Instrucciones:

a) **Duración:** 1 hora y 30 minutos.

b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.

c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.

d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.

e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

Opción A (Junio 2.013)

Ejercicio 1.- [**2'5 puntos**] Sabiendo que $\lim_{x\to 0} \dfrac{x\cos(x)+b\,\text{sen}(x)}{x^3}$ es finito, calcula b y el valor del límite.

Ejercicio 2.- Sean $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ las funciones definidas mediante

$$f(x) = |x(x-2)| \quad \text{y} \quad g(x) = x+4$$

a) [**1'25 puntos**] Esboza las gráficas de f y g sobre los mismos ejes. Calcula los puntos de corte entre ambas gráficas.

b) **[1,25 puntos]** Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g.

Ejercicio 3.- Sea $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m+1 & 0 \\ 1 & 1 & m-1 \end{pmatrix}$

a) **[0'75 puntos]** Determina los valores de m para los que los vectores fila de M son linealmente independientes.

b) **[1 punto]** Estudia el rango de M según los valores de m.

c) **[0,75 puntos]** Para $m = 1$, calcula la inversa de M.

Ejercicio 4.- Sea r la recta que pasa por el punto $(1, 0, 0)$ y tiene como vector dirección $(a, 2a, 1)$ y sea s la recta dada por

$$\begin{cases} -2x+y=-2 \\ -ax+z=\ \ 0 \end{cases}$$

a) **[1 punto]** Calcula los valores de a para los que r y s son paralelas.

b) **[1,5 puntos]** Calcula, para $a = 1$, la distancia entre r y s.

Instrucciones:

a) **Duración:** 1 hora y 30 minutos.

b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.

c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.

d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.

e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

Opción B (Junio 2.013)

Ejercicio 1.- Sea $f:(-\infty, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\begin{cases} x+2e^{-x} & \text{si} \quad x \leq 0 \\ a\sqrt{b-x} & \text{si} \quad 0<x<1 \end{cases}$

a) [1'5 puntos] Determina a y b sabiendo que f es derivable en todo su dominio.

b) [1 punto] Halla la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

Ejercicio 2.- [2'5 puntos] Sea $g:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $g(x) = \ln(x^2 + 1)$ (donde ln denota el logaritmo neperiano): Calcula la primitiva de g cuya gráfica pasa por el origen de coordenadas.

Ejercicio 3.- Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

a) [**1'5 puntos**] Comprueba que $A^2 = 2I$ y calcula A^{-1}.

b) [1 punto] Calcula A^{2013} y su inversa.

Ejercicio 4.- Considera los puntos $P(2, 3, 1)$ y $Q(0, 1, 1)$.

a) [1'75 puntos] Halla la ecuación del plano π respecto del cual P y Q son simétricos.

b) [0'75 puntos] Calcula la distancia de P a π.

OPCIÓN A
SOLUCIONES

Ejercicio 1.- [2'5 puntos] Sabiendo que $\lim_{x\to 0} \frac{x\cos(x)+b\,\text{sen}(x)}{x^3}$ es finito, calcula b y el valor del límite.

Como se produce una indeterminación del tipo 0/0, probamos el cálculo del límite por la Regla de L'Hôpital. Supuesto que, al aplicarla, el límite nos da resultado, el límite original tiene ese resultado.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos(x)+b\,\text{sen}(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-x\,\text{sen}(x)+b\cos(x)}{3x^2} = \frac{1+b}{0}$$

Este nuevo límite saldría infinito, salvo si $1 + b = 0 \iff b = -1$, que produciría la indeterminación 0/0, con lo que podríamos aplicar nuevamente L'Hôpital. Como sabemos que el límite es finito, debe suceder esto último. Por tanto, $\boxed{b = -1}$. Continuamos el cálculo aplicando L'Hôpital, sustituyendo ya el valor de b:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-x\,\text{sen}(x)-\cos(x)}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\text{sen}(x)-\text{sen}(x)-x\cos(x)+\text{sen}(x)}{6x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\text{sen}(x)-x\cos(x)}{6x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \text{(L'Hôpital)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\cos(x)-\cos(x)+x\,\text{sen}(x)}{6} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{-2\cos(x)+x\,\text{sen}(x)}{6} = \frac{-2+0}{6} = \boxed{-\frac{1}{3}}$$

Ejercicio 2.- Sean $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ las funciones definidas mediante

$$f(x) = |x(x-2)| \quad \text{y} \quad g(x) = x + 4$$

a) **[1'25 puntos]** Esboza las gráficas de f y g sobre los mismos ejes. Calcula los puntos de corte entre ambas gráficas.

