**IES Fernando de Herrera** **Curso 2014 / 15**

**Tercer trimestre - Primer examen – 2º Bach CT**

NOMBRE: ______________________________________________

**Instrucciones**: **1)** Todos los **folios** deben tener el **nombre** y estar **numerados** en la parte superior. **2)** Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. **3)** No se puede usar **corrector ni lápiz**. Se aconseja no usar borrador. **4)** Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar** la respuesta a una pregunta con las de otras.

1) *(2008-6, Opc.B)* Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & k \\ k & 1 & 3 \\ 1 & 7 & k \end{pmatrix}$

   a) Estudia el rango de $A$ en función de los valores del parámetro $k$. *(1 punto)*

   b) Para $k = 0$, halla la matriz inversa de $A$. *(1 punto)*

2) *(2007-1, Opc. A)* Halla los dos puntos que dividen al segmento de extremos $A(1, 2, 1)$ y $B(-1, 0, 3)$ en tres partes iguales. *(1 punto)*

3) *(2007-1, Opc. B)* Considera los vectores $\vec{u} = (1, 1, m)$, $\vec{v} = (0, m, -1)$ y $\vec{w} = (1, 2m, 0)$.

   a) Determina el valor de $m$ para que los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean linealmente dependientes. *(1 punto)*

   b) Para $m = 1$, expresa el vector $\vec{w}$ como combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. *(1 punto)*

4) *(2007-1, Opc. B)* Considera el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} ax + y + z &= 4 \\ x - ay + z &= 1 \\ x + y + z &= a + 2 \end{aligned}\right\}$$

   a) Clasifícalo según los valores de $a$ y resuélvelo para el valor de $a$ que lo haga compatible indeterminado. *(2 puntos)*

   b) Resuelve el sistema que se obtiene para $a = -2$. *(1 punto)*

5) *(2007-2, Opc. B)* Considera los puntos $A(0, 3, -1)$, $B(0, 1, 5)$ y $C(x, 4, 3)$

   a) Calcula los valores de $x$ sabiendo que el triángulo $ABC$ tiene un ángulo recto en $C$. *(1 punto)*

   b) Calcula el área del triángulo $ABC$ para $x = 0$. *(1 punto)*

## SOLUCIONES

1) *(2008-6, Opc.B)* Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & k \\ k & 1 & 3 \\ 1 & 7 & k \end{pmatrix}$

a) Estudia el rango de $A$ en función de los valores del parámetro $k$. *(1 punto)*

Como $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & k \\ k & 1 & 3 \\ 1 & 7 & k \end{vmatrix} = k + 9 + 7k^2 - k - 3k^2 - 21 = 4k^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow k^2 = 3 \Leftrightarrow$

$k = \pm\sqrt{3}$, se tiene:

- Si $\boxed{k \neq \sqrt{3} \text{ y } k \neq -\sqrt{3}} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \boxed{r(A) = 3}$.
- Si $\boxed{k = \sqrt{3}} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 & 3 \\ 1 & 7 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ y, dado que $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ \sqrt{3} & 1 \end{vmatrix} = 1 - 3\sqrt{3} \neq 0 \Rightarrow$ $\boxed{r(A) = 2}$.
- Si $\boxed{k = -\sqrt{3}} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 & 3 \\ 1 & 7 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$ y, dado que $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -\sqrt{3} & 1 \end{vmatrix} = 1 + 3\sqrt{3} \neq 0 \Rightarrow \boxed{r(A) = 2}$.

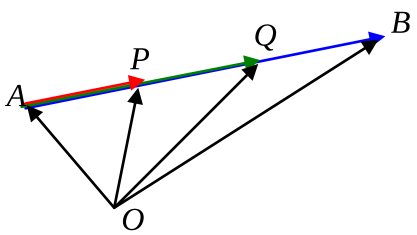
b) Para $k = 0$, halla la matriz inversa de $A$. *(1 punto)*

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & 0 \end{vmatrix} = 4\cdot 0^2 - 12 = -12 \Rightarrow \exists A^{-1}$.

