IES Fernando de Herrera **Curso 2012 / 13**
Primer trimestre – 2º Bach CCSS **29 de octubre de 2012**
Matrices, Determinantes, Sistemas lineales.

NOMBRE: ____

1) *(Ejemplo en directrices 12-13)* a) Un fabricante de productos lácteos, que vende 3 tipos de productos, leche, queso y nata, a dos supermercados, *S* y *H*, ha anotado en la matriz A los pesos en kg de cada producto que vende a cada supermercado y, en la matriz B, las ganancias que obtiene en cada supermercado por cada kg de esos productos:

$$\text{Matriz}\,A: \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \textit{leche} & \textit{queso} & \textit{nata} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{S} \\ \text{H} \end{array} & \begin{pmatrix} 500 & 300 & 250 \\ 460 & 300 & 200 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \text{Matriz}\,B: \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \textit{leche} & \textit{queso} & \textit{nata} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{S} \\ \text{H} \end{array} & \begin{pmatrix} 0.20 & 4 & 1 \\ 0.25 & 3.60 & 1.20 \end{pmatrix} \end{array}$$

Efectúe el producto $A{\cdot}B^{\,t}$ y explique el significado económico de cada uno de los elementos de la diagonal principal de la matriz resultante. *(2 puntos)*

b) Si las matrices C y D unen los nodos numerados con las etiquetas 1, 2, 3, represente los grafos asociados a dichas matrices de adyacencia: *(1 punto)*

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2) *(2011)* Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Calcule $A^2 - B{\cdot}C^{\,t}$. *(2 puntos)*

b) Resuelva la ecuación matricial $A{\cdot}X + B = 2{\cdot}C$. *(2 puntos)*

3) *(2005)*: Resuelva el siguiente sistema y clasifíquelo atendiendo al número de soluciones: *(3 puntos)*

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ 2x + 3y - z &= 17 \\ 4x + 5y + z &= 17 \end{aligned}\right\}$$

SOLUCIONES

1) *(Ejemplo en directrices 12-13)* a) Un fabricante de productos lácteos, que vende 3 tipos de productos, leche, queso y nata, a dos supermercados, S y H, ha anotado en la matriz A los pesos en kg de cada producto que vende a cada supermercado y, en la matriz B, las ganancias que obtiene en cada supermercado por cada kg de esos productos:

$$\text{Matriz } A: \quad \begin{array}{c} \\ S \\ H \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \textit{leche} & \textit{queso} & \textit{nata} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 500 & 300 & 250 \\ 460 & 300 & 200 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \text{Matriz } B: \quad \begin{array}{c} \\ S \\ H \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \textit{leche} & \textit{queso} & \textit{nata} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.20 & 4 & 1 \\ 0.25 & 3.60 & 1.20 \end{pmatrix} \end{array}$$

Efectúe el producto $A \cdot B^t$ y explique el significado económico de cada uno de los elementos de la diagonal principal de la matriz resultante. *(2 puntos)*

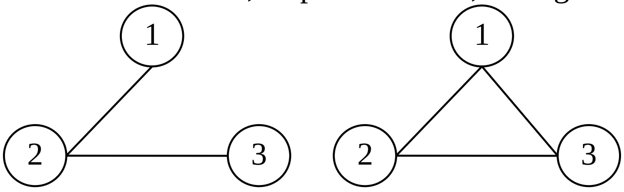
$$A \cdot B^t = \begin{pmatrix} 500 & 300 & 250 \\ 460 & 300 & 200 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.20 & 0.25 \\ 4 & 3.60 \\ 1 & 1.20 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1550 & 1505 \\ 1492 & 1435 \end{pmatrix}}$$

El elemento a_{11} representa la multiplicación de los kg de cada artículo por las ganancias respectivas por kg en el supermercado S. Por tanto, $\boxed{\text{son las ganancias que obtiene por sus transacciones con } S}$. De la misma forma $\boxed{a_{22} \text{ representa las ganancias provenientes de } H}$.

b) Si las matrices C y D unen los nodos numerados con las etiquetas 1, 2, 3, represente los grafos asociados a dichas matrices de adyacencia: *(1 punto)*

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La interpretación de una matriz de adyacencia de un gráfico es que si hay conexión del nodo i al nodo j, hay un 1 en la fila i y columna j. Es decir, $a_{ij} = 1$. Así, que $c_{12} = 1$ es porque en el nodo correspondiente hay una conexión que va del nodo 1 al nodo 2. Como ambas matrices son simétricas, las conexiones entre todos los nodos son bidireccionales, por lo que las vamos a representar por un único segmento que los una. Por tanto, la representación gráfica de los nodos de las dos matrices anteriores son, respectivamente, los siguientes:



2) *(2011)* Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Calcule $A^2 - B \cdot C^t$. *(2 puntos)*

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot C^t = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$A^2 - B\cdot C^t = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -8 & 7 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}}$$

b) Resuelva la ecuación matricial $A\cdot X + B = 2\cdot C$. *(2 puntos)*

Aplicando las propiedades de las operaciones con matrices, podemos despejar la matriz X de la siguiente manera:

$$A\cdot X + B = 2\cdot C \Rightarrow A\cdot X + B - B = 2\cdot C - B \Rightarrow A\cdot X + O = 2\cdot C - B \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A\cdot X = 2\cdot C - B \Rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot (2\cdot C - B) \Rightarrow I\cdot X = A^{-1}\cdot (2\cdot C - B) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow X = A^{-1}\cdot (2\cdot C - B)$$

Donde O es la matriz nula e I, la identidad.

Será posible calcular X si existe la matriz inversa de A. Y esto ocurrirá si, y sólo si $|A| \neq 0$. Calculémosla:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -6 + 5 = -1.$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{Adj}(A^t) = -\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Por otra parte:

$$2\cdot C - B = 2\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -2 & 10 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -1 & 5 & 4 \\ -2 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$

En definitiva,

$$X = A^{-1}\cdot (2\cdot C - B) = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 5 & 4 \\ -2 & 9 & 5 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 7 & -30 & -13 \\ 3 & -13 & -6 \end{pmatrix}}$$

3) *(2005)*: Resuelva el siguiente sistema y clasifíquelo atendiendo al número de soluciones: *(3 puntos)*

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ 2x + 3y - z &= 17 \\ 4x + 5y + z &= 17 \end{aligned}\right\}$$

Trabajamos con la matriz ampliada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 17 \\ 4 & 5 & 1 & 17 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 - 4F_1]{F_2 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 17 \\ 0 & 1 & -3 & 17 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como la tercera fila es de 0, la eliminamos. Las dos filas restantes corresponden a un sistema ya triangularizado, pero con dos ecuaciones y tres incógnitas. Por tanto, al estar triangularizado y tener menos ecuaciones que incógnitas, es un *sistema compatible indeterminado*, con infinitas soluciones. Pasamos, por ejemplo z al segundo miembro; a partir de ahora, actuará de parámetro: $z = t$, suponiendo t un número conocido, cuyo valor determinamos nosotros a nuestro antojo:

$$\left.\begin{aligned} x+y+\ \ z&=\ 0 \\ y-3z&=17 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x+y&=\quad -z \\ y&=17+3z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x+y&=\quad -t \\ y&=17+3t \end{aligned}\right\}$$

La segunda ecuación nos da el valor de y. Sustituyéndolo en la primera y despejando:

$$x + 17 + 3t = -t \quad \Rightarrow \quad x = -17 - 4t$$

Las infinitas soluciones, dependientes del valor que, para cada una de ellas, elijamos para t, son:

$$\boxed{(x = -17-4t,\ y = 17+3t,\ z = t)}$$

IES Fernando de Herrera | **Curso 2012 / 13**
Primer trimestre – 2º Bach CCSS | **26 de noviembre de 2012**
Matrices, Determinantes, Sistemas lineales, Prog. Lineal

NOMBRE: ____

1) *(2011-12)* Un empresario fabrica camisas y pantalones para jóvenes. Para hacer una camisa se necesitan 2 metros de tela y 5 botones, y para hacer un pantalón hacen falta 3 metros de tela, 2 botones y 1 cremallera. La empresa dispone de 1050 metros de tela, 1250 botones y 300 cremalleras. El beneficio que se obtiene por la venta de una camisa es de 30 euros y el de un pantalón es de 50 euros.
Suponiendo que se vende todo lo que se fabrica, calcule el número de camisas y de pantalones que debe confeccionar para obtener el máximo beneficio, y determine este beneficio máximo. *(3,5 puntos)*

2) *(2011-12)* Una fábrica produce dos tipos de productos, A y B, que distribuye a tres clientes. En el mes de enero el primer cliente compró 9 unidades de A y 5 de B, el segundo cliente 3 de A y 7 de B, y el tercer cliente 4 de A y 6 de B.
En el mes de febrero el primer cliente y el segundo duplicaron las compras del mes anterior, y el tercer cliente compró de cada producto una unidad más de las que compró en enero. En marzo, el primer cliente no compró nada, y el segundo y el tercero compraron lo mismo que en febrero.
   a) Para cada mes, construya la matriz de dimensión 3x2 correspondiente a las compras de eses mes. *(1 punto)*
   b) Calcule la matriz de compras del trimestre. *(0,5 puntos)*
   c) Si los precios de los productos A y B son, respectivamente, 80 y 100 euros, calcule lo que factura la fábrica en el primer trimestre, por cada cliente y en total. *(1,5 puntos)*