Para trazar la gráfica de f dibujamos la función sin valor absoluto, es decir, $y = x(x-2) \iff y = x^2 - 2x$, y la función en valor absoluto, o sea, f tendrá la misma gráfica transformando los tramos que queden bajo el eje OX en sus simétricos respecto a éste.

- Intersecciones con los ejes: $y = 0 \Rightarrow 0 = x(x-2) \Rightarrow x = 0$ ó $x = 2$: $\boxed{(0, 0) \text{ y } (2, 0)}$. Estos son los cortes con OX; pero el origen es, también, el corte con OY.
- Extremo relativo: $y' = 2x - 2$. $y' = 0 \iff x = 1$. Como $y'' = 2 > 0 \Rightarrow$ la parábola es *convexa*, con lo que en este punto lo que hay es un *mínimo relativo*. Sus coordenadas son (1, –1), ya que cuando $x = 1 \Rightarrow y = -1$.

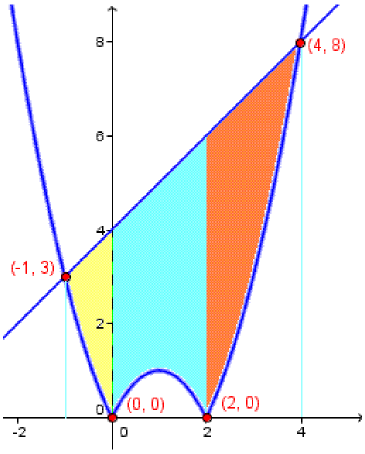
Por lo demás, la gráfica de g es una recta, que dibujamos con una tabla de valores.

Nos piden los puntos de corte entre ambas gráficas. Son los (x, y) que verifican las ecuaciones de ambas, esto es, los que resuelven el sistema constituido por ambas ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 - 2x \\ y = x + 4 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 - 2x = x + 4 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$\Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} x = -1 \Rightarrow y = 3 \\ x = 4 \Rightarrow y = 8 \end{array}\right.$$

Es decir, $\boxed{\text{se cortan en } (-1, 3) \text{ y } (4, 8)}$. Con toda esta información, la gráfica es la adjunta.



b) [1,25 puntos] Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g.

La función valor absoluto se puede escribir como una función por partes. A la vista de la gráfica, sabemos cuándo es positivo o negativo el valor de $x^2 - 2x$ según los valores de x. Por tanto:

$$f(x) = |x^2 - 2x| = \begin{cases} x^2 - 2x & si \quad x^2 - 2x \geq 0 \\ (-x^2 - 2x) & si \quad x^2 - 2x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2 - 2x & si \quad x \leq 0 \text{ ó } x \geq 2 \\ -x^2 + 2x & si \quad 0 < x < 2 \end{cases}$$

Dividimos en tres partes el recinto, tal como se ha destacado en el gráfico anterior. Así, como el área entre las dos curvas es la integral definida de la diferencia de las funciones (la de arriba menos la de abajo, o bien, el valor absoluto de la diferencia) entre las abscisas de los puntos donde se cortan, y a la vista de cómo es la fórmula de f según los valores de x, se tiene:

$$A = \int_{-1}^{0}[(x+4)-(x^2-2x)]dx + \int_{0}^{2}[(x+4)-(2x-x^2)]dx + \int_{2}^{4}[(x+4)-(x^2-2x)]dx =$$

$$= \int_{-1}^{0}(-x^2+3x+4)dx + \int_{0}^{2}(-x^2-x+4)dx + \int_{2}^{4}(-x^2+3x+4)dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3}+3\frac{x^2}{2}+4x\right]_{-1}^{0} + \left[-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+4x\right]_{0}^{2} + \left[-\frac{x^3}{3}+3\frac{x^2}{2}+4x\right]_{2}^{4} =$$

$$= 0 + \frac{13}{6} + \frac{26}{3} - 0 + \frac{56}{3} - \frac{34}{3} = \boxed{\frac{109}{6}}$$

Ejercicio 3.- Sea $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m+1 & 0 \\ 1 & 1 & m-1 \end{pmatrix}$

a) [0'75 puntos] Determina los valores de m para los que los vectores fila de M son linealmente independientes.

