NOMBRE: ____

Instrucciones: **1)** Todos los **folios** deben tener el **nombre** y estar **numerados** en la parte superior. **2)** Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. **3)** No se puede usar **corrector ni lápiz**, y el bolígrafo debe ser de **tinta indeleble**. Se aconseja no usar borrador. **4)** Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar** la respuesta a una pregunta con las de otras. **5)** **<u>Desatender las instrucciones puede penalizarse con hasta 1 punto</u>** <u>o la</u> **<u>anulación</u>** en caso de usar tinta corregible.

1) Sea r la recta que pasa por los puntos $A(1, 1, 0)$ y $B(3,-1, 1)$ y s la recta dada por:

$$\begin{cases} x+2y=-1 \\ y+z=-1 \end{cases}$$

   a) Hallar la ecuación general del plano que pasa por el origen de coordenadas y es paralelo a las rectas dadas. *(1,2 puntos)*
   b) Hallar unas ecuaciones paramétricas del plano que pasa por B y es perpendicular a s. *(1,3 puntos)*

2) Considerar el plano π de ecuación $6x - my + 2z = 1$ y la recta r dada por:

$$\frac{x-1}{-3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+2}{-1}$$

   a) Calcular m en el caso en que la recta r es perpendicular al plano π. *(1 punto)*
   b) ¿Existe algún valor de m para el que la recta r esté contenida en el plano π? *(1,5 puntos)*

3) Considerar el punto $A(1, -1, 1)$ y la recta r dada por $\begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=1 \end{cases}$

   a) Calcular las coordenadas del punto simétrico de A respecto a r. *(1,5 puntos)*
   b) Determinar la ecuación del plano que contiene a r y pasa por A. *(1 punto)*

4) Dadas las rectas $r \equiv \dfrac{x+3}{-6}=\dfrac{y-9}{4}=\dfrac{z-8}{4}$ y $s \equiv \dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y-9}{-2}=\dfrac{z-8}{-2}$.

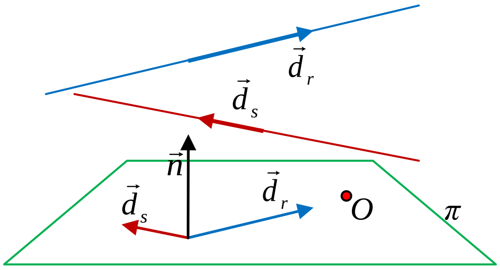
   a) Determinar la posición relativa de las rectas r y s. *(1 punto)*
   b) Calcular la distancia entre r y s. *(1,5 puntos)*

SOLUCIONES

1) Sea r la recta que pasa por los puntos $A(1, 1, 0)$ y $B(3,-1, 1)$ y s la recta dada por:

$$\begin{cases} x+2y=-1 \\ y+z=-1 \end{cases}$$

a) Hallar la ecuación general del plano que pasa por el origen de coordenadas y es paralelo a las rectas dadas. *(1,2 puntos)*



Si el plano π es paralelo a las dos rectas, sus respectivos vectores de dirección serán, también, vectores de dirección del plano π. Dichos vectores son:

$$\vec{d}_r = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} =$$
$$= (3, -1, 1) - (1, 1, 0) = (2, -2, 1)$$

Para hallar el de s, pasamos ésta a paramétricas. Basta, para ello, llamar $y = t$ y despejar en cada uno de los planos que determinan s:

$$\begin{cases} x=-1-2t \\ y= \quad\quad t \\ z=-1-t \end{cases} \Rightarrow \vec{d}_s = (-2, 1, -1)$$

Notar que los vectores de dirección obtenidos no son proporcionales, por lo que las dos rectas se cruzan o se cortan y el problema, por tanto, tiene solución única. Por tanto, un vector normal a π será:

$$\vec{n}_\pi = \vec{d}_r \text{x} \vec{d}_s = (2, -2, 1)\text{x}(-2, 1, -1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1, 0, -2).$$