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} -21 & 0 & 9 \\ 3 & 0 & -3 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}\mathrm{Adj}(A^t) = -\frac{1}{12}\begin{pmatrix} -21 & 0 & 9 \\ 3 & 0 & -3 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 7/4 & 0 & -3/4 \\ -1/4 & 0 & 1/4 \\ 1/12 & 1/3 & -1/12 \end{pmatrix}}$$

2) *(2007-1, Opc. A)* Halla los dos puntos que dividen al segmento de extremos $A(1, 2, 1)$ y $B(-1, 0, 3)$ en tres partes iguales. *(1 punto)*




Para hallar $P$ y $Q$ tenemos en cuenta que (ver gráfico):

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right)$$

=

$$= (1, 2, 1) + \frac{1}{3}[(-1, 0, 3) - (1, 2, 1)] =$$

$$= (1, 2, 1) + \frac{1}{3}(-2, -2, 2) = \left(1-\frac{2}{3}, 2-\frac{2}{3}, 1+\frac{2}{3}\right) = \boxed{\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)}$$

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) =$$

$$= (1, 2, 1) + \frac{2}{3}[(-1, 0, 3) - (1, 2, 1)] = (1, 2, 1) + \frac{2}{3}(-2, -2, 2) =$$

$$= \left(1-\frac{4}{3}, 2-\frac{4}{3}, 1+\frac{4}{3}\right) = \boxed{\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right)}$$

3) *(2007-1, Opc. B)* Considera los vectores $\vec{u} = (1, 1, m)$, $\vec{v} = (0, m, -1)$ y $\vec{w} = (1, 2m, 0)$.

a) Determina el valor de $m$ para que los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean linealmente dependientes. *(1 punto)*

Los vectores serán linealmente dependientes si, y sólo si el rango de la matriz formada por ellos, distribuidos en tres filas, tiene rango menor que 3:

$$r\begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & m & -1 \\ 1 & 2m & 0 \end{pmatrix} = 3 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & m & -1 \\ 1 & 2m & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow -1 - m^2 + 2m \neq 0$$

Resolvemos $m^2 - 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow (m-1)^2 = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

Luego el rango es menor que 3, con lo que $\boxed{\text{los vectores son linealmente dependientes si y sólo si } m = 1}$.

b) Para $m = 1$, expresa el vector $\vec{w}$ como combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. *(1 punto)*

Para dicho valor, son linealmente dependientes, con lo que cualquiera de ellos se puede escribir como combinación lineal del resto: $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$. Lo que equivale a:

$$(1, 2, 0) = x(1, 1, 1) + y(0, 1, -1) = (x, x+y, x-y) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x + y = 2 \Leftrightarrow y = 1 \\ x - y = 0 \Leftrightarrow y = 1 \end{cases}$$

El sistema tiene solución única, puesto que $x = 1$ con $y = 1$ verifican las tres igualdades, con lo que la combinación lineal es:

$$\boxed{(1, 2, 0) = (1, 1, 1) + (0, 1, -1)}$$

4) *(2007-1, Opc. B)* Considera el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} ax + y + z = 4 \\ x - ay + z = 1 \\ x + y + z = a + 2 \end{array}\right\}$$

a) Clasifícalo y resuélvelo para el valor de $a$ que lo haga compatible indeterminado. *(2 puntos)*

Estudiamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la ampliada. Escribimos ésta última, cuyas tres primeras columnas formarían la primera:

$$A' = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a+2 \end{pmatrix}$$

Como $|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -a^2 + 1 + 1 + a - 1 - a = -a^2 + 1 = 0 \iff a = \pm 1$, se tiene que:

- Si $\underline{a \neq -1 \text{ y } a \neq 1}$: $|A| \neq 0 \Rightarrow r(A) = 3 \Rightarrow r(A') = 3$ (no puede ser mayor, porque no hay más filas) $\Rightarrow$ el sistema es $\boxed{\text{compatible determinado}}$, con solución única.
- Si $\underline{a = 1}$: $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 - F_1]{F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, que está triangularizada. La tercera ecuación sería imposible: $0 = -1$, por lo que el sistema es $\boxed{\text{incompatible}}$.
- Si $\underline{a = -1}$: $A' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, y la fila 3 puede eliminarse, por ser igual a la 2 (es decir, es combinación lineal de las otras: $0F_1 + 1F_2$). De las dos filas restantes, el menor $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow r(A) = r(A') = 2 \Rightarrow$ el sistema resulta ser $\boxed{\text{compatible indeterminado}}$, con infinitas soluciones.
  Nos piden resolverlo. Lo triangularizamos, para hacerlo por Gauss:
  $$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - F_1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$
  Llamamos $z = t$:
  <u>2ª ec</u>: $2x = -3 \Rightarrow x = -3/2$
  <u>1ª ec</u>: $-x + y = 4 - t \Rightarrow y = 4 - t - 3/2 = 5/2 - t$
  Las soluciones tienen la estructura: $\boxed{\left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2} - t, t\right)}$.

b) Resuelve el sistema que se obtiene para $a = -2$. *(1 punto)*
Según la clasificación anterior, el sistema es compatible determinado y tendrá solución única. La matriz ampliada:

$$A' = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Triangularizamos:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 - F_1]{F_2 - F_1} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

que está triangularizado.

