NOMBRE: ____

Instrucciones: **1)** Todos los **folios** deben tener el **nombre** y estar **numerados** en la parte superior. **2)** Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. **3)** No se puede usar **corrector ni lápiz**. Se aconseja no usar borrador. **4)** Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar** la respuesta a una pregunta con las de otras.

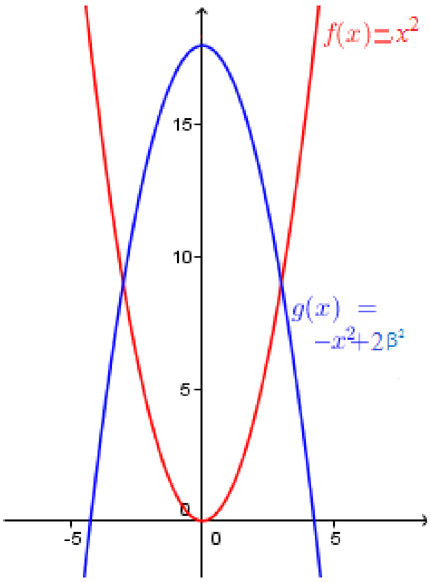
1) Calcular $\beta > 0$ para que el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por: $f(x) = x^2$ y $g(x) = -x^2 + 2\beta^2$ sea 72 (unidades de área). *(2,5 puntos)*
2) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = xe^{-x}$. Esbozar el recinto limitado por la curva $y = f(x)$, los ejes coordenados y la recta $x = -1$. Calcular su área. *(1,5+1,5 ptos)*
3) Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas mediante: $f(x) = |x(x-2)|$ y $g(x) = x + 4$.
   a) Esbozar las gráficas de f y g sobre los mismos ejes. Calcular los puntos de corte entre ambas gráficas. *(1 punto)*
   b) Calcular el área del recinto limitado por las gráficas de f y g. *(1,5 puntos)*
4) Dado el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 4x + 3y + 2z = 4 \\ -3x + 2y + 5z = 8 \\ -5x + 9y + 17z = 28 \end{array}\right\}$$

   a) Escribirlo en forma matricial (igualdad entre dos matrices, una de ellas resultante de un producto de matrices). *(0,5 puntos)*
   b) Clasificarlo y resolverlo por Gauss (forma matricial), y si tuviera más de una solución, dar dos soluciones concretas. *(1,5 puntos)*

SOLUCIONES

1) Calcular $\beta > 0$ para que el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por: $f(x) = x^2$ y $g(x) = -x^2 + 2\beta^2$ sea 72 (unidades de área). *(2,5 puntos)*



La gráfica de f es la parábola convexa estándar. La de g es su simétrica invertida (cóncava) desplazadas $2\beta^2$ unidades hacia arriba, dado que dicho valor es positivo estrictamente. Por tanto, g queda por encima de f.

Los puntos de corte de ambas funciones son:

$$\left.\begin{array}{r} y = x^2 \\ y = -x^2 + 2\beta^2 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 = -x^2 + 2\beta^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2 = 2\beta^2 \Rightarrow x^2 = \beta^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\beta^2} = \pm\beta$$

Para calcular el recinto, sólo nos interesan las abscisas de los puntos de corte, que ya tenemos. Por tanto, el área entre ambas será:

$$A = \int_{-\beta}^{\beta} (-x^2 + 2\beta^2 - x^2)dx =$$

$$= \int_{-\beta}^{\beta} (-2x^2 + 2\beta^2)dx = \left[-2\frac{x^3}{3} + 2\beta^2 x\right]_{-\beta}^{\beta} =$$

$$= -2\frac{\beta^3}{3} + 2\beta^3 - \left(2\frac{\beta^3}{3} - 2\beta^3\right) = -4\frac{\beta^3}{3} + 4\beta^3 = \left(-\frac{4}{3} + 4\right)\beta^3 = \frac{8}{3}\beta^3 = 72$$

Hemos igualado al resultado conocido del área. Despejando:

$$\beta^3 = \frac{72 \cdot 3}{8} = 27 \Rightarrow \boxed{\beta = 3}.$$

2) Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = xe^{-x}$. Esbozar el recinto limitado por la curva $y = f(x)$, los ejes coordenados y la recta $x = -1$. Calcular su área. *(1,5+1,5 ptos)*

Sabemos que f es continua.

Los cortes con los ejes son:

- $x = 0 \Rightarrow y = 0$: $\boxed{(0, 0)}$.
- $y = 0 \Rightarrow xe^{-x} = 0 \Rightarrow x = 0$, puesto que la exponencial no se anula nunca: $\boxed{(0, 0)}$.

Asíntotas:

- No tiene verticales (es continua)
- Horizontales: $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-x} = (-\infty \cdot e^{+\infty}) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = (+\infty \cdot e^{-\infty}) = (+\infty \cdot 0) =$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$ (L'Hôpital, son ambas derivables en R) $= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = \left(\frac{1}{\infty}\right)$ $= 0$

  Luego tiene como asíntota la recta $\boxed{y = 0}$ cuando $x \to +\infty$, y se va al $-\infty$ cuando $x \to -\infty$.
- Oblicua: $m = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{xe^{-x}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = (e^{+\infty}) = +\infty$. No tiene.

Monotonía:

$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1 - x)$

- Discontinuidades de f ó $f\,'$: No hay.
- $f\,'(x) = 0 \;\Rightarrow\; x = 1$

	$(-\infty, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f\,'$	+	0	–
f	↗	Mx	↘

$\boxed{\text{Máximo relativo en } (1, 1/e)}$.