Y como $(0, 0, 0) \in \pi$:

$$\pi \equiv 1(x-0) + 0(y-0) - 2(z-0) = 0 \Leftrightarrow \boxed{x - 2z = 0}$$

b) Hallar unas ecuaciones paramétricas del plano que pasa por B y es perpendicular a s. *(1,3 puntos)*

Si $\pi' \perp s \Rightarrow \vec{n}_{\pi'} = \vec{d}_s = (-2, 1, -1)$. Como contiene a $B(3,-1, 1)$:

$$\pi' \equiv -2(x-3) + 1(y+1) - 1(z-1) = 0 \Leftrightarrow -2x + y - z + 6 + 1 + 1 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \pi' \equiv \boxed{-2x + y - z + 8 = 0}$$

Pero nos lo piden en paramétricas. Para conseguirlo, basta llamar $x = \lambda$, $y = \mu$ (conviene usar x con otra de las variables, para evitar fracciones), con lo que:

$$\boxed{\pi' \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 8 - 2\lambda + \mu \end{cases}}$$

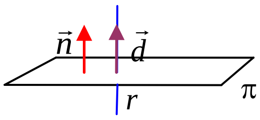
2) Considerar el plano π de ecuación $6x - my + 2z = 1$ y la recta r dada por:

$$\frac{x-1}{-3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{-1}$$

a) Calcular m en el caso en que la recta r es perpendicular al plano π. *(1 punto)*

En este caso, $\vec{d}$ y $\vec{n}$ son proporcionales. Como:

$\vec{d} = (-3, 2, -1)$ y $\vec{n} = (6, -m, 2)$

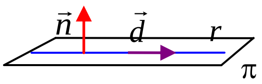


Bastará exigir:

$$\frac{6}{-3} = \frac{-m}{2} = \frac{2}{-1} \Leftrightarrow \boxed{m = 4}$$

Para dicho valor, se verifican las tres igualdades.

b) ¿Existe algún valor de m para el que la recta r esté contenida en el plano π? *(1,5 puntos)*

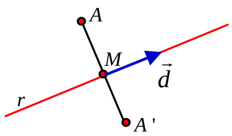


Para empezar, $\vec{d} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{d} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow (-3, 2, -1) \cdot (6, -m, 2) = 0 \Leftrightarrow -18 - 2m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = -10$.

Pero, además, todos los puntos de r deben estar en π. En particular, el punto que se obtiene de la ecuación continua que nos dan: $(1, -1, -2)$. Siendo $m = -10$, quedaría $\pi \equiv 6x + 10y + 2z = 1$, por lo que sustituyendo el punto en esta ecuación: $6 - 10 - 4 = 1 \Leftrightarrow -8 = 1$, que no es cierto, por lo que el punto no verifica la ecuación del plano. Por tanto, el plano que así se obtiene es paralelo a la recta, de modo que $\boxed{\text{no hay posibilidad de que } r \subset \pi}$.

3) Considerar el punto $A(1, -1, 1)$ y la recta r dada por $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 \end{cases}$

a) Calcular las coordenadas del punto simétrico de A respecto a r. *(1,5 puntos)*



Hallemos el punto M de r más próximo a A. O sea, tal que $\overrightarrow{MA} \perp r$. Un punto genérico de r es, según se deduce de las ecuaciones paramétricas, $M(1 + 2\lambda, 1 - \lambda, 1)$. Por tanto:

$$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM} = (1, -1, 1) - (1 + 2\lambda, 1 - \lambda, 1) =$$
$$= (-2\lambda, -2 + \lambda, 0)$$

Además, siendo un vector de dirección de la recta $\vec{d} = (2, -1, 0)$, lo que se deduce de sus ecuaciones paramétricas, se tiene:

$$\overrightarrow{MA} \perp r \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \perp \vec{d} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \vec{d} = 0 \Leftrightarrow -4\lambda + 2 - \lambda + 0 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -5\lambda = -2 \Leftrightarrow \lambda = 2/5$$

Por consiguiente, $M(9/5, 3/5, 1)$.