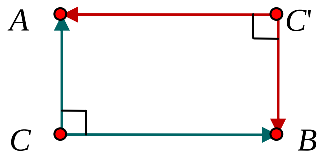
3ª ec: $3x = -4 \Rightarrow x = -4/3$
2ª ec: $-4 + y = -3 \Rightarrow y = 1$
1ª ec: $\frac{8}{3} + 1 + z = 4 \Rightarrow z = 4 - 1 - \frac{8}{3} = \frac{1}{3}$

Solución: $\boxed{\left(-\frac{4}{3}, 1, \frac{1}{3}\right)}$

5) *(2007-2, Opc. B)* Considera los puntos $A(0, 3, -1)$, $B(0, 1, 5)$ y $C(x, 4, 3)$

a) Calcula los valores de $x$ sabiendo que el triángulo $ABC$ tiene un ángulo recto en $C$. *(1 punto)*

Tiene que ser $\overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$
Como:



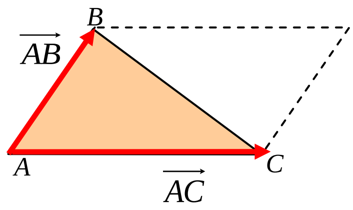

$$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} = (0, 3, -1) - (x, 4, 3) = (-x, -1, -4)$$
$$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = (0, 1, 5) - (x, 4, 3) = (-x, -3, 2)$$

se tiene: $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = (-x, -1, -4)\cdot(-x, -3, 2) = x^2 + 3 - 8 = x^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = \pm\sqrt{5}}$
(hay dos soluciones, como se aprecia en el gráfico).

b) Calcula el área del triángulo $ABC$ para $x = 0$. *(1 punto)*

El área de un triángulo $ABC$ es la mitad del área del tetraedro que se forma con el simétrico de $A$ respecto del segmento que une $B$ con $C$:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (0, 1, 5) - (0, 3, -1) = (0, -2, 6)$$
$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (0, 4, 3) - (0, 3, -1) = (0, 1, 4).$$




$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (0, -2, 6) \times (0, 1, 4) =$$
$$\left( \begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-14, 0, 0)$$

$$S = \frac{1}{2}\,|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\,|(-14, 0, 0)| = \frac{1}{2}\sqrt{14^2 + 0^2 + 0^2} = \frac{1}{2}14 = \boxed{7\ u^2}$$

NOMBRE: ____________________________________________

**Instrucciones**: **1)** Todos los **folios** deben tener el **nombre** y estar **numerados** en la parte superior. **2)** Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. **3)** No se puede usar **corrector ni lápiz**. Se aconseja no usar borrador. **4)** Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar** la respuesta a una pregunta con las de otras.

ALUMNOS CON LA 1ª Y 2ª EVALUACIÓN APROBADA

1) *(2012-3, Opc. B)* Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, sea $B$ la matriz que verifica que $AB = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$.
   a) Comprueba que las matrices $A$ y $B$ poseen inversas. *(1 punto)*
   b) Resuelve la ecuación matricial $A^{-1}X - B = BA$. *(1,5 puntos)*
2) *(2014-1, Opc. B)* Considera el siguiente sistema de ecuaciones
$$\left.\begin{array}{r} mx - 2y + z = 1 \\ x - 2my + z = -2 \\ x - 2y + mz = 1 \end{array}\right\}$$
   a) Discute el sistema según los valores del parámetro $m$. *(1,5 puntos)*
   b) Si es posible, resuelve el sistema para $m = -2$. *(1 punto)*
3) *(2012-3, Opc. B)* Encuentra *los* puntos de la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{4} = \dfrac{2-y}{2} = z-3$ cuya distancia al plano $\pi \equiv x - 2y + 2z = 1$ vale cuatro unidades. *(2,5 puntos)*
4) *(2014-1, Opc. B)* Considera el plano $\pi$ de ecuación $2x + y - z + 2 = 0$, y la recta $r$ de ecuación:
$$\frac{x-5}{-2} = y = \frac{z-6}{-3}$$
   a) Determina la posición relativa de $\pi$ y $r$. *(0,5 puntos)*
   b) Halla la ecuación general del plano que contiene a $r$ y es perpendicular a $\pi$. *(1 punto)*
   c) Halla las ecuaciones paramétricas del plano paralelo a $\pi$ que contiene a $r$. *(1 punto)*

