puede penalizarse con hasta 1 punto** o la **anulación** en caso de usar tinta corregible.

1) Sean $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ y $g: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ las funciones definidas por:

$$f(x) = x^2 + ax + b \qquad \text{y} \qquad g(x) = ce^{-(x+1)}$$

Se sabe que las gráficas de f y g se cortan en el punto $(-1, 2)$ y tienen en ese punto la misma recta tangente.

a) Calcular los valores de a, b y c *(2 puntos)*

b) Hallar la ecuación de dicha recta tangente. *(0,5 puntos)*

2) De entre todos los rectángulos cuya área mide $16\ \text{cm}^2$, determinar las dimensiones del que tiene diagonal de menor longitud. *(2,5 puntos)*

3) Sea $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ la función definida por $f(x) = x^2e^{-x}$

a) Determinar los extremos relativos de f (puntos donde se obtienen y valores que se alcanzan). *(1,5 puntos)*

b) Estudiar y determinar las asíntotas de la gráfica de f. *(1 punto)*

4) Calcular: $\displaystyle\int \frac{2}{2-e^x}\,dx$ (sugerencia: cambio de variable) *(2,5 puntos)*

SOLUCIONES

1) Sean $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas por:

$$f(x) = x^2 + ax + b \qquad \text{y} \qquad g(x) = ce^{-(x+1)}$$

Se sabe que las gráficas de f y g se cortan en el punto $(-1, 2)$ y tienen en ese punto la misma recta tangente.

a) Calcular los valores de a, b y c *(2 puntos)*

Como ambas pasan por $(-1, 2)$:

- $f(-1) = 2 \Rightarrow 1 - a + b = 2 \Rightarrow \boxed{a - b = -1}$ (1)
- $g(-1) = 2 \Rightarrow ce^0 = 2 \Rightarrow \boxed{c = 2}$.

Por otra parte, tienen la misma tangente. Dicha tangente pasa por $(-1, 2)$. La pendiente es la misma, tanto si se calcula a partir de f como de g. Y el cálculo de la pendiente consiste en derivar la función y sustituir $x = -1$, que es la abscisa del punto de tangencia. Por tanto:

- $f'(x) = 2x + a \Rightarrow f'(-1) = -2 + a$
- $g'(x) = -2e^{-(x+1)}$, pues $c = 2 \Rightarrow g'(-1) = -2e^0 = -2$

Como coinciden (es la misma recta, luego es la misma pendiente): $-2 + a = -2$ $\Rightarrow \boxed{a = 0}$.

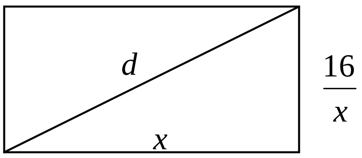
Sustituyendo en (1): $\boxed{b = 1}$.

Así: $\boxed{a = 0,\ b = 1,\ c = 2} \Rightarrow f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = 2e^{-(x+1)}$

b) Hallar la ecuación de dicha recta tangente. *(0,5 puntos)*

- Punto de tangencia: $(-1, 2)$.
- Pendiente de la tangente: $m = -2$ (apartado anterior)
- Ecuación: $y - 2 = -2(x + 1) \Rightarrow y = -2x - 2 + 2 \Rightarrow \boxed{y = -2x}$.

2) De entre todos los rectángulos cuya área mide $16\ \text{cm}^2$, determinar las dimensiones del que tiene diagonal de menor longitud. *(2,5 puntos)*

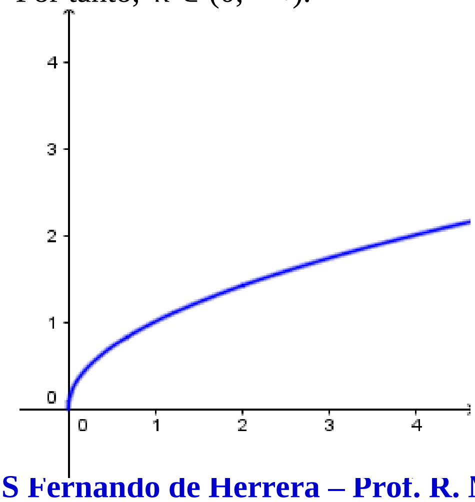


Si llamamos x a la base, como el área de un rectángulo es *base* · *altura*, y el área debe medir 16, la altura tiene que ser $16 / x$.

La diagonal, por Pitágoras, mide:

$$d(x) = \sqrt{x^2 + \left(\frac{16}{x}\right)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{256}{x^2}} = \sqrt{\frac{x^4 + 256}{x^2}}$$

Éste es el valor que debemos minimizar. El valor mínimo que puede tomar x es 0 (consideraremos que sin tocarlo). No hay ninguna restricción para el valor máximo. Por tanto, $x \in (0, +\infty)$.



Además, el radicando es positivo $\forall x$. Y la función $y = \sqrt{x}$, cuya gráfica adjuntamos, es estrictamente creciente. Lo que significa que cuanto mayor es x, mayor es $\sqrt{x}$ y al revés. Por tanto, en lugar de minimizar la función anterior, lo haremos con la misma sin la raíz, que es más cómodo.