El simétrico de A respecto r es el mismo que el de A respecto M. Si llamamos $A'(a, b, c)$ al simétrico, M será el punto medio del segmento AA', por lo que se tiene:

$$\begin{cases} \dfrac{1+a}{2} = \dfrac{9}{5} \Rightarrow 5 + 5a = 18 \Rightarrow 5a = 13 \Rightarrow a = \dfrac{13}{5} \\ \dfrac{-1+b}{2} = \dfrac{3}{5} \Rightarrow -5 + 5b = 6 \Rightarrow 5b = 11 \Rightarrow b = \dfrac{11}{5} \\ \dfrac{1+c}{2} = 1 \Rightarrow 1 + c = 2 \Rightarrow c = 1 \end{cases}$$

En definitiva, $\boxed{A'\left(\frac{13}{5}, \frac{11}{5}, 1\right)}$.

b) Determinar la ecuación del plano que contiene a r y pasa por A. *(1 punto)*

Pasamos r a forma implícita. Para ello, pasamos por la forma continua. Despejando λ en las paramétricas e igualando:

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{-1} \\ z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 3 = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases}$$

Todos los planos que contienen a r son los del haz de planos, que, salvo uno ($z - 1 = 0$), son de la forma:

$$(x + 2y - 3) + t(z - 1) = 0$$

Obligamos a que contengan a $A(1, -1, 1)$:

$$1 - 2 - 3 + 0 = 0 \Leftrightarrow -4 = 0$$

que no se obtiene para ningún valor de t. Luego ninguno de esos planos contiene a A. De modo que debe ser el que quedaba, o sea, $z - 1 = 0$. En efecto:

$$1 - 1 = 0$$

Lo que significa que este plano contiene a la recta r y a A. El plano buscado es:

$$\boxed{z - 1 = 0}$$

4) Dadas las rectas $r \equiv \dfrac{x+3}{-6} = \dfrac{y-9}{4} = \dfrac{z-8}{4}$ y $s \equiv \dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-9}{-2} = \dfrac{z-8}{-2}$.

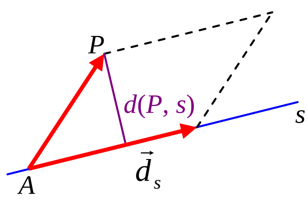
a) Determinar la posición relativa de las rectas r y s. *(1 punto)*

$\vec{d}_r = -2\vec{d}_s \Rightarrow$ Las rectas son paralelas o coincidentes, pues llevan la misma dirección. Si sustituimos el punto $P(-3, 9, 8) \in r$ en la ecuación de s:

$$\frac{-3-3}{3} = \frac{9-9}{-2} = \frac{8-8}{-2}$$

no es cierto, porque la primera expresión es no nula, a diferencia de las otras dos. Por tanto, el punto no está en s. Si llevan la misma dirección pero hay puntos que no están en ambas, $\boxed{\text{son paralelas}}$.

b) Calcular la distancia entre r y s. *(1,5 puntos)*



Siendo $P(-3, 9, 8) \in r$, como las rectas son paralelas $\Rightarrow d(r, s) = d(P, s)$. Tomando un punto cualquiera $A \in s$, por ejemplo $A(3, 9, 8)$, se tiene:

$$d(P, s) = \frac{\text{Área del paralelogramo}}{\text{base}} = \frac{|\vec{d}_s \text{ x } \overrightarrow{AP}|}{|\vec{d}_s|}$$

Por un lado, $\vec{d}_s = (3, -2, -2)$. Por otro, $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = (-3, 9, 8) - (3, 9, 8) = (-6, 0, 0)$. Por tanto:

$$\vec{d}_s \text{ x } \overrightarrow{AP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & -2 \\ -6 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, 12, -12) \Rightarrow |\vec{d}_s \text{ x } \overrightarrow{AP}| = \sqrt{0+144+144} = 12\sqrt{2}$$