Enlace 1 a las soluciones
Enlace 2 a las soluciones

NOMBRE: ______________________________________________________________

**Instrucciones**: **1)** Todos los **folios** deben tener el **nombre** y estar **numerados** en la parte superior. **2)** Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. **3)** No se puede usar **corrector ni lápiz**. Se aconseja no usar borrador. **4)** Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar** la respuesta a una pregunta con las de otras.

ALUMNOS CON LA 1ª Y 2ª EVALUACIÓN SUSPENDIDA

1) *(2012-3, Opc. B)* Sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \ln(x^2 + 3x + 3) - x$ donde ln denota la función logaritmo neperiano.
   a) Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de $f$ (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan). *(1,5 puntos)*
   b) Determina la ecuación de la recta normal a la gráfica de $f$ en el punto de abscisa $x = -2$. *(1 punto)*
2) *(2012-3, Opc. B)* Calcula los valores de $a$ y $b$ sabiendo que la función $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + b\ln(x)$, donde ln denota la función logaritmo neperiano, tiene un extremo relativo en $x = 1$ y que

$$\int_1^4 f(x)dx = 27 - 8\ln(4)$$ *(2,5 puntos)*

3) *(2012-3, Opc. B)* Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, sea $B$ la matriz que verifica que $AB = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$.
   a) Comprueba que las matrices $A$ y $B$ poseen inversas. *(1 punto)*
   b) Resuelve la ecuación matricial $A^{-1}X - B = BA$. *(1,5 puntos)*
4) *(2012-3, Opc. B)* Encuentra *los* puntos de la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{4} = \dfrac{2-y}{2} = z-3$ cuya distancia al plano $\pi \equiv x - 2y + 2z = 1$ vale cuatro unidades. *(2,5 puntos)*

Enlace a las soluciones

NOMBRE: ____________________________________________________________

**Instrucciones**: **1)** Todos los **folios** deben tener el **nombre** y estar **numerados** en la parte superior. **2)** Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. **3)** No se puede usar **corrector ni lápiz**. Se aconseja no usar borrador. **4)** Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar** la respuesta a una pregunta con las de otras.

*(Septiembre 2012)*

**Ejercicio 1.-** Sea la función $f$ definida por $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{1-x}$ para $x \neq 1$.

**(a) [1'25 puntos]** Estudia las asíntotas de la gráfica de la función $f$.
**(b) [1'25 puntos]** Halla los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f$.

**Ejercicio 2.-** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \dfrac{9-x^2}{4}$

**(a) [0'75 puntos]** Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f$ en el punto de abscisa $x = 1$.
**(b) [1'75 puntos]** Esboza el recinto limitado por la gráfica de $f$, la recta $x+2y = 5$ y el eje de abscisas. Calcula el área de dicho recinto.

**Ejercicio 3.-** Considera el sistema de ecuaciones con tres incógnitas

$$\begin{cases} x - y = \lambda \\ 2\lambda y + \lambda z = \lambda \\ -x - y + \lambda z = 0 \end{cases}$$

**(a) [1'25 puntos]** Clasifícalo según los distintos valores del parámetro $\lambda$.
**(b) [1'25 puntos]** Resuélvelo para $\lambda = 0$ y $\lambda = -1$.