3) Halle la matriz X que verifique la ecuación matricial $A^2 \cdot X = A - B\cdot C$, siendo A, B y C las matrices *(3,5 puntos)*

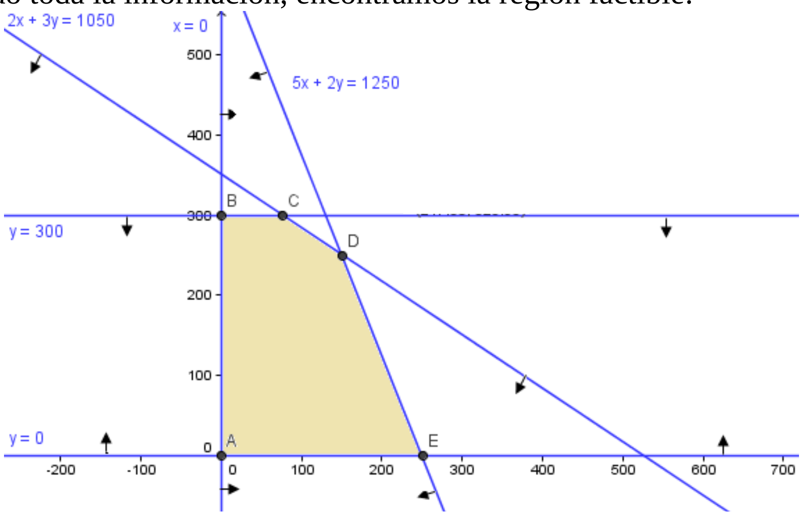
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

SOLUCIONES

1) *(2011-12)* Un empresario fabrica camisas y pantalones para jóvenes. Para hacer una camisa se necesitan 2 metros de tela y 5 botones, y para hacer un pantalón hacen falta 3 metros de tela, 2 botones y 1 cremallera. La empresa dispone de 1050 metros de tela, 1250 botones y 300 cremalleras. El beneficio que se obtiene por la venta de una camisa es de 30 euros y el de un pantalón es de 50 euros.
Suponiendo que se vende todo lo que se fabrica, calcule el número de camisas y de pantalones que debe confeccionar para obtener el máximo beneficio, y determine este beneficio máximo. *(3,5 puntos)*
Disponemos los datos en una tabla, que nos ayude a plantear el problema. Lo primero que hacemos es decidir las incógnitas: el número de camisas y de pantalones a confeccionar, que es lo que se nos pide. Las restricciones salen de que no se puede fabricar un nº negativo de prendas y de que los componentes a utilizar no pueden superar al disponible. La función objetivo la decidimos porque hay que maximizar el beneficio:

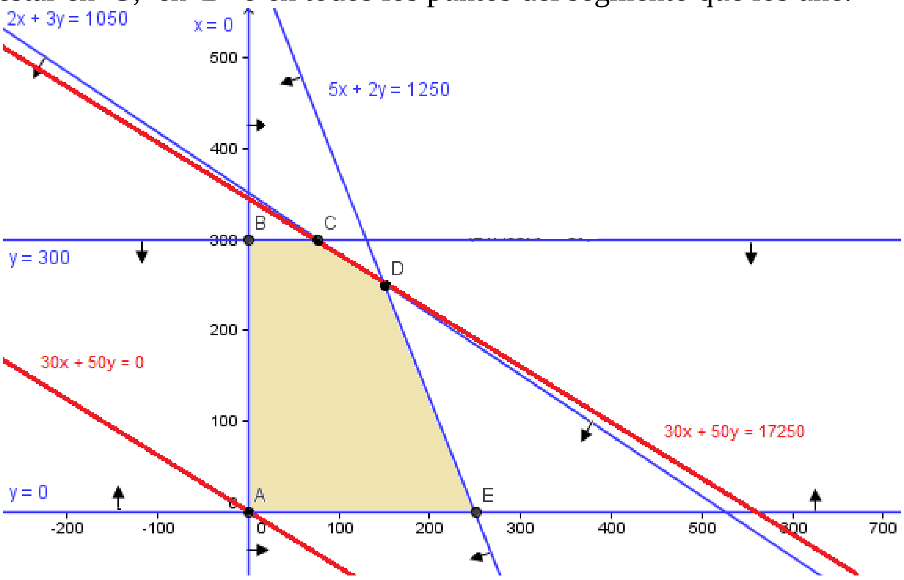
	Nº a fabricar	Tela (m)	Botones (nº)	Cremalleras (nº)	Beneficio
Camisas	x	2	5	0	30
Pantalones	y	3	2	1	50
Restricciones:	$x \geq 0;\ \ y \geq 0$	$2x + 3y \leq 1050$	$5x + 2y \leq 1250$	$y \leq 300$	$F(x, y) = 30x + 50y$ Maximizar