Y como $|\vec{d}_s| = \sqrt{9+4+4} = \sqrt{17}$, se tiene:

$$\boxed{d(P, s) = \frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{17}} \ u}$$

NOMBRE: ____

Instrucciones: **1)** Todos los **folios** deben tener el **nombre** y estar **numerados** en la parte superior. **2)** Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. **3)** No se puede usar **corrector ni lápiz**, y el bolígrafo debe ser de **tinta indeleble**. Se aconseja no usar borrador. **4)** Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar** la respuesta a una pregunta con las de otras. **5)** **Desatender las instrucciones puede penalizarse con hasta 1 punto** o la **anulación** en caso de usar tinta corregible.

1) Se sabe que la función f: $[0, 5] \to \mathbb{R}$ es derivable en $(0, 5)$, estando definida por:

$$f(x) = \begin{cases} ax + bx^2 & \text{si} \quad 0 \le x < 2 \\ -4 + \sqrt{x-1} & \text{si} \quad 2 \le x \le 5 \end{cases}$$

   a) Calcular las constantes a y b comprobando que, en efecto, es derivable en todo su dominio. *(1'7 puntos)*

   b) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$ cuando $a = -\dfrac{7}{2}$, $b = 1$. *(0,8 puntos)*

2) Sean las funciones f y g: $[0, +\infty) \to \mathbb{R}$, dadas por $f(x) = x^2$ y $g(x) = \lambda\sqrt{x}$, donde λ es un número real positivo fijo. Calcular el valor de λ sabiendo que el área del recinto limitado por las gráficas de ambas funciones es $\dfrac{1}{3}$. *(2,5 puntos)*

3) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & t+1 & t-1 \\ -2t-1 & 0 & t+3 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

   a) Calcular el rango de A según los diferentes valores de t. *(1,7 puntos)*

   b) Razonar para qué valores de t el sistema homogéneo $AX = O$ tiene más de una solución. *(0,8 puntos)*

4) Dados el punto $P(1, 1, -1)$ y la recta r de ecuaciones $\begin{cases} x + z = 1 \\ y + z = 0 \end{cases}$,

   a) Hallar la ecuación del plano que contiene a r y pasa por P. *(1 punto)*

   b) Hallar la ecuación de la recta contenida en el plano de ecuación $y + z = 0$, que es perpendicular a r y pasa por P. *(1,5 puntos)*

SOLUCIONES

1) Se sabe que la función f: $[0, 5] \to R$ es derivable en (0, 5), estando definida por:

$$f(x) = \begin{cases} ax+bx^2 & \text{si} \quad 0 \le x < 2 \\ -4+\sqrt{x-1} & \text{si} \quad 2 \le x \le 5 \end{cases}$$

a) Calcular las constantes a y b comprobando que, en efecto, es derivable en todo su dominio. *(1'7 puntos)*

Si es derivable, es continua. Exijamos que lo sea:

- En [0, 2), lo es por ser polinómica, independientemente de los valores de a y de b.
- En (2, 5], está definida por una función elemental, las cuales son continuas en su dominio. El de ésta es: $x - 1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 1$, y todos los valores del intervalo verifican esto. Luego es continua.
- En $x = 2$: 1) $\exists f(2) = -4+\sqrt{1} = -3$; 2) $\lim\limits_{x\to 2^-}(ax+bx^2) = 2a + 4b$; $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(-4+\sqrt{x-1}\right) = -4+\sqrt{1} = -3$. Como sabemos que es continua, se verificará: $\boxed{2a + 4b = -3}$. (1)

Pasamos a derivar la función:

$$f'(x) = \begin{cases} a+2bx & \text{si} \quad 0 < x < 2 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} & \text{si} \quad 2 < x < 5 \end{cases}$$