**Ejercicio 4.- [2'5 puntos]** Halla el punto simétrico de $P(2, 1, -5)$ respecto de la recta $r$ definida por

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ x + y + 2 = 0 \end{cases}$$

## SOLUCIONES

**CRITERIOS GENERALES.** Los criterios esenciales de valoración de un ejercicio serán el planteamiento razonado y la ejecución técnica del mismo. La mera descripción del planteamiento sin la resolución efectiva no es suficiente para obtener una valoración completa del ejercicio. También se tendrá en cuenta lo siguiente:

- En los ejercicios en los que se pida expresamente una deducción razonada, la mera aplicación de una fórmula no será suficiente para obtener una valoración completa de los mismos.
- Los estudiantes pueden utilizar calculadoras; no obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente razonados.
- Los errores cometidos en un apartado, por ejemplo en el cálculo del valor de un cierto parámetro, no se tendrán en cuenta en la calificación de los apartados posteriores que puedan verse afectados, siempre que resulten ser de una complejidad equivalente.
- Los errores no conceptuales en las operaciones se penalizarán con un máximo del 10% de la nota total del ejercicio; de igual manera se penalizará la redacción incorrecta y el uso incorrecto de símbolos.
- La presentación clara y ordenada del ejercicio se valorará positivamente.
- Si se realizan ejercicios de las dos opciones, sólo se evaluarán los ejercicios de la misma opción que el primero que aparezca físicamente en el papel de examen.

**CRITERIOS ESPECÍFICOS PARA ESTE MODELO.** La evaluación se realizará según el desglose de las puntuaciones que se hace a continuación. Si algún apartado no se menciona específicamente, su puntuación es la que figura en el enunciado del ejercicio correspondiente. Cuando se dice: **"x puntos por A"**, hay que interpretar que se deben conceder x puntos si lo que se dice en la frase A está hecho o estudiado correctamente, incluyendo, si así se pide en el enunciado, la justificación oportuna.

**Ejercicio 1.- (a)** Hasta 0'25 por la asíntota vertical. Hasta 0'5 puntos por el estudio en más infinito.
**(b)** Hasta 0'5 puntos por el cálculo de la derivada. Hasta 0'5 puntos por determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento.
**Ejercicio 2.- (a)** Hasta 0'5 puntos por determinar la pendiente de la recta tangente.
**(b)** Hasta 0'25 puntos por el esbozo. Hasta 1 punto por expresar el área en términos de integrales.
**Ejercicio 3.- (a)** Hasta 0'5 puntos por encontrar los valores críticos. Hasta 0'25 puntos por el caso compatible determinado.
**(b)** Hasta 0'75 puntos por la resolución en el caso $\lambda = -1$.
**Ejercicio 4.-** Hasta 1'25 puntos por el planteamiento.

**Ejercicio 1.-** Sea la función $f$ definida por $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{1-x}$ para $x \neq 1$.

**(a) [1'25 puntos]** Estudia las asíntotas de la gráfica de la función $f$.

- Asíntotas verticales: Sólo puede tenerlas en $x = 1$, que es la única discontinuidad:

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^{-x}}{1-x} = \left(\frac{e^{-1}}{0}\right) = \infty \Rightarrow \boxed{\text{La recta } x = 1 \text{ es asíntota vertical}}.$$

  No hay que estudiar los límites laterales, salvo que se quiera clasificar la discontinuidad, y eso no se nos pide. Tampoco es necesario si quisiéramos dibujar la gráfica, porque la monotonía nos daría esa información.

- Asíntotas horizontales: El comportamiento de la exponencial difiere en $-\infty$ y en $+\infty$, por lo que los estudiamos por separado:

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{e^{-x}}{1-x} = \left(\frac{e^{+\infty}}{+\infty} = \frac{+\infty}{+\infty}\right) = \lim_{x\to -\infty}\frac{-e^{-x}}{-1} = +\infty \Rightarrow \text{No tiene si } x \to -\infty$$

  Se ha aplicado L'Hôpital, que puede hacerse al tener en el numerador y en el denominador funciones derivables en todo R.

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{e^{-x}}{1-x} = \left(\frac{0}{-\infty}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{\text{La recta } y = 0 \text{ es asíntota horizontal en } +\infty}.$$

- Asíntota oblicua: Sólo podría tenerla si $x \to -\infty$, pues si tratásemos de calcularla por el otro lado, obtendríamos la horizontal que ya conocemos.