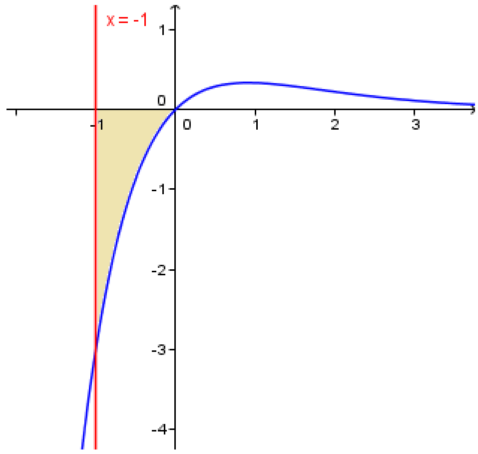
Curvatura;

$f\,''(x) = -e^{-x}(1-x) - e^{-x} = e^{-x}(-2+x)$

- Discontinuidades de f, $f\,'$ ó $f\,'$: No hay.
- $f\,''(x) = 0 \;\Rightarrow\; x = 2$

	$(-\infty, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f\,''$	–	0	+
f	∩ **cóncava**	PI	∪ **convexa**

$\boxed{\text{Punto de inflexión en } (2, 2e^{-2})}$.



Gráfica:

Hemos trazado ya la recta vertical $x = -1$ y sombreado el área que nos piden.

Dicha área, al estar bajo OX, es la integral definida cambiada de signo, que hacemos por partes:

$$A = -\int_{-1}^{0} xe^{-x}dx = \begin{bmatrix} u = x & du = dx \\ dv = e^{-x}dx & v = -e^{-x} \end{bmatrix} =$$

$$= -\left[-xe^{-x}\right]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} e^{-x}dx =$$

$$= -(0 - (-(-1)e)) + \left[e^{-x}\right]_{-1}^{0} = e + 1 - e = \boxed{1\ u^2}$$

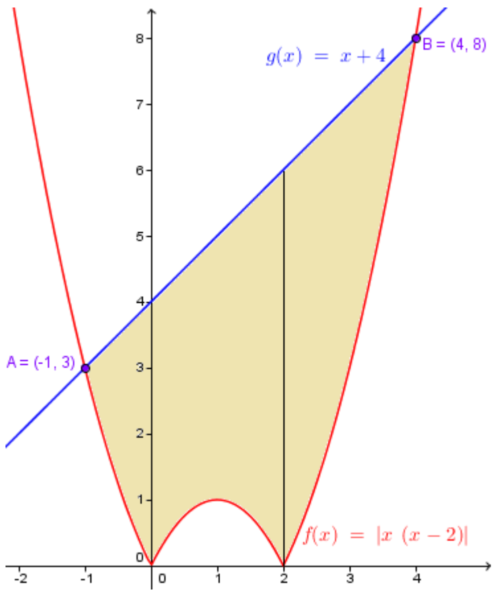
3) Sean $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ y $g : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ las funciones definidas mediante: $f(x) = |x(x-2)|$ y $g(x) = x + 4$.

a) Esbozar las gráficas de f y g sobre los mismos ejes. Calcular los puntos de corte entre ambas gráficas. *(1 punto)*

La función f es el valor absoluto de una parábola *convexa* (el coeficiente de x^2 es positivo) que corta a OX en 0 y en 2, y con vértice en $(1, -1)$. Por tanto, su gráfica es la de dicha parábola haciendo la simetría respecto OX de la parte que queda bajo dicho eje, que es la del intervalo (0, 2).

La función g es una recta. Para representarla usamos una pequeña tabla de valores.

El resultado se muestra junto a estas líneas.



Según lo visto, podemos expresar:

$$f(x) = \begin{cases} x(x-2) & si \quad x \le 0 \text{ ó } x \ge 2 \\ -x(x-2) & si \quad 0 < x < 2 \end{cases}$$

Las intersecciones las obtendremos

analíticamente resolviendo el sistema que, en realidad, son dos sistemas:

- $\left.\begin{array}{r} y = x(x-2) \\ y = x+4 \end{array}\right\} \Rightarrow x(x-2) = x+4 \Rightarrow x^2 - 2x - x - 4 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$

  De donde: $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \dfrac{3 \pm 5}{2} = \left\langle \begin{array}{l} = -1 \Rightarrow (-1, 3) \\ = 4 \Rightarrow (4, 8) \end{array}\right.$

  Ambas válidas, pues $x = -1$ y $x = 4$ se encuentran en las zonas en las que f coincide con $y = x(x-2)$.

- $\left.\begin{array}{r} y = -x(x-2) \\ y = x+4 \end{array}\right\} \Rightarrow -x(x-2) = x+4 \Rightarrow -x^2 + 2x - x - 4 = 0 \Rightarrow$

  $\Rightarrow -x^2 + x - 4 = 0 \Rightarrow x^2 - x + 4 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-16}}{2}$ sin solución.

b) Calcular el área del recinto limitado por las gráficas de f y g. *(1,5 puntos)*
Una de las formas de calcular el área es dividiéndola en 3 partes, como en el gráfico:

$$A = \int_{-1}^{0} (x+4-x(x-2))dx + \int_{0}^{2} [x+4-(-x(x-2)]dx + \int_{2}^{4} (x+4-x(x-2))dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} (x+4-x^2+2x)dx + \int_{0}^{2} (x+4+x^2-2x)dx + \int_{2}^{4} (x+4-x^2+2x)dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} (-x^2+3x+4)dx + \int_{0}^{2} (x^2-x+4)dx + \int_{2}^{4} (-x^2+3x+4)dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3}+3\frac{x^2}{2}+4x\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+4x\right]_{0}^{2} + \left[-\frac{x^3}{3}+3\frac{x^2}{2}+4x\right]_{2}^{4} =$$

$$= 0-\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{2}-4\right)+\left(\frac{8}{3}-\frac{4}{2}+8\right)-0+\left(-\frac{64}{3}+3\frac{16}{2}+16\right)-\left(-\frac{8}{3}+3\frac{4}{2}+8\right)=$$

$$= \boxed{\frac{109}{6}\ u^2}$$

4) Dado el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 4x+3y+2z=4 \\ -3x+2y+5z=8 \\ -5x+9y+17z=28 \end{array}\right\}$$

a) Escribirlo en forma matricial (igualdad entre dos matrices, una de ellas resultante de un producto de matrices). *(0,5 puntos)*

