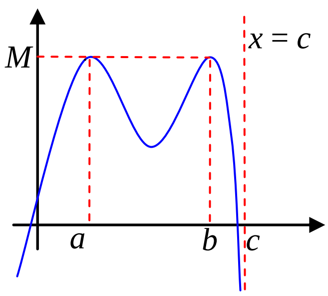
MÁXIMOS Y MÍNIMOS ABSOLUTOS

1. Cálculo teórico de extremos absolutos

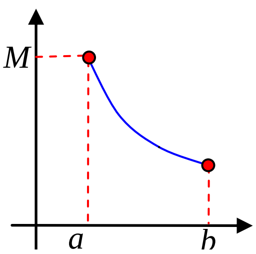
Definición: Una función f alcanza un máximo absoluto en un punto de abscisa a (o sea, en $x = a$) si su imagen es la mayor de todas, considerando las imágenes de todo el dominio de f. Si su imagen es la menor posible en todo el dominio de f, entonces f alcanza en $x = a$ un mínimo absoluto.

Como podemos apreciar en el gráfico, un extremo absoluto puede alcanzarse en más de un punto o incluso no alcanzarse. La función dibujada tiene un máximo absoluto que vale M y es alcanzado en $x = a$ y en $x = b$. Además, no tiene mínimo absoluto, porque cuando x tiende a c se va a $-\infty$, ya que $x = c$ es una asíntota vertical. El valor M es el máximo absoluto y, si es alcanzado, es único. Igual para el mínimo absoluto.

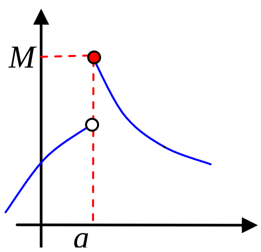


Cálculo de los extremos absolutos

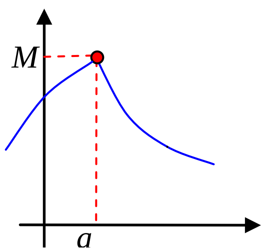
Un máximo absoluto puede alcanzarse en:



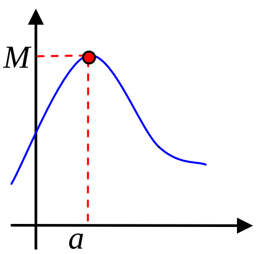
Un extremo del intervalo donde está definida la función.



Un punto de discontinuidad de f



Un punto de discontinuidad de f'

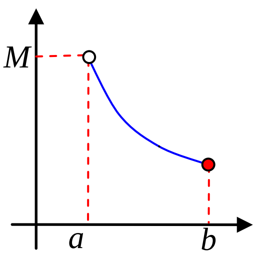


Un punto donde hay tangente horizontal, o sea, donde $f'(a) = 0$.

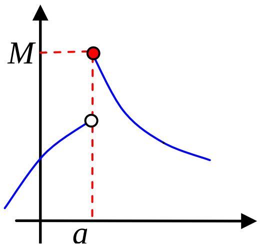
Nota: Un punto donde la gráfica presenta un "pico" (*punto anguloso*), como el del tercer gráfico de la serie anterior, es un punto donde la función no es derivable. En efecto, si vamos dibujando la tangente a la función en un punto x a la izquierda de a y vamos aproximando x (y la correspondiente tangente) hacia a por la izquierda, tendremos, al llegar, una recta tangente, cuya pendiente será la derivada en a por la izquierda. Si lo hacemos por la derecha, la pendiente será diferente y, por tanto, la derivada en a por la derecha. Al no coincidir las derivadas laterales en a, no existirá $f'(a)$, por lo que $x = a$ es un punto de discontinuidad de f'.

Las posibilidades son las mismas para el mínimo absoluto.