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{e^{-x}}{1-x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{x-x^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}, \text{L'Hôpital}\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-e^{-x}}{1-2x} = \left(\frac{\infty}{\infty}, \text{L'Hôpital}\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{-2} = \infty \Rightarrow \boxed{\text{No tiene asíntotas oblicuas}}.$$

**(b) [1'25 puntos]** Halla los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*.

$$f'(x) = \frac{-e^{-x}(1-x)+e^{-x}}{(1-x)^2} = \frac{xe^{-x}}{(1-x)^2}$$

- Discontinuidades de $f$ ó de $f'$: $x = 1$.
- $f'(x) = 0$: $x \neq 1$ y $xe^{-x} = 0 \Rightarrow x = 0$ ó $e^{-x} = 0$, que no puede ser.

| | $(-\infty, 0)$ | 0 | $(0, 1)$ | 1 | $(1, +\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | – | 0 | – | ∄ | + |
| $f$ | ↘ | mín | ↗ | ∄ | ↗ |

Tiene un mínimo relativo en $(0, 1)$, pues $f(0) = 1$, es decreciente en $(-\infty, 0)$ y creciente en $(0, 1)$ y en $(1, +\infty)$.

**Ejercicio 2.-** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \dfrac{9-x^2}{4}$

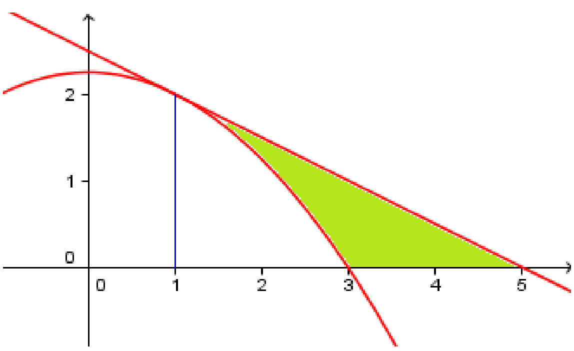
**(a) [0'75 puntos]** Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f$ en el punto de abscisa $x = 1$.

$$f'(x) = -x/2$$

- Punto de tangencia: $f(1) = 2$: $(1, 2)$.
- Pendiente de la tangente: $m = f'(1) = -1/2$.
- Ecuación: $y - 2 = -0.5(x - 1) \Rightarrow \boxed{x + 2y - 5 = 0}$.

**(b) [1'75 puntos]** Esboza el recinto limitado por la gráfica de $f$, la recta $x+2y = 5$ y el eje de abscisas. Calcula el área de dicho recinto.

- $x + 2y = 5$ es una recta, y sólo requiere una pequeña tabla de valores. Además, la recta que trabajamos es la pendiente que resulta en el apartado anterior.
- $f$ es una parábola cóncava, pues el coeficiente de la máxima potencia es negativo: –1/4. Sus características son:
  - Eje: $x = -b/2a \Rightarrow x = 0$.
  - Vértice: $(0, 9/4)$.
  - Cortes con los ejes:
    - $x = 0 \Rightarrow y = 9/4$: $(0, 9/4)$.
    - $y = 0 \Rightarrow 9 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$: $(-3, 0)$ y $(3, 0)$.
  - Algunos puntos adicionales: $(-1, 2)$, $(1, 2)$, $(-2, 1)$, $(2, 1)$.




Luego el recinto es el de la figura.

El recinto cuya área debemos calcular es el coloreado, y es el área del triángulo de base el segmento de 1 a 5 en el eje OX, y de altura 2 (el segmento sobre $x = 1$), que vale $4 \cdot 2/2 = 4$, menos el área bajo la parábola entre $x = 1$ y $x = 3$:

$$A = 4 - \int_1^3 \frac{9-x^2}{4}\,dx = 4 - \left[\frac{9}{4}x - \frac{x^3}{12}\right]_1^3 = 4 - \left[\frac{9}{4}3 - \frac{27}{12} - \left(\frac{9}{4} - \frac{1}{12}\right)\right] = \boxed{\frac{5}{3}\ u^2}$$

**Ejercicio 3.-** Considera el sistema de ecuaciones con tres incógnitas

$$\begin{cases} x - y = \lambda \\ 2\lambda y + \lambda z = \lambda \\ -x - y + \lambda z = 0 \end{cases}$$

**(a) [1'25 puntos]** Clasifícalo según los distintos valores del parámetro $\lambda$.

La matriz ampliada es:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \lambda \\ 0 & 2\lambda & \lambda & \lambda \\ -1 & -1 & \lambda & 0 \end{pmatrix}$$

El determinante de la matriz de los coeficientes es:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2\lambda & \lambda \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = 2\lambda^2 + \lambda + \lambda = 2\lambda(\lambda + 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ó } \lambda = -1$$