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ -3 & 2 & 5 \\ -5 & 9 & 17 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 28 \end{pmatrix}$$

b) Clasificarlo y resolverlo por Gauss (forma matricial), y si tuviera más de una solución, dar dos soluciones concretas. *(1,5 puntos)*

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 4 \\ -3 & 2 & 5 & 8 \\ -5 & 9 & 17 & 28 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-3F_1]{3F_2-2F_1} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 4 \\ -17 & 0 & 11 & 16 \\ -17 & 0 & 11 & 16 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-F_2} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 4 \\ -17 & 0 & 11 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Estando triangularizado y con la tercera fila completa de ceros, con lo que puede eliminarse, nos quedan dos ecuaciones con tres incógnitas. Estamos, pues, ante un $\boxed{\text{sistema compatible indeterminado}}$.

Lo reconstruimos y resolvemos:

$$\left.\begin{array}{l} 4x+3y+2z=4 \\ -17x \quad +11z=16 \end{array}\right\}$$

Llamamos $z = t$ (parámetro libremente escogido por nosotros) y lo pasamos al segundo miembro. Podríamos haber llamado $x = t$, pero no deberíamos hacerlo con la y, porque habría que volver a triangularizar.

$$\left.\begin{array}{l} 4x+3y=4-2t \\ -17x \quad =16-11t \end{array}\right\} \Rightarrow \text{(2ª ec.) } x=\frac{11t-16}{17}$$

Puntualizar que no debemos dejar un signo – en el denominador de una expresión simplificada. Sustituyendo en la 1ª ec:

$$4\frac{11t-16}{17}+3y=4-2t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3y=4-2t-\frac{44t-64}{17}=\frac{68-34t-44t+64}{17}=\frac{132-78t}{17} \Rightarrow y=\frac{44-26t}{17}$$

Luego el esquema general de las infinitas soluciones del sistema es:

$$\boxed{\left(\frac{11t-16}{17}, \frac{44-26t}{17}, t\right)}$$

Dando valores a t obtenemos algunas de ellas:

- $t = 0$: $\boxed{(-16/17, 44/17, 0)}$
- $t = 3$: $\boxed{(1, -2, 3)}$

IES Fernando de Herrera **Curso 2014 / 15**

Segundo trimestre - Examen Global – 2º Bach CT

NOMBRE: ____

1ª EVALUACIÓN: □ APROBADA □ SUSPENDIDA (Marcar lo correcto)

Instrucciones: **1)** Todos las **hojas** deben tener el **nombre** y estar **numeradas** en la parte superior. **2)** Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. **3)** No se puede usar **corrector ni lápiz**. Se aconseja no usar borrador. **4)** Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar** la respuesta a una pregunta con las de otras.

1) Sea $g: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ la función definida por $g(x) = |\ln(x)|$.
   a) Esbozar el recinto limitado por la gráfica de g y la recta $y = 1$. Calcular los puntos de corte entre ellas. *(1 punto)*
   b) Calcular el área del recinto anterior. *(1,5 puntos)*

2) Calcular $\int_2^4 \frac{x^2}{x^2-6x+5}dx$ *(2,5 puntos)*

3) Considerar la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x + 3)e^{-x}$.
   a) Esbozar la gráfica de f, calculando cortes con los ejes, asíntotas, monotonía, extremos relativos, curvatura y puntos de inflexión. *(1,5 puntos)*
   b) Calcular el área entre el eje de ordenadas, la curva y su corte con el eje de abscisas. *(1 punto)*

4) a) Clasificar y resolver el sistema siguiente, por Gauss (forma matricial). Si es posible, encontrar una solución en la que $z = 3$: *(1,5 puntos)*

$$\left.\begin{aligned} 4x+3y+2z&=4 \\ -3x+5y+5z&=2 \\ 7x-2y-3z&=2 \end{aligned}\right\}$$

   b) Sabiendo que el determinante de una matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ p & q & r \end{pmatrix}$ es 4, calcular los siguientes determinantes indicando, en cada caso, las propiedades utilizadas:

   b1) $\det(2A)$ b2) $\begin{vmatrix} a & -b & c \\ 2d & -2e & 2f \\ p & -q & r \end{vmatrix}$ *(1 punto)*

5) *(Sólo para quienes tienen suspendida la 1ª evaluación. Sustituir uno de los problemas anteriores por éste)* Sea f la función definida por $f(x) = \frac{1}{2x} + \ln x$ para $x > 0$.
   a) Determinar el punto de la gráfica de f en el que la pendiente de la recta tangente es máxima. *(2 puntos)*
   b) Hallar la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$. *(0,5 puntos)*

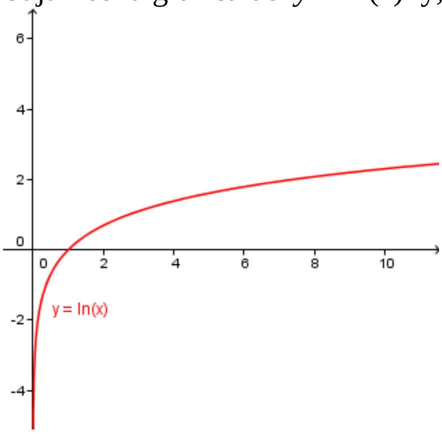
SOLUCIONES

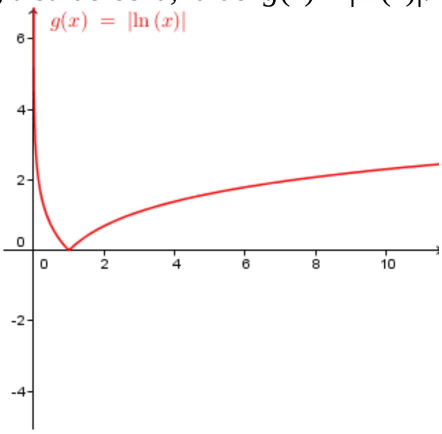
1) Sea g: $(0, +\infty) \to \mathbb{R}$ la función definida por $g(x) = |\ln(x)|$.