Basta, para ello, que el determinante sea no nulo, pues así el rango de M será 3, igual al número de filas (y columnas) linealmente independientes.

$|M| = (m+1)(m-1) + (m+1) = m^2 - 1 + m + 1 = m^2 + m = m(m+1) = 0 \iff m = 0$ ó $m = -1$

Es decir, deberá ser $\boxed{m \neq 0 \text{ y } m \neq -1}$.

b) [1 punto] Estudia el rango de M según los valores de m.

Tachando fila 2 y columna 3 nos queda un menor no nulo: $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Por tanto $r(M) \geq 2$, $\forall m$. Al orlar este menor, obtenemos la matriz completa M. Se calculó su determinante en el apartado anterior, por lo que sabemos los valores de m que lo hacen no nulo y para los cuales, por tanto, $r(M) = 3$. Luego, resumiendo:

Si $m = 0$ ó $m = -1 \Rightarrow |M| = 0 \Rightarrow r(M) = 2$ (por el menor no nulo antes citado).
Si $m \neq 0$ ó $m \neq -1 \Rightarrow |M| \neq 0 \Rightarrow r(M) = 3$

c) [0,75 puntos] Para $m = 1$, calcula la inversa de M.

Para este valor, $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |M| = 2 \neq 0 \Rightarrow \exists M^{-1}$.

$$M^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Adj}(M^t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Recordemos que para formar la adjunta, calculamos el menor complementario de cada elemento (es decir, el determinante que resulta al tachar la fila y columna a la que pertenece cada elemento) y lo multiplicamos por +1 ó –1 según la posición del elemento en cuestión: empezamos por +1 para el m_{11} y moviéndonos horizontal o verticalmente (nunca en diagonal), cada vez que avanzamos una posición cambiamos el signo (–1, +1, etc). Para terminar:

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|}\text{Adj}(M^t) = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 4.- Sea r la recta que pasa por el punto $(1, 0, 0)$ y tiene como vector dirección $(a, 2a, 1)$ y sea s la recta dada por

$$\begin{cases} -2x + y = -2 \\ -ax + z = \ \ 0 \end{cases}$$

a) **[1 punto]** Calcula los valores de a para los que r y s son paralelas.

Pasamos s a implícitas. Para ello, basta llamar $x = t$ (porque se repite en ambas ecuaciones y aparece con sólo otra variable en cada una de las dos ecuaciones) y despejar. Así:

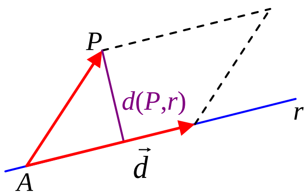
$$s \equiv \begin{cases} x = t \\ y = -2 + 2t \\ z = at \end{cases} \Rightarrow \vec{d}_s = (1, 2, a)$$

Y sabemos que $\vec{d}_r = (a, 2a, 1)$. Las rectas serán paralelas si, y sólo si lo son sus respectivos vectores de dirección, lo que ocurre cuando son proporcionales, es decir:

$$\frac{a}{1} = \frac{2a}{2} = \frac{1}{a} \Leftrightarrow a = \frac{1}{a} \Leftrightarrow a^2 = 1 \Leftrightarrow \boxed{a = -1 \text{ ó } a = 1}.$$

b) **[1,5 puntos]** Calcula, para $a = 1$, la distancia entre r y s.