Se tiene que $y = a + 2bx$ da imagen $\forall x$; $y = \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$ existe si $x > 1$, y todos los puntos de (2, 5) verifican esto. Por tanto, la función es derivable en $(0, 2) \cup (2, 5)$. Como $f'(2^-) = a + 4b$; $f'(2^+) = \dfrac{1}{2}$, siendo derivable también en $x = 2$, estos valores coinciden $\Rightarrow a + 4b = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \boxed{2a + 8b = 1}$. (2)

Resolvemos el sistema formado por las condiciones (1) y (2). Despejando $2a$ en ambas e igualando: $-4b - 3 = 1 - 8b \Rightarrow 4b = 4 \Rightarrow \boxed{b = 1}$.
Sustituyendo en (1): $2a + 4 = -3 \Rightarrow 2a = -7 \Rightarrow \boxed{a = -7/2}$.

Luego $\boxed{a = -\dfrac{7}{2},\ b = 1}$.

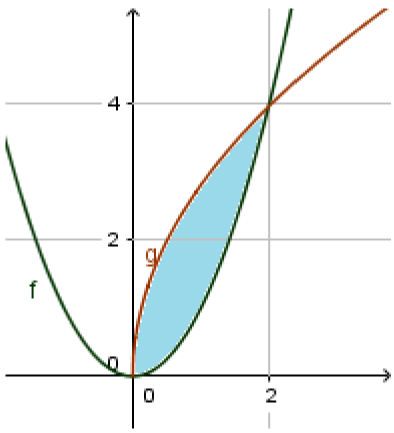
b) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$ cuando $a = -\dfrac{7}{2}$, $b = 1$. *(0,8 puntos)*

Según lo anterior, para estos valores $f'(2) = -\dfrac{7}{2} + 4 = \dfrac{1}{2}$. Además, $f(2) = -4+\sqrt{1} = -3$. Por tanto:

- Punto de tangencia: (2, –3).
- Pendiente de la tangente: $m = f'(2) = ½$.

- Ecuación de la tangente: $y + 3 = \frac{1}{2}(x - 2) \Leftrightarrow \boxed{x - 2y - 8 = 0}$.

2) Sean las funciones f y g: $[0, +\infty) \to \mathbb{R}$, dadas por $f(x) = x^2$ y $g(x) = \lambda\sqrt{x}$, donde λ es un número real positivo fijo. Calcular el valor de λ sabiendo que el área del recinto limitado por las gráficas de ambas funciones es $\frac{1}{3}$. *(2,5 puntos)*



$f(x) = x^2$ es la parábola estándar. Si nos limitamos a $x \geq 0$, la función $y = \sqrt{x}$ es su función inversa, y es simétrica de la anterior respecto de $y = x$. Multiplicándola por $\lambda > 0$, se alargará o contraerá verticalmente. Por tanto, la gráfica debe ser similar a la que adjuntamos.

El punto de intersección de ambas es:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = \lambda\sqrt{x} \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 = \lambda\sqrt{x} \Rightarrow x^4 = \lambda^2 x \Rightarrow$$

$$x^4 - \lambda^2 x = 0 \Rightarrow x(x^3 - \lambda^2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ ó } x^3 - \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ó } x = \sqrt[3]{\lambda^2}$$

De donde el área entre las curvas vale:

$$A = \int_0^{\sqrt[3]{\lambda^2}} (\lambda\sqrt{x} - x^2)dx = \int_0^{\sqrt[3]{\lambda^2}} (\lambda x^{1/2} - x^2)dx = \left[\lambda\frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\lambda^{2/3}} =$$

$$= \left(\lambda\frac{2}{3}\left(\lambda^{2/3}\right)^{3/2} - \frac{(\lambda^{2/3})^3}{3}\right) - 0 = \lambda\frac{2}{3}\lambda - \frac{\lambda^2}{3} = \frac{1}{3}\lambda^2$$

Como el área tiene que ser 1/3:

$$\frac{1}{3}\lambda^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$$

Pero sabemos que $\lambda > 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = 1}$.

3) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & t+1 & t-1 \\ -2t-1 & 0 & t+3 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

a) Calcular el rango de A según los diferentes valores de t. *(1,7 puntos)*

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & t+1 & t-1 \\ -2t-1 & 0 & t+3 \end{vmatrix} = (t + 1)(t + 3) + (t - 1)(-2t - 1) - 2(t + 3) =$$

$$= t^2 + 3t + t + 3 - 2t^2 - t + 2t + 1 - 2t - 6 = -t^2 + 3t - 2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Rightarrow t = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \left\langle \begin{array}{l} = 1 \\ = 2 \end{array}\right.$$

Por tanto:

- $\underline{t \neq 1 \text{ y } t \neq 2}$: $|A| \neq 0 \Rightarrow \underline{r(A) = 3}$.

- $\underline{t=1}$: $|A| = 0$, y $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Como un menor formado por las filas 1 y 3 con las columnas 1 y 2 es: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \underline{r(A) = 2}$.
- $\underline{t=2}$: $|A| = 0$, y $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, donde cruzando las dos primeras filas con las dos primeras columnas obtenemos el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ $\underline{r(A) = 2}$.

b) Razonar para qué valores de t el sistema homogéneo $AX = O$ tiene más de una solución. *(0,8 puntos)*

En un sistema *homogéneo* la última columna de la matriz ampliada es nula (definición de *sistema homogéneo*), por lo que es irrelevante para el cálculo del rango. De este modo, $r(A) = r(A')$, y el sistema siempre es *compatible*.
Cuando el valor de estos rangos es 3, será *compatible determinado* por el *Teorema de Rouché-Fröbenius*, y la solución única es $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, que es siempre solución en un sistema *homogéneo*. Entonces, si $r(A) < 3$ el sistema es *compatible indeterminado* y tendrá infinitas soluciones.
En definitiva, en virtud de lo estudiado anteriormente, el sistema tiene más de una solución (infinitas) si, y solo si $\boxed{t = 1 \text{ ó } t = 2}$.

4) Dados el punto $P(1, 1, -1)$ y la recta r de ecuaciones $\begin{cases} x + z = 1 \\ y + z = 0 \end{cases}$,

a) Hallar la ecuación del plano que contiene a r y pasa por P. *(1 punto)*

Si contiene a r, el plano buscado es uno de los del *haz de planos* de base r. Concretamente, el buscado es el que contiene a P. El *haz* es:

$$(x + z - 1) + t(y + z) = 0$$

Obligamos a que contenga a P:

$$1 - 1 - 1 + t(1 - 1) = 0 \Leftrightarrow -1 = 0$$

Por lo que no es ninguno de estos. Luego no puede ser más que el que no obedece a la estructura general del *haz* anterior, que es $y + z = 0$. En efecto, P verifica esta ecuación. Así que el plano buscado es: $\boxed{y + z = 0}$.

b) Hallar la ecuación de la recta contenida en el plano de ecuación $y + z = 0$, que es perpendicular a r y pasa por P. *(1,5 puntos)*

El plano que nos dan contiene a P. Luego el problema tiene solución y tenemos ya un plano que contiene a la recta pedida.
Si dicha recta, a la que llamaremos s, es perpendicular a r, estará contenida en un plano perpendicular a r. De todos los planos perpendiculares a r, estará contenida en el plano π que contiene a P, puesto que P está en la recta. Llamando $z = t$, despejando en cada una de sus dos ecuaciones, obtenemos las ecuaciones paramétricas de r, que son:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -t \\ z = t \end{cases}$$

Por tanto, el vector de dirección de r es $(-1, -1, 1)$. Este vector será normal al plano π. Por tanto, como $P(1, 1, -1)$ este plano es:

$$-1(x-1) - 1(y-1) + 1(z+1) = 0 \Leftrightarrow -x - y + z + 1 + 1 + 1 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x + y - z - 3 = 0$$

Además de éste, tenemos otro plano que contiene a s. Por tanto, como intersección de dos planos:

$$\boxed{s \equiv \begin{cases} y + z = 0 \\ x + y - z - 3 = 0 \end{cases}}$$