a) Esbozar el recinto limitado por la gráfica de g y la recta $y = 1$. Calcular los puntos de corte entre ellas. *(1 punto)*

La gráfica de $y = \ln(x)$ es conocida, pues es una de las funciones que se manejan habitualmente. La gráfica del valor absoluto de una función se diferencia de la de la función misma en que las zonas que quedan bajo el eje de abscisas se cambian por sus simétricas respecto al mismo, pasando a estar sobre el eje de abscisas.

Así, dibujamos la gráfica de $y = \ln(x)$ y, a su derecha, la de $g(x) = |\ln(x)|$:





Nos piden, además, los cortes con $y = 1$ y señalar el recinto limitado entre esta recta y $g(x)$. La recta $y = 1$ es horizontal, sin más dificultad. Y para hallar los cortes con g, escribimos ésta como definida a trozos.

Dado que $\ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$, la simetría respecto a OX la hemos aplicado en el tramo correspondiente al intervalo (0, 1). Y, por tanto:

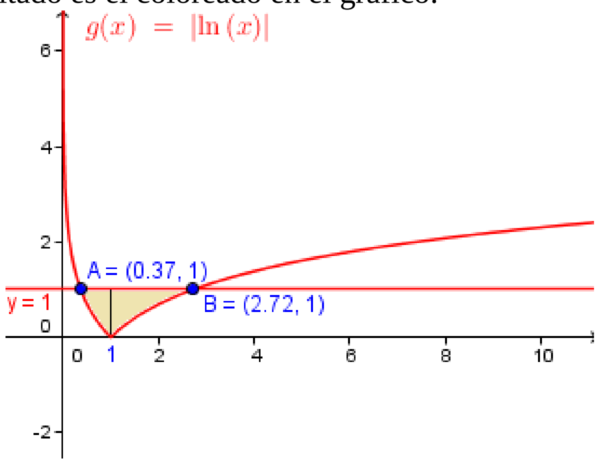
$$g(x) = |\ln(x)| = \begin{cases} -\ln(x) & si \quad x < 1 \\ \ln(x) & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

La resolución del sistema formado por $y = g(x)$ e $y = 1$ es, pues:

- Si $x < 1$: $-\ln(x) = 1 \Leftrightarrow \ln(x) = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1}$.
- Si $x \geq 1$: $\ln(x) = 1 \Leftrightarrow \ln(x) = 1 \Leftrightarrow x = e$

Luego los cortes son: $\boxed{(e^{-1}, 1) \text{ y } (e, 1)}$.

Y el recinto solicitado es el coloreado en el gráfico.



b) Calcular el área del recinto anterior. *(1,5 puntos)*

Hay que hacer dos integrales, porque la definición de g es diferente en el intervalo $[e^{-1}, 1]$ y en $[1, e]$:

$$A_1 = \int_{1/e}^{1} [1-(-\ln(x))]dx = \int_{1/e}^{1} dx + \int_{1/e}^{1} \ln(x)dx = [x]_{1/e}^{1} + \left[\begin{array}{lcl} u=\ln(x) & \Rightarrow & du=\dfrac{dx}{x} \\ dv=dx & \Rightarrow & v=x \end{array}\right] =$$

$$= [x]_{1/e}^{1} + [x\ln(x)]_{1/e}^{1} - \int_{1/e}^{1} dx = [x]_{1/e}^{1} - \frac{1}{e}\ln\left(\frac{1}{e}\right) - [x]_{1/e}^{1} =$$

$$= -\frac{1}{e}(0-1) = \frac{1}{e}$$

$$A_2 = \int_{1}^{e} [1-\ln(x)]dx = [x - x\ln(x) + x]_1^e = [2x - x\ln(x)]_1^e = 2e - e - 2 = e - 2$$

Luego $A = A_1 + A_2 = \boxed{e + \frac{1}{e} - 2 \ u^2}$

2) Calcular $\int_2^4 \frac{x^2}{x^2-6x+5}dx$ *(2,5 puntos)*

Como el grado del numerador de esta integral racional es mayor o igual que el del denominador, habría que comenzar realizando la división de un polinomio entre otro. Pero cuando el grado es igual, como en este caso, podemos intentar evitarla:

$$I = \int_2^4 \frac{x^2}{x^2-6x+5}dx = \int_2^4 \frac{x^2-6x+5+6x-5}{x^2-6x+5}dx =$$

$$= \int_2^4 \frac{x^2-6x+5}{x^2-6x+5}dx + \int_2^4 \frac{6x-5}{x^2-6x+5}dx = \int_2^4 dx + I_1 = [x]_2^4 + I_1 = (4-2) + I_1 = 2 + I_1$$

Descomponemos en suma de fracciones simples el integrando de I_1. Para ello, comenzamos por averiguar las raíces del denominador:

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36-20}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} = \left\langle \begin{array}{l} =1 \\ =5 \end{array}\right. \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 1(x-1)(x-5)$$

Por tanto:

$$\frac{6x-5}{x^2-6x+5} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-5} = \frac{A(x-5)+B(x-1)}{(x-1)(x-5)}$$

Lo que será cierto si los numeradores coinciden:

$$6x - 5 = A(x-5) + B(x-1)$$

Y para averiguar qué valores de A y B verifican la igualdad, damos valores convenientes a x:

