EXAMEN RESUELTO

MATEMÁTICAS 1º BACH. C. N. Y S. 20 de Mayo de 2003

Análisis

1) Estudiar la continuidad de $f(x)$, dando el valor de a para que sea continua en $x = 1$ y clasificando las discontinuidades: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-2x}{x-2}, & \text{si } x<1\\ x^2+a, & \text{si } x\geq 1\end{cases}$ *(1 punto)*

2) Dar la ecuación de la recta tangente a $f(x) = x^2 - x$ paralela a $y = 3x-2$ *(1 punto)*

3) Calcular $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2+2}{2x+1}\right)^{\frac{x-4}{x-1}}$ *(1 punto)*

4) Derivar: $y=\ln\dfrac{(x-2)^3}{\sqrt{2x-1}}$ *(1 punto)*

5) Estudiar y dibujar la gráfica de $y=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$, comprobando previamente que sus derivadas son: $y'=\dfrac{x^3-3x^2}{(x-1)^3}$; $y''=\dfrac{6x}{(x-1)^4}$

Derivadas:	*1 punto*
Dominio, Par/Impar, Int. Ejes:	*0,5 puntos*
Asíntotas:	*1 punto*
Monotonía/Extr.relativos:	*1 punto*
Curvatura/P.Inflexión:	*1 punto*
Gráfica (tras estudio anterior):	*1,5 puntos*

SOLUCIONES

1) Todas las funciones habituales, es decir, las *algebraicas*, que son las polinómicas, racionales (cociente de polinomios) y las irracionales (raíces de polinomios), y las *transcendentes*, que son las exponenciales (base constante y exponente variable), logarítmicas y trigonométricas, son *continuas en su dominio*. También, la suma, resta, producto, cociente y combinaciones (composiciones) de funciones continuas son, a su vez, continuas en el dominio resultante.

Las funciones *definidas a trozos*, como la del enunciado, no figura entre las que hemos enumerado. Este tipo de funciones se define, normalmente, utilizando funciones habituales, con las que coincide en diferentes intervalos. El estudio de continuidad se hace estudiando la función con la que se define en cada intervalo, excluyendo de dichos intervalos los puntos que separan uno de otro, que se estudian por separado. Según esto, el estudio de la continuidad de la función que nos dan es como sigue:

- <u>Zona $(-\infty, 1)$</u>: Aquí, nuestra función f coincide con $y=\dfrac{x^2-2x}{x-2}$ que, al ser racional, es continua en su dominio, es decir, en $\mathbb{R}-\{2\}$. O sea, que en cualquier valor de x es continua, salvo en $x = 2$. Pero $2 \notin (-\infty, 1)$, es decir, que cuando $x = 2$ f no tiene nada que ver con $y=\dfrac{x^2-2x}{x-2}$, por lo que <u>f es continua en todos los puntos de $(-\infty, 1)$</u>.
- <u>Zona $(1, +\infty)$</u>: (Observar que $x = 1$ ha sido excluido de la zona, y se estudiará aparte). Aquí, f coincide con $y = x^2 + a$, que, al ser polinómica, es continua en su dominio, que es $\mathbb{R}$, independientemente de lo que valga a. De modo que <u>es continua en $(1, +\infty)$</u>, que es sólo una parte de $\mathbb{R}$.
- <u>$x = 1$</u>: Las tres condiciones que una función f debe cumplir para ser continua en $x = a$ son: 1) Que exista $f(a)$; 2) Que exista $\lim\limits_{x\to a} f(x)$; 3) Que ambos valores coincidan. Comprobémoslas para $x = 1$.

  En primer lugar, $\exists f(1) = 1 + a$, ya que cuando $x \geq 1$, $f(x) = x^2 + a$. Luego la primera condición se cumple, independientemente de lo que valga a.

En segundo lugar, para estudiar $\lim_{x\to 1} f(x)$ hemos de separar el análisis de dicho límite por la derecha y por la izquierda, ya que según por donde esté x, a la derecha o a la izquierda de 1, la definición de f es distinta. De modo que:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-2x}{x-2} = 1; \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \left(x^2+a\right) = 1+a$$

El límite completo existe si, y sólo si los dos límites laterales existen y coinciden. Luego para que exista $\lim_{x\to 1} f(x)$ debe cumplirse que $1 = 1+a \Leftrightarrow a = 0$.

Entonces, si $a = 0$, $\exists \lim_{x\to 1} f(x) = 1$. Y como $f(1) = 1+a = 1+0 = 1$ coincide con dicho resultado, se cumplirá también la tercera condición de continuidad, con lo que f será continua en $x = 1$.

En resumen, si $a = 0$, f es continua en las tres zonas, es decir, en todo R.

2) Buscamos una recta tangente a $f(x) = x^2 - x$ paralela a $y = 3x-2$, es decir, con pendiente 3. La pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en $x = a$ vale, según la *interpretación geométrica de la derivada*, $f'(a)$. Para saber el punto de tangencia $(a, f(a))$, buscamos a/ $f'(a) = 3$. Como $f'(x) = 2x-1$, lo anterior es: $2a - 1 = 3 \Leftrightarrow 2a = 4 \Leftrightarrow a = 2$. Como $f(2) = 4-2 = 2$, el punto de tangencia es $(2, 2)$. Conocido un punto de la recta tangente y su pendiente, usando la forma punto-pendiente, la ecuación de la tangente es: $y - 2 = 3(x-2) \Leftrightarrow y = 3x - 6 + 2 \Leftrightarrow y = 3x - 4$.