Entonces:

- $\underline{\lambda \neq 0 \text{ y } \lambda \neq -1}$: $|A| \neq 0 \Rightarrow$ Como éste es un menor tanto de $A$ como de $A'$, se tiene que ambas tienen rango 3 (el orden de este menor). Si $r(A) = r(A') = 3$ = nº de incógnitas, tendremos un <u>sistema compatible determinado</u>.
- $\underline{\lambda = 0}$: Se tiene:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow r(A) = 2$ (vimos antes que no puede ser 3, porque para este valor teníamos $|A| = 0$). Orlamos este menor con la última columna de $A'$, para ver el rango de ésta, y el menor resultante vale 0, porque la última columna es de 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Luego el menor anterior, que también lo es de $A'$, es el de mayor orden que podemos encontrar en esta matriz, por lo que $r(A') = 2$.
Como $r(A) = r(A') <$ nº de incógnitas, es un <u>sistema compatible indeterminado</u>.

- $\underline{\lambda = -1}$:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$ y $|A| = 0 \Rightarrow r(A) = 2$. Orlamos dicho menor, que también lo es de $A'$, para ver el rango de ésta última:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 + 2 - 1 = 0$$

Como no hay ninguna otra posibilidad de orlar el menor no nulo de orden 2 que tenemos $\Rightarrow$ $r(A') = 2$. Al coincidir los rangos y ser menor que el número de incógnitas, es un sistema compatible indeterminado.

**(b) [1'25 puntos]** Resuélvelo para $\lambda = 0$ y $\lambda = -1$.

- $\lambda = 0$: $A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3+F_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Eliminamos la fila 2:

  $\begin{cases} x - y = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 0$. Sobre $z$ no hay ninguna condición, por lo que su valor es libremente elegido por nosotros, de modo que las infinitas soluciones tienen la forma: $\boxed{(0, 0, t)}$.

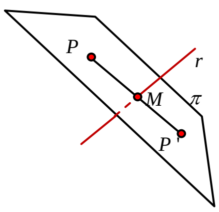
  La forma de este sistema, triangularizado, es especial. Estaría triangularizado antes de la transformación de filas que hemos hecho. Pero cuando una columna es completa de 0, dicha incógnita queda libre: puede tomar cualquier valor, porque no influye en que las ecuaciones dejen de ser ciertas, al multiplicar por 0 dicho valor en cada ecuación. Hemos de resolver el sistema que queda con las restantes incógnitas y añadir este valor de forma libremente elegida por nosotros.

- $\lambda = -1$: $A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3+F_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-F_2}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  Llamamos $y = t$.
  2ª ec: $-2t - z = -1 \Rightarrow z = 1 - 2t$
  1ª ec: $x - t = -1 \Rightarrow x = -1 + t$
  Las infinitas soluciones tienen la forma: $\boxed{(-1 + t, t, 1 - 2t)}$.

**Ejercicio 4.- [2'5 puntos]** Halla el punto simétrico de $P(2, 1, -5)$ respecto de la recta $r$ definida por $\begin{cases} x - z = 0 \\ x + y + 2 = 0 \end{cases}$




Ponemos la recta en paramétricas, llamando $x = t$:

$$r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = -2 - t \\ z = t \end{cases}$$

de donde su vector de dirección es $\vec{d} = (1, -1, 1)$. Este vector es normal al plano π perpendicular a la recta $r$ que contiene a $P$, cuya ecuación es, pues:

$$1(x-2) - 1(y-1) + 1(z+5) = 0 \Leftrightarrow x - y + z + 4 = 0.$$

Calculamos el punto $M$ intersección de $\pi$ con $r$. Sustituyendo la forma de un punto general de $r$ en $\pi$:

$$t - (-2 - t) + t + 4 = 0 \Leftrightarrow 3t + 6 = 0 \Leftrightarrow t = -2$$

Llevando este valor a las paramétricas de $r$, tenemos que $M(-2, 0, -2)$.

Como $M$ es el punto medio entre $P(2, 1, -5)$ y su simétrico $P'(a, b, c)$:

$$\begin{cases} \dfrac{2+a}{2} = -2 \Rightarrow a = -6 \\ \dfrac{1+b}{2} = 0 \Rightarrow b = -1 \\ \dfrac{-5+c}{2} = -2 \Rightarrow c = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P'(-6, -1, 1)}.$$