Para este valor, las rectas son paralelas. La distancia entre ambas es la de un punto P cualquiera de s a la recta r (o al revés). Y si A es un punto *cualquiera* de r y $\vec{d}$ es el vector de dirección de r:



$$d(P, r) = \frac{|\vec{d} \times \overrightarrow{AP}|}{|\vec{d}|} = \frac{\text{Área del paralelogramo}}{\text{base}}$$

Pues bien: $P(0, -2, 0)$, como deducimos de las paramétricas, $A(1, 0, 0)$, $\vec{d} = (1, 2, 1)$, según el enunciado. Así:

$$|\vec{d}| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$$

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = (0, -2, 0) - (1, 0, 0) = (-1, -2, 0)$$

$$\vec{d} \times \overrightarrow{AP} = \left(\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \right) = (2, -1, 0) \Rightarrow |\vec{d} \times \overrightarrow{AP}| = \sqrt{4+1+0} = \sqrt{5}$$

Luego $\boxed{d(r, s) = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\dfrac{5}{6}}\ u}$

OPCIÓN B
SOLUCIONES

Ejercicio 1.- Sea $f:(-\infty, 1) \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\begin{cases} x+2e^{-x} & \text{si} \quad x \le 0 \\ a\sqrt{b-x} & \text{si} \quad 0<x<1 \end{cases}$

a) **[1'5 puntos]** Determina a y b sabiendo que f es derivable en todo su dominio.

Para ser derivable, primeramente debe ser *continua*. Y para ello, debe ocurrir:

1) $b - x \ge 0$, para que exista la raíz $\Rightarrow$ $x \le b$. Y como x, en la zona donde es válida la fórmula de la raíz cuadrada, toma, como máximo, el valor 1 $\Rightarrow$ $\boxed{1 \le b}$. El resto de operaciones que definen f no aporta discontinuidad alguna.
2) Los límites laterales en el punto de conexión de las dos fórmulas de f, es decir, en $x = 0$, deben coincidir entre sí y con $f(0) = 0 + 2e^0 = 2\cdot 1 = 2$. Así:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (x+2e^{-x}) = 2 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} a\sqrt{b-x} = a\sqrt{b} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{a\sqrt{b}=2} \qquad (1)$$

Hallamos su función derivada, procediendo directamente en intervalos abiertos, donde son válidas las fórmulas de las tablas de derivadas:

$$f'(x)=\begin{cases} 1-2e^{-x} & \text{si} \quad x<0 \\ a\dfrac{-1}{2\sqrt{b-x}} & \text{si} \quad 0<x<1 \end{cases}$$

Como sabemos que es derivable $\Rightarrow$ $f'(0^-) = f'(0^+)$ $\Rightarrow$ $1-2=\dfrac{-a}{2\sqrt{b}}$ $\Rightarrow$ $\boxed{a = 2\sqrt{b}}$ (2)

En consecuencia, de (1) y (2) se obtiene: $\dfrac{2}{\sqrt{b}} = 2\sqrt{b}$ $\Rightarrow$ $1 = b$ (lo que hace que se cumpla la condición del apartado 1 de continuidad). Sustituyendo en (2): $a = 2$.

En resumen: $\boxed{a = 2 \text{ y } b = 1}$.

b) **[1 punto]** Halla la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

- Punto de tangencia: $f(0) = 2$ $\Rightarrow$ $\boxed{(0, 2)}$.
- Pendiente de la tangente: $m = f'(0) = 1 - 2e^0 = 1 - 2 = \boxed{-1}$

Por tanto, la recta tangente es (punto-pendiente): $y - 2 = -1(x - 0)$ $\Rightarrow$ $\boxed{y = -x + 2}$

La pendiente de la normal es $m' = -1/m = -1/(-1) = 1$. Con ello, la recta normal es: $y - 2 = 1(x - 0)$ $\Rightarrow$ $\boxed{y = x + 2}$

Ejercicio 2.- **[2'5 puntos]** Sea $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $g(x) = \ln(x^2 + 1)$ (donde ln denota el logaritmo neperiano): Calcula la primitiva de g cuya gráfica pasa por el origen de coordenadas.