- $x = 1$: $1 = -4A + 0 \Rightarrow A = -1/4$
- $x = 5$: $25 = 0 + 4B \Rightarrow B = 25/4$

De esta manera:

$$I_1 = -\frac{1}{4}\int_2^4 \frac{1}{x-1}dx + \frac{25}{4}\int_2^4 \frac{1}{x-5}dx = -\frac{1}{4}[\ln|x-1|]_2^4 + \frac{25}{4}[\ln|x-5|]_2^4 =$$

$$= -\frac{1}{4}(\ln 3 - \ln 1) + \frac{25}{4}(\ln 1 - \ln 3) = -\frac{1}{4}\ln 3 - \frac{25}{4}\ln 3 = -\frac{13}{2}\ln 3$$

Sustituyendo arriba, tenemos, finalmente:

$$\boxed{I = 2 - \frac{13}{2}\ln 3}$$

3) Considerar la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x+3)e^{-x}$.

a) Esbozar la gráfica de f, calculando cortes con los ejes, asíntotas, monotonía, extremos relativos, curvatura y puntos de inflexión. *(1,5 puntos)*

- Cortes con ejes: $x = 0 \Rightarrow y = 3$: $\boxed{(0, 3)}$.
  $y = 0 \Rightarrow (x+3)e^{-x} = 0 \Rightarrow e^{-x} = 0$ (imposible: la exponencial no se anula nunca) ó $x = -3$: $\boxed{(-3, 0)}$.
- Asíntotas:
  - AV: No tiene, por ser continua en todo R.
  - AH: $\lim_{x\to-\infty}(x+3)e^{-x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x+3}{e^x} = \left(\frac{-\infty}{0}\right) = -\infty$. No tiene si $x \to -\infty$

    $\lim_{x\to+\infty}(x+3)e^{-x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+3}{e^x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) =$ (L'Hôpital, ambas derivables) $=$

    $= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x} = \left(\frac{1}{+\infty}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{y = 0}$ es AH si $x \to +\infty$
  - AO: $m = \lim_{x\to-\infty}\frac{x+3}{xe^x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x+3}{x}}{e^x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{3}{x}}{e^x} = \left(\frac{1+0}{0}\right) = \left(\frac{1}{0}\right) = \infty$.

    No tiene.
- Monotonía
  $f'(x) = e^{-x} - (x+3)e^{-x} = e^{-x}(1 - x - 3) = e^{-x}(-x-2)$
  - Discontinuidades de f ó de f': No hay
  - $f'(x) = 0$: $x = -2$ (la exponencial siempre es estrictamente positiva, no se anula nunca).

	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, +\infty)$
f'	+	0	–
f	↗	Máx	↘

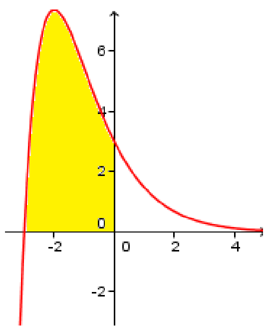
Tiene un máximo relativo en $(-2, e^2)$, es creciente en $(-\infty, -2)$ y decreciente en $(-2, +\infty)$.

- Curvatura
  $f''(x) = -e^{-x} - (-x-2)e^{-x} = e^{-x}(-1 + x + 2) = e^{-x}(x+1)$
  - Discontinuidades de f, f' ó f'': No hay
  - $f''(x) = 0$: $x = -1$ (la exponencial siempre es estrictamente positiva, no se anula nunca).

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, +\infty)$
f'	–	0	+
f	∩	Máx	∪

Es cóncava en $(-\infty, -1)$, convexa en $(-1, +\infty)$ y tiene un punto de inflexión en $(1, 2e)$.

- Gráfica. Se ha señalado el recinto cuya gráfica se pide en el siguiente apartado:



b) Calcular el área entre el eje de ordenadas, la curva y su corte con el eje de abscisas. *(1 punto)*

$$A = \int_{-3}^{0}(x+3)e^{-x}dx = \begin{bmatrix} u = x+3 & \Rightarrow & du = dx \\ dv = e^{-x}dx & \Rightarrow & v = -e^{-x} \end{bmatrix} = \left[-(x+3)e^{-x}\right]_{-3}^{0} + \int_{-3}^{0} e^{-x}dx =$$

$$= \left[-(x+3)e^{-x}\right]_{-3}^{0} - \left[e^{-x}\right]_{-3}^{0} = \left[-(x+4)e^{-x}\right]_{-3}^{0} = -4+e^{3} = \boxed{e^{3}-4\ \ u^{2}}$$

4) a) Clasificar y resolver el sistema siguiente, por Gauss (forma matricial). Si es posible, encontrar una solución en la que $z = 3$: *(1,5 puntos)*

$$\left.\begin{array}{r} 4x+3y+2z=4 \\ -3x+5y+5z=2 \\ 7x-2y-3z=2 \end{array}\right\}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 4 \\ -3 & 5 & 5 & 2 \\ 7 & -2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[4F_3-7F_1]{4F_2+3F_1} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 29 & 26 & 20 \\ 0 & -29 & -26 & -20 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3+F_2}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 29 & 26 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es un $\boxed{\text{sistema compatible indeterminado}}$, en el que puede eliminarse la fila 3. Reconstruimos el sistema y resolvemos. Para ello, llamamos $z = t$ (podríamos también haber elegido $y = t$, pero nos conviene dejar las soluciones en función de z porque nos piden una con un valor determinado de z):

$$\left.\begin{array}{r} 4x+3y=4-2t \\ 29y=20-26t \end{array}\right\}$$

<u>2ª ec</u>: $y = \dfrac{20-26t}{29}$

<u>1ª ec</u>: $4x + 3\dfrac{20-26t}{29} = 4-2t \Rightarrow 4x = 4-2t-\dfrac{60-78t}{29} =$