3) Si en $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2+2}{2x+1}\right)^{\frac{x-4}{x-1}}$ sustituimos x por 1, obtenemos la indeterminación 1^∞. Por tanto,

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2+2}{2x+1}\right)^{\frac{x-4}{x-1}} = e^{\lim_{x\to 1}\frac{x-4}{x-1}\left(\frac{x^2+2}{2x+1}-1\right)} = e^{\lim_{x\to 1}\frac{x-4}{x-1}\cdot\frac{x^2+2-(2x+1)}{2x+1}} = e^{\lim_{x\to 1}\frac{x-4}{x-1}\cdot\frac{x^2+2-2x-1}{2x+1}} =$$

$$e^{\lim_{x\to 1}\frac{x-4}{x-1}\cdot\frac{x^2-2x+1}{2x+1}} = e^{\lim_{x\to 1}\frac{x-4}{x-1}\cdot\frac{(x-1)^2}{2x+1}} = e^{\lim_{x\to 1}\frac{(x-4)(x-1)}{2x+1}} = e^0 = 1$$

4) Como $y = \ln\frac{(x-2)^3}{\sqrt{2x-1}} = \ln(x-2)^3 - \ln\sqrt{2x-1} = 3\ln(x-2) - \frac{1}{2}\ln(2x-1)$,

derivando: $y' = 3\frac{1}{x-2} - \frac{1}{2}\frac{2}{2x-1} = \frac{3}{x-2} - \frac{1}{2x-1} = \frac{6x-3-x+2}{(x-2)(2x-1)} = \frac{5x-1}{(x-2)(2x-1)}$

5) Para dibujar la gráfica de $y = \frac{x^3}{(x-1)^2}$, comenzaremos hallando sus derivadas.

$$y' = \frac{3x^2(x-1)^2 - x^3 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{(x-1)\left[3x^2(x-1) - 2x^3\right]}{(x-1)^4} = \frac{3x^3-3x^2-2x^3}{(x-1)^3} =$$

$$= \frac{x^3-3x^2}{(x-1)^3}$$

$$y'' = \frac{(3x^2-6x)(x-1)^3 - (x^3-3x^2)3(x-1)^2}{(x-1)^6} = \frac{(x-1)^2\left[(3x^2-6x)(x-1) - 3(x^3-3x^2)\right]}{(x-1)^6} =$$

$$= \frac{3x^3 - 3x^2 - 6x^2 + 6x - 3x^3 + 9x^2}{(x-1)^4} = \frac{6x}{(x-1)^4}$$

a) Dominio. $\mathbb{R} - \{1\}$, ya que $x = 1$ anula el denominador.

b) Par/Impar. $f(-x) = \dfrac{(-x)^3}{(-x-1)^2} = \dfrac{-x^3}{[(-1)(x+1)]^2} = -\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$ $\Rightarrow$ Ni par ni impar.

c) Intersecciones con los ejes. **OX**: $y=0 \Rightarrow 0 = \dfrac{x^3}{(x-1)^2} \Rightarrow x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$, que es válido porque no anula al denominador $\Rightarrow$ (0, 0).

OY: $x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow (0,0)$

d) Asíntotas. **Asíntotas Horizontales**: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{(x-1)^2} = \infty \Rightarrow$ No tiene.

Asíntotas Verticales: Como sólo las hay en puntos de discontinuidad asintótica, y el único punto de discontinuidad es $x = 1$ (ver dominio), éste es el único que hay que investigar: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3}{(x-1)^2} = \infty \Rightarrow$ La recta de ec. $x = 1$ es asíntota vertical.

Asíntotas Oblicuas: $m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{x^3}{(x-1)^2}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{x(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{(x-1)^2} = 1$

$$n = \lim_{x\to\infty} \left(f(x) - mx\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{(x-1)^2} - 1\cdot x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - x(x-1)^2}{(x-1)^2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - x(x^2-2x+1)}{(x-1)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - x^3 + 2x^2 - x}{(x-1)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - x}{x^2 - 2x + 1} = 2$$

Por tanto, $y = x + 2$ es asíntota oblicua.

e) Monotonía / Extremos relativos. Dividimos en intervalos $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$ por:

a) Puntos de discontinuidad de $f\,'$: $x = 1$

b) Puntos críticos: $f\,'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3} = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-3) = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \end{cases}$$

	$(-\infty, 0)$	0	(0, 1)	1	(1, 3)	3	$(3, +\infty)$
$f\,'$	+	0	+	∄	–	0	+
f	↗	?	↗	∄	↘	mín	↗

Como $f(3) = 27/4$, las coordenadas del mínimo relativo son (3, 27/4)

f) Curvatura / Puntos de Inflexión. Dividimos en intervalos $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$ por:

a) Puntos de disc. de $f\,'$: $x=1$

b) Puntos de disc. de $f\,''$: $x=1$

c) Ptos que anulan $f\,''$: $6x = 0 \Leftrightarrow x=0$

	$(-\infty, 0)$	0	(0, 1)	1	$(1, +\infty)$
$f\,''$	–	0	+	∄	+
f	∩	P.I.	∪	∄	∪

Las coordenadas del punto de inflexión son (0, 0).

g) Gráfica.