PROBLEMAS RESUELTOS DE CÁLCULO DE LÍMITES Y L'HÔPITAL

1) **Calcular:**

a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \text{sen } x \text{ tg } x = \pm\infty$ puesto que al tender tg x a $\pm\infty$ (según que x tienda a $\pi/2$ por la derecha o por la izquierda) mientras que sen x tiende a 1, el producto tiende a infinito.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2^x}{4x^3-2} = +\infty$, porque la exponencial de base mayor que 1 crece mucho más rápidamente que cualquier polinómica, por lo que el numerador produce un infinito de orden superior al del denominador. El signo es + porque el numerador es positivo (las exponenciales siempre dan resultados estrictamente positivos) y el denominador, cuando x tiende a $+\infty$, también. Este límite puede resolverse por L'Hôpital, y para exámenes de acceso a la Universidad debería hacerse por este último método:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2^s}{4x^3-2} = \left(\frac{\infty}{\infty}, \text{num y den derivables : L' Hôpital}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2^s \ln 2}{12x^2} =$$

$$= \left(\frac{\infty}{\infty} L'Hôp\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2^s \ln^2 2}{24x} = \left(\frac{\infty}{\infty} L'Hôp\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2^s \ln^3 2}{24} = +\infty$$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2-3}{x-1} - \dfrac{x^2+3}{x+1} \right) =$ (en principio, produce la indeterminación $\infty-\infty$) $=$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{(x^2-3)(x+1)}{(x-1)(x+1)} - \frac{(x^2+3)(x-1)}{(x+1)(x-1)} \right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{(x^3+x^2-3x-3)-(x^3-x^2+3x-3)}{(x-1)(x+1)} \right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3+x^2-3x-3-x^3+x^2-3x+3}{x^2-1} \right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^2-6x}{x^2-1} \right) = \frac{2}{1} = 2$$

d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x^3-5x^2-4x+4}{x^2-4x+4}$ Produce la indeterminación 0/0. Descomponemos por Ruffini, probando en x=2:

	3	–5	–4	4
2		6	2	–4
	3	1	–2	0

	1	–4	4
2		2	–4
	1	–2	0

Por tanto, $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x^3-5x^2-4x+4}{x^2-4x+4} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(3x^2+x-2)}{(x-2)(x-2)} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x^2+x-2}{x-2} = =$

$\dfrac{12+2-2}{2-2} = \infty$ sin signo; calculando los límites laterales se vería cuando es $+\infty$ y cuando $-\infty$.

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt[3]{8x^3-5x}}{4x-2} =$ (en el ∞, equivale a quedarse sólo con los sumandos de máxima potencia) $= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt[3]{8x^3}}{4x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt[3]{8}\sqrt[3]{x^3}}{4x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{4x} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

2) Calcular:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+3)e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+3}{e^{x}} = 0,$ puesto que tanto el numerador como el denominador tienden a $+\infty$, pero la exponencial produce un infinito de orden superior al de cualquier polinómica o potencia. También podría haberse resuelto fácilmente por L'Hôpital, y así debería hacerse en Selectividad.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+3)e^{-x} = -\infty\cdot e^{+\infty} = -\infty\cdot(+\infty) = -\infty.$ Aquí no podría aplicarse L'Hôpital, puesto que ni siquiera se produce indeterminación.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+3)e^{-x}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+3}{x}\dfrac{1}{e^{x}} = 1\cdot\dfrac{1}{+\infty} = 1\cdot 0 = 0$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x+3)e^{-x}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+3}{x}e^{-x} = 1\cdot(+\infty) = +\infty$

3) Calcular:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+3)e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+3}{e^{x}} = 0,$ puesto que tanto el numerador como el denominador tienden a $+\infty$, pero la exponencial produce un infinito de orden superior al de cualquier polinómica o potencia. También podría haberse resuelto fácilmente por L'Hôpital, que es como se debería abordar en Selectividad.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+3)e^{-x} = -\infty\cdot e^{+\infty} = -\infty\cdot(+\infty) = -\infty.$ Aquí no podría aplicarse L'Hôpital, puesto que ni siquiera se produce indeterminación.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+3)e^{-x}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+3}{x}\dfrac{1}{e^{x}} = 1\cdot\dfrac{1}{+\infty} = 1\cdot 0 = 0$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x+3)e^{-x}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+3}{x}e^{-x} = 1\cdot(+\infty) = +\infty$

4) Calcular: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{\operatorname{sen} x}}{x^{2}}$

Como obtenemos la indeterminación 0/0 y tenemos el cociente de dos funciones derivables en todo R, podemos aplicar L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{\operatorname{sen} x}\cos x}{2x} = \left(\frac{0}{0};\ \text{L' Hôpital}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{\operatorname{sen} x}\cos^{2} x + e^{\operatorname{sen} x}\operatorname{sen} x}{2} =$$

$$= \frac{1-1+0}{2} = 0$$

Por tanto, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{\operatorname{sen} x}}{x^{2}} = 0}$.