$= \dfrac{116-58t-60+78t}{29} = \dfrac{56+20t}{29} \Rightarrow x = \dfrac{14+5t}{29}$

Solución general: $\boxed{\left(\dfrac{14+5t}{29}, \dfrac{20-26t}{29}, t\right)}$

Y si $t = 3$: $\boxed{(1, -2, 3)}$

b) Sabiendo que el determinante de una matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ p & q & r \end{pmatrix}$ es 4, calcular los siguientes determinantes indicando, en cada caso, las propiedades utilizadas:

b1) $\det(2A)$ b2) $\begin{vmatrix} a & -b & c \\ 2d & -2e & 2f \\ p & -q & r \end{vmatrix}$ *(1 punto)* b1) $2A = \begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2d & 2e & 2f \\ 2p & 2q & 2r \end{pmatrix} \Rightarrow \det(2A) = \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2d & 2e & 2f \\ 2p & 2q & 2r \end{vmatrix}$ = (sacando factor común 2 de cada fila) = $2\cdot2\cdot2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ p & q & r \end{vmatrix} = 8\,|A| = \boxed{32}$

b2) $\begin{vmatrix} a & -b & c \\ 2d & -2e & 2f \\ p & -q & r \end{vmatrix}$ = (sacamos f. común 2 de la fila 2) = $2\begin{vmatrix} a & -b & c \\ d & -e & f \\ p & -q & r \end{vmatrix}$ = (sacamos f. común –1 de la columna 2) = $-2\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ p & q & r \end{vmatrix} = -2|A| = \boxed{-8}$

5) *(Sólo para quienes tienen suspendida la 1ª evaluación: Sustituir uno de los problemas anteriores por éste)* Sea f la función definida por $f(x) = \dfrac{1}{2x} + \ln x$ para $x > 0$.

a) Determinar el punto de la gráfica de f en el que la pendiente de la recta tangente es máxima. *(2 puntos)*

La pendiente en $(x, f(x))$ es, según la *Interpretación Geométrica de la Derivada*, $m = f\,'(x)$. O sea:

$$m = f\,'(x) = -\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x} = \frac{-1+2x}{2x^2}$$

Esta pendiente varía, evidentemente, con x. Es una función de x a la que vamos a llamar $g(x)$. Así, buscamos el valor de x que produce el *máximo absoluto* de la función:

$$g(x) = \frac{2x-1}{2x^2} \quad \text{con } x \in (0, +\infty)$$

por ser dicho intervalo el Dom(f) y para cuyos valores existe, también, $g(x)$. Buscaremos los extremos absolutos a través del estudio de la monotonía de g:

$$g\,'(x) = \frac{2\cdot 2x^2 - (2x-1)4x}{(2x^2)^2} = \frac{4x^2 - 8x^2 + 4x}{4x^4} = \frac{-4x^2 + 4x}{4x^4} = \frac{4(-x^2 + x)}{4x^4} =$$

$$= \frac{-x^2 + x}{x^4} = \frac{-x+1}{x^3}$$

- Discontinuidades de g ó $g\,'$: No tiene.
- $g\,'(x) = 0$: $-x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

Así:

	(0, 1)	1	(1, +∞)
$g\,'$	+	0	–
g	↗	Máx	↘

La forma de la función nos dice que este máximo relativo también es absoluto. Así, $\boxed{\text{la pendiente máxima se obtiene cuando } x = 1 \text{ y vale } m = g(1) = 1/2}$.

b) Hallar la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$. *(0,5 puntos)*

- Punto de tangencia: $x = 1 \Rightarrow f(1) = ½$: $(1, ½)$.
- Pendiente de la *tangente*: $m = ½$ (del apartado anterior)
- Pendiente de la *normal*: $m' = \dfrac{-1}{m} = \dfrac{-1}{1/2} = -2$
- Recta *normal*: Usando la ecuación punto-pendiente la obtenemos.

$$y - ½ = -2(x - 1) \Rightarrow y = -2x + 2 + ½ \Rightarrow \boxed{y = -2x + \frac{5}{2}}$$

NOMBRE: ____

Instrucciones: **1)** Todos las **hojas** deben tener el **nombre** y estar **numeradas** en la parte superior. **2)** Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. **3)** No se puede usar **corrector ni lápiz**. Se aconseja no usar borrador. **4)** Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar** la respuesta a una pregunta con las de otras.

1) De entre todas las rectas del plano que pasan por el punto (1, 2), encontrar aquella que forma con las partes positivas de los ejes coordenados un triángulo de área mínima. Hallar el área de dicho triángulo. *(2,5 puntos)*

2) Calcular $\lim_{x\to 0} \frac{(e^x - 1)\,\text{sen}\,x}{x^3 - x^2}$ *(1,5 puntos)*

3) Considerar la función $f : (-\infty, 10) \to \mathrm{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} a^x - 6 & \text{si} \quad x < 2 \\ |x - 5| & \text{si} \quad 2 \le x < 10 \end{cases}$$

   a) Determinar el valor de a sabiendo que f es continua (y que $a > 0$). *(1 punto)*
   b) Esbozar la gráfica de f para $a = 3$. *(0,5 puntos)*
   c) Estudiar la derivabilidad de f para $a = 3$. *(1 punto)*

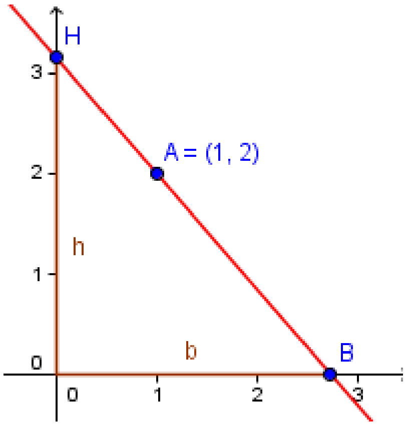
4) Sea $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ la función dada por $f(x) = \mathrm{e}^{-2x}$.
   a) Justificar que la recta de ecuación $y = -2\mathrm{e}x$ es la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $-1/2$. *(1 punto)*
   b) Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de f, el eje de ordenadas y la recta tangente del apartado anterior. *(1,5 puntos)*