Llevamos cada una de las restricciones a un gráfico. La ecuación $x = 0$ es el eje OY. Los puntos que verifican que $x \geq 0$ son los que quedan a la derecha del eje, como podemos corroborar eligiendo un punto cualquiera de dicha zona (la recta divide al plano en dos semiplanos: nos referimos al que queda a la derecha del eje), por ejemplo el (3, 5), sustituyéndolo en la inecuación $x \geq 0$: $3 \geq 0$, y comprobando que dicha desigualdad es cierta.
De la misma forma, los puntos que resuelven $y \geq 0$ son los que están por encima del eje OX, porque dicho eje es la recta $y = 0$. Esta inecuación, junto con la anterior, nos restringe al primer cuadrante.
La recta $2x + 3y = 1050$ divide, también, al plano en dos semiplanos. Para cuál de ellos resuelve la inecuación $2x + 3y \leq 1050$, tomamos un punto cualquiera que no esté sobre la recta, por ejemplo el (0, 0), y vemos si la verifica: $2\cdot 0 + 3\cdot 0 \leq 1050$. Como así es, de los dos semiplanos, el que resuelve la inecuación es el que contiene al (0, 0).
De la misma forma actuamos con las dos inecuaciones restantes.
Combinando toda la información, encontramos la región factible:



La región está delimitada por cinco vértices. En uno de ellos, o en el segmento que une a dos consecutivos, incluidos ambos, estará la solución, según sabemos por la teoría de Programación Lineal. Para averiguarlo, podemos hacerlo de dos formas.

La primera es gráfica. Igualamos la función objetivo a 0: $30x + 50y = 0$. Si dibujamos los puntos que verifican esta ecuación obtendremos una recta. Todos los puntos (x, y) de dicha recta proporcionan el mismo beneficio: 0. Cualquier punto de una paralela genérica $30x + 50y = c$ nos da el mismo beneficio: c. Nos interesa el beneficio c máximo. Como el coeficiente de y es positivo, lo obtendremos en los puntos de la recta de la forma $30x + 50y = 0$ lo más alta posible. Pero tocando, aún, a la región factible (de lo contrario, los puntos de dicha recta no verificarán las *restricciones* del problema). Según la inclinación de la recta $30x + 50y = 0$, la solución podría estar en C, en D o en todos los puntos del segmento que los une:



Calculamos las coordenadas de dichos vértices, que es la intersección de las dos rectas siguientes:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+3y=1050 \\ y=300 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Sustituyendo la 2ª ec en la 1ª:} \\ 2x+3\cdot 300=1050 \Rightarrow 2x=1050-900=150 \Rightarrow x=\dfrac{150}{2}=75 \end{array}$$

Luego $C(75, 300)$

De igual forma:

$$\left.\begin{array}{r} 5x+2y=1250 \\ 2x+3y=1050 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{rl} \cdot 3: & 15x+6y=3750 \\ \cdot(-2): & -4x-6y=-2100 \\ \hline & 11x \quad\quad =1650 \end{array} \Rightarrow x=\frac{1650}{11}=150$$

Sustituyendo en la 2ª: $2\cdot 150 + 3y = 1050 \Rightarrow 3y = 1050 - 300 \Rightarrow y = \dfrac{750}{3} = 250$

Por lo que $D(150, 250)$.

Y el beneficio en ellos:
$F(C) = F(75, 300) = 30\cdot 75 + 50\cdot 300 = 17250$
$F(D) = F(150, 250) = 30\cdot 150 + 50\cdot 250 = 17000$

La solución está, pues, en C, y consiste en confeccionar 75 camisas y 300 pantalones, que proporcionarán un beneficio de 17250€.