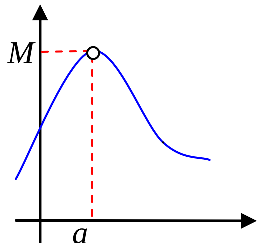
Por otra parte, en el primer gráfico de la página vimos un caso en el que no existe el mínimo absoluto porque las imágenes tendían a $-\infty$ cuando $x \to c$. Otra posibilidad de un máximo absoluto no alcanzado es la del gráfico adjunto, porque la función no está definida en $x = a$.



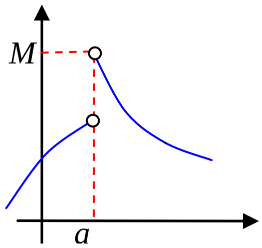
Y, por otra parte, en los *puntos de discontinuidad de* f se pueden presentar situaciones como la de los gráficos siguientes:



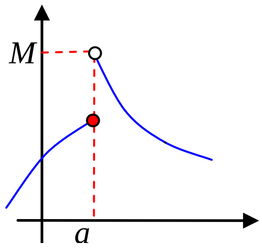
En $x = a$ se alcanza el máximo absoluto, que vale M



Si $x \to a$ las imágenes tienden a M, que debería ser el máximo absoluto, pero no es alcanzado, pues no existe $f(a)$.



Si $x \to a^+$ las imágenes tienden a M, que no es alcanzado, porque no existe $f(a)$.



Si $x \to a^+$ las imágenes tienden a M, que no es alcanzado. $\exists f(a)$ pero no es relevante.

Por tanto, el **procedimiento para calcular los extremos absolutos** es el siguiente.

1) Localizamos los puntos que están en alguna de las cuatro situaciones siguientes:
   a) Extremos del intervalo donde está definida la función.
   b) Puntos de discontinuidad de f.
   c) Puntos de discontinuidad de f'.
   d) Puntos donde se anula la primera derivada f'.

2) Calculamos las *imágenes* en cada uno de los puntos obtenidos. Si no puede calcularse la imagen en alguno de ellos, hallamos el *límite*, cuando x tiende al punto.
   Para los *puntos de discontinuidad de* f, además de la imagen (si puede calcularse) calculamos *siempre* el límite cuando x tiende al punto. Y si, además, la función tiene diferente definición a la derecha y a la izquierda del punto (por ejemplo, en una función definida a trozos), calculamos el límite por la izquierda y el límite por la derecha.

3) Comparamos los resultados del punto 2:
   - El mayor de todos será el máximo absoluto si es *imagen* (y puede alcanzarse en más de un punto), pero si es *límite* y no es imagen el máximo absoluto no es alcanzado, por lo que la función *no tendrá máximo absoluto* (el resultado máximo se llama, entonces, *supremo*). Si el límite vale $+\infty$, no tendrá ni máximo absoluto ni supremo (la función no está acotada superiormente).
   - Lo mismo para el menor de todos los resultados del punto 2 y el mínimo absoluto (se llama *ínfimo* si no es alcanzado). Si el límite vale $-\infty$, no tendrá ni mínimo absoluto ni ínfimo (la función no está acotada inferiormente).

Ejemplo. Hallar los extremos absolutos de $f(x) = x^2 - 4x + 3$ definida en $[0, 8)$.
1) Extremos del intervalo: 0; 8.
2) Discontinuidades de f: No tiene (es polinómica).
3) Discontinuidades de f': $f'(x) = 2x - 4$, no tiene (es polinómica).
4) $f'(x) = 0$: $2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$.
Comparamos imágenes o límites:
- $x = 0$: $f(0) = 3$.
- $x = 8$: Sin imagen (no es del dominio). Entonces: $\lim_{x \to 8^-} (x^2 - 4x + 3) = 35$
- $x = 2$: $f(2) = -1$.

Máximo resultado: 35, correspondiente a un *límite* cuando $x \to 8$. Por tanto, no es alcanzado, por lo que la función no tiene máximo absoluto.
Mínimo resultado: -1, correspondiente a una *imagen*, cuando $x = 2$. Luego el mínimo absoluto es -1 y se alcanza en $x = 2$.