5) Sin desarrollarlo, calcular el valor del determinante de la siguiente matriz, enunciando las propiedades que se usen: *(1 punto)*

$$\begin{pmatrix} k & x & 1+ax \\ 2k & y & 2+ay \\ 3k & z & 3+az \end{pmatrix}$$

SOLUCIONES

1) De entre todas las rectas del plano que pasan por el punto (1, 2), encontrar aquella que forma con las partes positivas de los ejes coordenados un triángulo de área mínima. Hallar el área de dicho triángulo. *(2,5 puntos)*



Escribimos en forma punto-pendiente todas las rectas que pasan por (1, 2):

$$y - 2 = m(x - 1)$$

El punto B de corte con el eje OX determina la base del triángulo (b), y el H con el eje OY, la altura (h):

- $x = 0 \Rightarrow y = -m + 2 \Rightarrow h = 2 - m$.
- $y = 0 \Rightarrow -2 = mx - m \Rightarrow x = \dfrac{m-2}{m}$

$$\Rightarrow b = \frac{m-2}{m}$$

Luego el área variable del triángulo, en función de la pendiente de la recta m, es:

$$A(m) = \frac{1}{2}(2-m)\frac{m-2}{m} = -\frac{1}{2}(-2+m)\frac{m-2}{m} = -\frac{1}{2}\frac{(m-2)^2}{m}$$

En realidad, $m \in (-\infty, 0)$, pues si $m > 0$ la recta sería creciente y no se formaría el triángulo con las partes positivas de los ejes.

Hay que hallar el mínimo absoluto de esta función. Lo haremos estudiando su monotonía.

$$A'(m) = -\frac{1}{2}\frac{2(m-2)m-(m-2)^2}{m^2} = -\frac{1}{2}\frac{2m^2-4m-m^2+4m-4}{m^2} = -\frac{1}{2}\frac{m^2-4}{m^2}$$

- <u>Discontinuidades de A ó A'</u>: $m = 0$, que no está en el dominio.
- <u>$A'(m) = 0$</u>: $m = -2$ ó $m = 2$, pero este último no está en el dominio.

	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 0)$
A'	–	0	+
A	↘	mín	↗

La forma de la función nos dice que el mínimo relativo encontrado es, también, absoluto.

Como $\boxed{A(-2) =} -\dfrac{1}{2}\dfrac{(-2-2)^2}{-2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{(-4)^2}{2} = \boxed{4\ \ u^2}$, éste es el valor del área mínima.

La recta pedida es:

$$y - 2 = -2(x - 1) \Rightarrow \boxed{y = -2x + 4}$$

2) Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^x-1)\operatorname{sen} x}{x^3-x^2}$ *(1,5 puntos)*

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)\operatorname{sen} x}{x^3-x^2} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

Como las funciones del numerador y denominador son derivables en R, puede aplicarse L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\operatorname{sen} x+(e^x-1)\cos x}{3x^2-2x} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

Aplicamos, de nuevo, L'Hôpital, porque nuevamente se cumplen sus hipótesis, al ser numerador y denominador derivables en R:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x \text{sen } x + e^x \cos x + e^x \cos x - (e^x - 1)\text{ sen } x}{6x-2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x \text{sen } x + 2e^x \cos x - e^x \text{ sen } x + \text{sen } x}{6x-2} = \lim_{x\to 0}\frac{2e^x \cos x + \text{sen } x}{6x-2} = \frac{2}{-2} = -1$$

Por tanto, los dos límites anteriores existen y valen lo mismo:

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{(e^x - 1)\text{sen } x}{x^3 - x^2} = -1}$$

3) Considerar la función $f : (-\infty, 10) \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} a^x - 6 & \text{si} \quad x < 2 \\ |x-5| & \text{si} \quad 2 \le x < 10 \end{cases}$$

a) Determinar el valor de a sabiendo que f es continua (y que $a > 0$). *(1 punto)*

Vamos a comprobar que el enunciado es correcto, y que f puede ser continua.

- <u>$(-\infty, 2)$</u>: f está definida por $y = a^x - 6$, que es continua, porque las funciones exponenciales lo son, y restándole una constante, que es otra función continua, resulta una función continua (la suma de funciones continuas, es continua).
- <u>$(2, 10)$</u>: El valor absoluto de una función continua, es continua. Y $y = x - 5$ es una función continua.
- <u>$x = 2$</u>: 1) $\exists f(2) = |2 - 5| = 3$;

  2) $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(a^x - 6) = a^2 - 6$; $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}|x-5| = 3$

  Será continua si coinciden estos resultados:

  $$a^2 - 6 = 3 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 3.$$

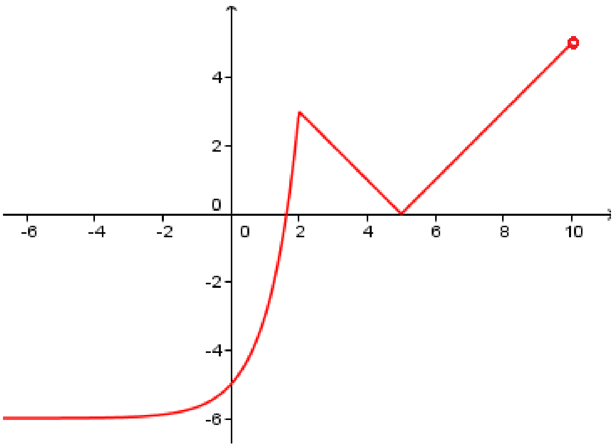
  Como dicen que $a > 0$, la única posibilidad es $\boxed{a = 3}$. Con esta condición, <u>f es continua en $(-\infty, 10)$</u>.

b) Esbozar la gráfica de f para $a = 3$. *(0,5 puntos)*

$y = 3^x$ tiene una gráfica similar a la de la exponencial de base e, (porque la base 2 es mayor que 1), que es estrictamente creciente, con asíntota horizontal de ecuación $y = 0$ si $x \to -\infty$, y lléndose a $+\infty$ si $x \to +\infty$. Al restarle 6 unidades, la gráfica desciende verticalmente 6 unidades. Entonces, $y = 3^x - 6$ pasará por $(0, -6)$ y $(1, -3)$. Terminará en $(2, 3)$, siendo hueco dicho punto.