Todas las primitivas de g las obtenemos de la integral indefinida, que hacemos *por partes*:

$$G(x) = \int \ln(x^2+1)dx = \left[\begin{array}{lll} u=\ln(x^2+1) & \Rightarrow & du=\dfrac{2x}{x^2+1}dx \\ dv=dx & \Rightarrow & v=x \end{array}\right] = x\ln(x^2+1) - \int \frac{2x^2}{x^2+1}dx =$$

$$= x\ln(x^2+1) - 2\int \frac{x^2}{x^2+1}dx = x\ln(x^2+1) - 2\int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx =$$

$$= x\ln(x^2+1) - 2\int \frac{x^2+1}{x^2+1}dx - 2\int \frac{-1}{x^2+1}dx = x\ln(x^2+1) - 2\int dx + 2\int \frac{1}{x^2+1}dx =$$

$$= x\ln(x^2+1) - 2x + 2\,\mathrm{arctg}(x) + C$$

Para que pase por (0, 0): $G(0) = 0 \;\Rightarrow\; 0\cdot\ln(1) - 2\cdot 0 + 2\,\mathrm{arctg}(0) + C = 0 \;\Rightarrow\; C = 0$. Luego, en conclusión:

$$\boxed{G(x) = x\ln(x^2+1) - 2x + 2\,\mathrm{arctg}(x)}$$

Ejercicio 3.- Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

a) [**1'5 puntos**] Comprueba que $A^2 = 2I$ y calcula A^{-1}.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2I$$

b) **[1 punto]** Calcula A^{2013} y su inversa.

$$A^{2013} = A^{2012}\cdot A = (A^2)^{1006}\cdot A = (2I)^{1006}\cdot A = 2^{1006}\cdot I^{1006}\cdot A = 2^{1006}\cdot I\cdot A = 2^{1006}\cdot A =$$

$$= 2^{1006}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2^{1006} & 2^{1006} \\ 2^{1006} & -2^{1006} \end{pmatrix}}$$

Calculemos, ahora, su inversa. Llamemos $T = A^{2013}$. Al sacar factor común de cada fila, que es una de las propiedades de los determinantes, tendremos:

$$|T| = \begin{vmatrix} 2^{1006} & 2^{1006} \\ 2^{1006} & -2^{1006} \end{vmatrix} = 2^{1006}\cdot 2^{1006}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2^{2012}(-1-1) = 2^{2012}(-2) = -2^{2013}$$

$$T^t = T = \begin{pmatrix} 2^{1006} & 2^{1006} \\ 2^{1006} & -2^{1006} \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \mathrm{Adj}(T^t) = \begin{pmatrix} -2^{1006} & -2^{1006} \\ -2^{1006} & 2^{1006} \end{pmatrix} \;\Rightarrow$$

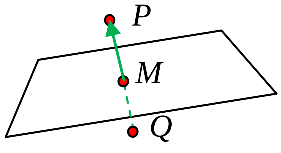
$$\Rightarrow\; T^{-1} = \frac{1}{|T|}\mathrm{Adj}(T^t) = -\frac{1}{2^{2013}}\begin{pmatrix} -2^{1006} & -2^{1006} \\ -2^{1006} & 2^{1006} \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2^{-1007} & 2^{-1007} \\ 2^{-1007} & -2^{-1007} \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 4.- Considera los puntos $P(2, 3, 1)$ y $Q(0, 1, 1)$.

a) **[1'75 puntos]** Halla la ecuación del plano π respecto del cual P y Q son simétricos.

Si llamamos M al punto medio del segmento $\overline{PQ}$ $\Rightarrow$ $M = \left(\frac{2+0}{2}, \frac{3+1}{2}, \frac{1+1}{2}\right) = (1, 2, 1)$. Ése es un punto del plano pedido. Además, un vector normal al mismo será:

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (0, 1, 1) - (2, 3, 1) = (-2, -2, 0)$ que es paralelo a (1, 1, 0), por lo que tomaremos éste último como vector normal, al ser más sencillo. Así, el plano será:



$$\pi \equiv 1(x-1) + 1(y-2) + 0(z-1) = 0 \;\Leftrightarrow\; x + y - 1 - 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; \boxed{x + y - 3 = 0}$$

b) **[0'75 puntos]** Calcula la distancia de P a π.

$$d(P, \pi) = \frac{|2+3-3|}{\sqrt{1+1+0}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \boxed{\sqrt{2}\;\; u}$$

También: $d(P, \pi) = d(P, M) = \sqrt{(2-1)^2 + (3-2)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{2}\; u$