2. Cálculo de extremos absolutos a partir de la monotonía

Un procedimiento más estándar, pero equivalente al anterior, consiste en **estudiar la monotonía de la función**. Esta información nos permitirá localizar los extremos absolutos. Veámoslo en la práctica con el ejemplo anterior.

Ejemplo. Hallar los extremos absolutos de $f(x) = x^2 - 4x + 3$ definida en $[0, 8)$.

- Monotonía. Extremos relativos: $f'(x) = 2x - 4$
  - Discontinuidades de f ó f': No tiene.
  - $f'(x) = 0$: $x = 2$.

	(0, 2)	2	(2, 8)
f'	–	0	+
f	↘	mín	↗

Mínimo relativo en $(2, -1)$.

De esta información deducimos que el mínimo relativo **tiene que ser mínimo absoluto**. Y el máximo relativo, de alcanzarse, estará en los extremos del intervalo en que está definida la función. Estudiémoslo.

- $f(0) = 3$
- $\nexists f'(8)$, porque $8 \notin \mathrm{Dom}(f)$. Pero $\lim_{x \to 8^-} (x^2 - 4x + 3) = 35$

Por tanto, el máximo absoluto no es alcanzado. El *supremo*, es decir, la mejor de las *cotas superiores* es 35, cuando x se aproxima a 8.

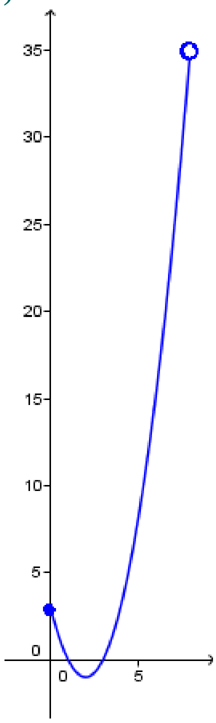
El mínimo absoluto vale -1 y se alcanza cuando $x = 2$, coincidiendo con un mínimo relativo.

3. Extremos absolutos a partir de gráficas

En lugar de realizar el estudio teórico anterior, es posible abordar el cálculo de extremos absolutos dibujando la gráfica de la función y razonando a partir de ella. Es una variante algo más larga del método anterior.

Ejemplo. Hallar los extremos absolutos de $f(x) = x^2 - 4x + 3$ definida en $[0, 8)$.

Trazamos la gráfica de f. Sabemos que es una parábola, por tratarse de una función polinómica de segundo grado. Por la misma razón, será continua e indefinidamente derivable en todo R, y no tendrá asíntotas. Por tanto, nos limitamos a:



- Intersecciones con los ejes:
  - $x = 0 \Rightarrow f(0) = 3$. Corta a OY en $(0, 3)$.
  - $y = 0 \Rightarrow 0 = x^2 - 4x + 3 \Rightarrow x = 1$ ó $x = 3$. Corta a OX en $(1, 0)$ y $(3, 0)$.
- Monotonía. Extremos relativos: $f'(x) = 2x - 4$
  - Discontinuidades de f ó f': No tiene.
  - $f'(x) = 0$: $x = 2$.

	(0, 2)	2	(2, 8)
f'	–	0	+
f	↘	mín	↗

Mínimo relativo en $(2, -1)$.

- Curvatura: $f''(x) = 2 > 0 \ \forall x \Rightarrow f$ es siempre *convexa*.
- Gráfica: Completamos con una pequeña tabla de valores para obtener la gráfica adjunta.

A partir de la gráfica deducimos que el mínimo absoluto se alcanza en el mínimo relativo, por lo que vale -1 cuando $x = 2$. Y no tiene máximo absoluto, porque el supremo valdrá 35 cuando x tiende a 8, pero no es alcanzado.