De modo que el problema es *hallar el mínimo absoluto de*:

$$f(x) = \frac{x^4+256}{x^2}, \; x \in (0, +\infty).$$

Se tiene: $f'(x) = \dfrac{4x^3x^2 - 2x(x^4+256)}{x^4} = \dfrac{4x^5 - 2x^5 - 512x}{x^4} = \dfrac{2x^4 - 512}{x^3}$

Por tanto, $f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 2x^4 = 512 \;\Leftrightarrow\; x^4 = 256 \;\Leftrightarrow\; x = 4$ (no vale la raíz negativa, pues está fuera del dominio). Así, para calcular el *mínimo absoluto*, estudiamos:

- Extremos del dominio: 0, $+\infty$.
- Discontinuidades de f: 0.
- Discontinuidades de f': 0.
- $f'(x) = 0$: 4

Y comparamos sus imágenes o límites:

- $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^4+256}{x^2} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^4+256}{x^2} = +\infty$
- $f(4) = \dfrac{512}{16} = 32$

Por tanto, no tiene máximo absoluto y la diagonal mínima se obtiene para $x = 4$. Las dimensiones correspondientes son: $\boxed{\textit{base} = 4 \text{ cm}, \textit{altura} = 16/4 = 4 \text{ cm}}$.

3) Sea f: R → R la función definida por $f(x) = x^2e^{-x}$

a) Determinar los extremos relativos de f (puntos donde se obtienen y valores que se alcanzan). *(1,5 puntos)*

$$f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = e^{-x}(-x^2 + 2x)$$

Estudiamos su monotonía.

- Discontinuidades de f: No tiene, por ser el producto de dos funciones elementales cuyo dominio es R.
- Discontinuidades de f': Tampoco tiene, por la misma razón.
- $f'(x) = 0$: $e^{-x}(-x^2 + 2x) = 0 \;\Leftrightarrow\;$ (un producto es 0 si y sólo si alguno de los factores es 0):

$$\begin{cases} e^{-x} = 0, \text{ sin solución (la exponencial no se anula)} \\ -x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(-x+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \end{cases} \end{cases}$$

Dividimos el dominio en intervalos mediante los puntos obtenidos:

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
f'	–	0	+	0	–
f	↘	Mín	↗	Máx	↘

Como $f(0) = 0^2e^0 = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{\text{mínimo relativo en } (0, 0)}$.

Y como $f(2) = 4e^{-2} \;\Rightarrow\; \boxed{\text{máximo relativo en } (2, 4e^{-2})}$.

b) Estudiar y determinar las asíntotas de la gráfica de f. *(1 punto)*

- Verticales: $\boxed{\text{No tiene}}$, pues no hay discontinuidades, según vimos en el apartado anterior.
- Horizontales: Como el comportamiento de la exponencial es diferente cuando x tiende a $-\infty$ y a $+\infty$, hallamos ambos límites:

$\lim_{x\to-\infty} x^2e^{-x} = (+\infty \cdot e^{+\infty}) = (+\infty(+\infty)) = +\infty$ Por este lado, no tiene

$\lim_{x\to+\infty} x^2e^{-x} = (+\infty \cdot e^{-\infty}) = (+\infty \cdot 0) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$

Al ser numerador y denominador derivables en todo R, es aplicable la Regla de L'Hôpital:

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}, \text{L'Hôpital de nuevo}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x} = \left(\frac{2}{\infty}\right) = 0$$

Por tanto, la recta $\boxed{y = 0 \text{ es asíntota horizontal sólo si } x \to +\infty}$.

- Oblicuas: Sólo estudiamos el caso $x \to -\infty$, pues por el otro lado obtendríamos la asíntota horizontal que ya conocemos.

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2e^{-x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} xe^{-x} = (-\infty \cdot e^{+\infty}) = (-\infty(+\infty)) = -\infty$$

lo que significa que $\boxed{\text{no tiene}}$, pero la curva tiende a ponerse vertical (pendiente infinita) cuando $x \to -\infty$.

4) Calcular: $\int \frac{2}{2-e^x}dx$ (sugerencia: cambio de variable) *(2,5 puntos)*

El cambio que parece más sencillo es $t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx = tdx \Rightarrow dx = dt / t$:

$$\int \frac{2}{2-e^x}dx = \int \frac{2}{2-t}\frac{dt}{t} = \int \frac{-2dt}{t(t-2)}$$

Estamos ante una integral racional, con el grado del numerador estrictamente menor que el del denominador, por lo que podemos usar el *Teorema de Descomposición en Suma de Fracciones Simples*:

$$\frac{-2}{t(t-2)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-2} = \frac{A(t-2)+Bt}{t(t-2)} \Leftrightarrow -2 = A(t-2) + Bt$$

- $t = 0$: $-2 = -2A \Leftrightarrow A = 1$
- $t = 2$: $-2 = 2B \Leftrightarrow B = -1$

Por tanto:

$$\int \frac{-2dt}{t(t-2)} = \int \frac{dt}{t} + \int \frac{-1}{t-2}dt = \ln|t| - \ln|t-2| + C = \ln|e^x| - \ln|e^x - 2| + C =$$

$$= \ln(e^x) - \ln|e^x - 2| + C = \boxed{x - \ln|e^x - 2| + C}$$