$y = x - 5$ es una recta creciente que atraviesa OX en $x = 5$. La parte que queda bajo OX (antes de $x = 5$) la convertimos en su simétrica sobre el mismo y tendremos $y = |x - 5|$. Pasa por $(2, 3)$, rellenando el hueco que dejó la anterior, y termina en $(10, 5)$, siendo hueco dicho punto, pues no está en el dominio.

Así, la gráfica es la adjunta.



c) Estudiar la derivabilidad de f para $a = 3$. *(1 punto)*

Al ser continua, podría ser derivable. Para poder derivar el valor absoluto, lo disgregamos:

$$f(x) = \begin{cases} 3^x - 6 & \text{si} \quad x < 2 \\ 5 - x & \text{si} \quad 2 \le x < 5 \\ x - 5 & \text{si} \quad 5 \le x < 10 \end{cases}$$

Aplicando las fórmulas de derivación en intervalos abiertos:

$$f'(x) = \begin{cases} 3^x \ln 3 & \text{si} \quad x < 2 \\ -1 & \text{si} \quad 2 < x < 5 \\ 1 & \text{si} \quad 5 < x < 10 \end{cases}$$

Como $f'(2^-) = 3^2 \ln 3 = 9 \ln 3$ y $f'(2^+) = -1$, se ve que no coinciden, por lo que no es derivable en 2.

Análogamente, $f'(5^-) = -1$ y $f'(5^+) = 1$. Tampoco es derivable en 5, entonces, por idéntica razón.

De esta forma, la expresión definitiva de la derivada es la anterior:

$$\boxed{f'(x) = \begin{cases} 3^x \ln 3 & \text{si} \quad x < 2 \\ -1 & \text{si} \quad 2 < x < 5 \\ 1 & \text{si} \quad 5 < x < 10 \end{cases}}$$

4) Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = e^{-2x}$.

a) Justificar que la recta de ecuación $y = -2ex$ es la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $-1/2$. *(1 punto)*

- Punto de tangencia. Como $f(-1/2) = e^1 = e \Rightarrow (-1/2, e)$.
- Como $f'(x) = -2e^{-2x} \Rightarrow m = f'(-1/2) = -2e$.
- Recta tangente: $y - e = -2e\,(x + ½) \Rightarrow y = -2ex - e + e \Rightarrow \boxed{y = -2ex}$.

b) Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de f, el eje de ordenadas y la recta tangente del apartado anterior. *(1,5 puntos)*

$f'(x) = -2e^{-2x}$ y la exponencial siempre es positiva, la derivada es negativa siempre, por lo que se trata de una función decreciente estrictamente. Además, $f''(x) = 4e^{-2x} > 0, \forall x \Rightarrow f$ siempre es convexa.

Por otra parte, la recta tangente es decreciente. Entonces, el único contacto entre ambas es el punto de tangencia, pues como f es decreciente y convexa, después de tocar a su tangente se va alejando de la misma.

Para $x = -0.1$, por ejemplo $f(-0.1) \approx 1.22$ mientras que la imagen por la recta es $y \approx 0.54$. De modo que la recta está por debajo de la curva.

Luego el área pedida debe ser:

$$A = \int_{-1/2}^{0} (e^{-2x} + 2ex)dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x} + ex^2 \right]_{-1/2}^{0} = -\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}e + \frac{1}{4}e \right) =$$

$$= \frac{e}{4} - \frac{1}{2} = \boxed{\frac{2e-1}{4}}$$

5) Sin desarrollarlo, calcular el valor del determinante de la siguiente matriz, enunciando las propiedades que se usen: *(1 punto)*

$$\begin{pmatrix} k & x & 1+ax \\ 2k & y & 2+ay \\ 3k & z & 3+az \end{pmatrix}$$

Cuando hay una suma en una fila o columna, el determinante se puede disgregar en una suma de dos determinantes idénticos salvo en dicha línea, en la que en el primer determinante irá uno de los sumandos y en el segundo, el otro. Por otra parte, se puede extraer factor común de una sola línea, quedando el determinante multiplicado por dicho factor:

$$\begin{vmatrix} k & x & 1+ax \\ 2k & y & 2+ay \\ 3k & z & 3+az \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k & x & 1 \\ 2k & y & 2 \\ 3k & z & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k & x & ax \\ 2k & y & ay \\ 3k & z & az \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 2 & y & 2 \\ 3 & z & 3 \end{vmatrix} + a\begin{vmatrix} k & x & x \\ 2k & y & y \\ 3k & z & z \end{vmatrix} =$$

$$= k\cdot 0 + a\cdot 0 = \boxed{0}$$

porque los dos determinantes finales valen 0, al coincidir dos columnas en cada uno de ellos.

<u>De otra forma</u>. Sacando k factor común de la primera columna:

$$\begin{vmatrix} k & x & 1+ax \\ 2k & y & 2+ay \\ 3k & z & 3+az \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} 1 & x & 1+ax \\ 2 & y & 2+ay \\ 3 & z & 3+az \end{vmatrix} = k\cdot 0 = 0$$

pues la tercera columna es combinación lineal de las dos primeras: $C_3 = C_1 + aC_2$.