5) Calcular: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-\operatorname{sen} x}{x\cdot\operatorname{sen} x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\operatorname{sen} x}{x\cdot\operatorname{sen} x} = \left(\frac{0-0}{0\cdot 0} = \frac{0}{0}\ \text{L' Hôpital}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-\cos x}{\operatorname{sen} x + x\cos x} =$$

$$= \left(\frac{1-1}{0+0\cdot 1} = \frac{0}{0} \text{ L' Hôpital} \right) = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{(1+x)^2} + \operatorname{sen} x}{\cos x + \cos x - x \operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{(1+x)^2} + \operatorname{sen} x}{2\cos x - x \operatorname{sen} x} =$$

$$= \frac{-1+0}{2\cdot 1 - 0} = -\frac{1}{2}$$

Se ha podido aplicar L'Hôpital porque teníamos la indeterminación 0/0 y funciones derivables en un entorno de 0 en numerador denominador.

6) Calcular $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x}$

$\tan x$ representa la tangente trigonométrica de x. Al sustituir en el límite, obtenemos la indeterminación 0/0. Como las dos funciones son derivables en un entorno de 0 (con lo que podremos encontrar un intervalo cerrado y simétrico respecto de 0 donde son continuas, y derivables en el mismo pero abierto), podemos aplicar L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+\tan^2 x - \cos x}{1-\cos x}$$

Que nos vuelve a dar la misma indeterminación. Como seguimos estando en condiciones de aplicar L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2(\tan x)(1+\tan^2 x) + \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x}$$

Y otra vez:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2(1+\tan^2 x)^2 + 2(\tan x)2(\tan x)(1+\tan^2 x) + \cos x}{\cos x} = \frac{2+0+1}{1} = 3$$

Así, todos los límites anteriores valen 3, incluido el original:

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x} = 3}$$

7) Sabiendo que $\lim_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{a}{\ln x} \right)$ es finito, calcular a y el valor del límite (ln denota el logaritmo neperiano). *(2,5 puntos)*

Si $a > 0$:

$$\lim_{x\to 1^-} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{a}{\ln x} \right) = (-\infty + \infty) \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 1^+} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{a}{\ln x} \right) = (+\infty - \infty)$$

Y si $a < 0$:

$$\lim_{x\to 1^-} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{a}{\ln x} \right) = (-\infty - \infty) = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 1^+} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{a}{\ln x} \right) = (+\infty + \infty) = +\infty$$

En este caso ($a < 0$), se tiene, pues: $\lim_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{a}{\ln x} \right) = \infty$. Como el límite es finito, partimos de que $\underline{a > 0}$, que es el único caso en el que esto *podría* ser cierto.
Estudiemos el límite en este caso:

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{a}{\ln x} \right) = \lim_{x\to 1} \frac{x\ln x - a(x-1)}{(x-1)\ln x} = \left(\frac{0}{0} \right)$$

Como tanto el numerador como el denominador son derivables en algún entorno de $x = 1$, podemos aplicar la Regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x + x\frac{1}{x} - a}{\ln x + \frac{x-1}{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x + 1 - a}{\ln x + 1 - \frac{1}{x}} = \left(\frac{1-a}{0}\right)$$

La única posibilidad de que el límite sea finito es que $1 - a = 0 \iff \boxed{a = 1}$. En ese caso, seguimos adelante y podemos volver a aplicar L'Hôpital, porque numerador y denominador son derivables en algún entorno de 1:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+1} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Por tanto, $\boxed{a = 1 \text{ y } \lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1} - \frac{a}{\ln x}\right) = \frac{1}{2}}$.

8) Calcular $\lim_{x\to 0} \frac{(e^x - 1)\operatorname{sen} x}{x^3 - x^2}$ *(1,5 puntos)*

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^x - 1)\operatorname{sen} x}{x^3 - x^2} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

Como las funciones del numerador y denominador son derivables en R, puede aplicarse L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x \operatorname{sen} x + (e^x - 1)\cos x}{3x^2 - 2x} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

Aplicamos, de nuevo, L'Hôpital, porque nuevamente se cumplen sus hipótesis, al ser numerador y denominador derivables en R:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x + e^x \cos x - (e^x - 1)\operatorname{sen} x}{6x - 2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x \operatorname{sen} x + 2e^x \cos x - e^x \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x}{6x - 2} = \lim_{x\to 0} \frac{2e^x \cos x + \operatorname{sen} x}{6x - 2} = \frac{2}{-2} = -1$$

Por tanto, los dos límites anteriores existen y valen lo mismo:

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{(e^x - 1)\operatorname{sen} x}{x^3 - x^2} = -1}$$