La segunda forma de encontrar la solución es calculando el valor de la función objetivo en cada uno de los cinco vértices, y comparando sus resultados. Ello nos exige saber las coordenadas de todos los vértices:
$A(0, 0)$, pues es el origen.
$B(0, 300)$, pues está sobre el eje OY y sobre $y = 300$.
$D(250, 0)$, porque es la intersección de $5x + 2y = 1250$ con el eje OX.
Efectuando los correspondientes cálculos, obtenemos el resultado ya conocido:

- $F(A) = F(0, 0) = 0$
- $F(B) = F(0, 300) = 30\cdot 0 + 50\cdot 300 = 15000$
- $F(C) = F(75, 300) = 30\cdot 75 + 50\cdot 300 = 17250$
- $F(D) = F(150, 250) = 30\cdot 150 + 50\cdot 250 = 17000$
- $F(E) = F(250, 0) = 30\cdot 250 + 50\cdot 0 = 7500$

2) *(2011-12)* Una fábrica produce dos tipos de productos, A y B, que distribuye a tres clientes. En el mes de enero el primer cliente compró 9 unidades de A y 5 de B, el segundo cliente 3 de A y 7 de B, y el tercer cliente 4 de A y 6 de B.
En el mes de febrero el primer cliente y el segundo duplicaron las compras del mes anterior, y el tercer cliente compró de cada producto una unidad más de las que compró en enero. En marzo, el primer cliente no compró nada, y el segundo y el tercero compraron lo mismo que en febrero.

a) Para cada mes, construya la matriz de dimensión 3x2 correspondiente a las compras de eses mes. *(1 punto)*
Como tiene 3 filas y 2 columnas, distribuimos a los clientes en las filas y a los productos en las columnas:

$$\boxed{E = \begin{array}{c} \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 3 & 7 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \end{array} \qquad F = \begin{pmatrix} 18 & 10 \\ 6 & 14 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 14 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}}$$

b) Calcule la matriz de compras del trimestre. *(0,5 puntos)*

$$\boxed{E + F + M = \begin{pmatrix} 27 & 15 \\ 15 & 35 \\ 14 & 20 \end{pmatrix}}$$

c) Si los precios de los productos A y B son, respectivamente, 80 y 100 euros, calcule lo que factura la fábrica en el primer trimestre, por cada cliente y en total. *(1,5 puntos)*
Tendremos que hacer un producto matricial, de manera que cada producto se multiplique por su precio respectivo, y eso para cada cliente. Como las cantidades de los productos por cliente están en filas, ponemos entonces los precios en columnas:

$$\begin{pmatrix} 27 & 15 \\ 15 & 35 \\ 14 & 20 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 80 \\ 100 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 3660 \\ 4700 \\ 3120 \end{pmatrix}}$$

Esta matriz nos da lo que se factura por cada cliente. En total, lo facturado es la suma de lo referente a cada uno:

$$3660 + 4700 + 3120 = \boxed{11480}$$

3) Halle la matriz X que verifique la ecuación matricial $A^2 \cdot X = A - B{\cdot}C$, siendo A, B y C las matrices *(3,5 puntos)*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Para comodidad en la notación, llamaremos $\boxed{D = A^2}$. Para despejar X en la ecuación matricial, multiplicamos a la izquierda (el producto de matrices no es conmutativo) por la inversa de D:

$$A^2{\cdot}X = A - B{\cdot}C \;\Rightarrow\; D{\cdot}X = A - B{\cdot}C \;\Rightarrow\; D^{-1}{\cdot}\, D{\cdot}X = D^{-1}\,(A - B{\cdot}C) \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \boxed{X = D^{-1}\,(A - B{\cdot}C)}$$

porque $D^{-1}{\cdot}\; D = I$ (matriz unidad), y además $I{\cdot}X = X$. Ya tenemos X despejada, con los cálculos que necesitamos.

Empezaremos calculando D^{-1}.

$$D = A^2 = A{\cdot}A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$|D| = 4 \neq 0 \;\Rightarrow\; \exists D^{-1}$.

$$D^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \text{Adj}(D^t) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \boxed{D^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

No nos están pidiendo cuánto vale D^{-1}, por lo que no completaremos el cálculo, lo que nos facilitará el trabajo posterior, ya que prescindiremos de fracciones.

$$A - B{\cdot}C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -8 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego: $X = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -8 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 24 & 1 \\ -8 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 6 & 1/4 \\ -2 & 1/4 \end{pmatrix}}$

NOMBRE: ____

1) *(Junio 2011 Específica)* Un industrial cafetero produce dos tipos de café, natural y descafeinado, en tres modalidades cada uno, A, B y C. Se han anotado en la matriz P los pesos, en kg, del café que el industrial produce de cada una de las modalidades de cada tipo, y en la matriz Q los precios a los que vende el kg de cada producto final:

$$P: \begin{array}{r} \\ \text{natural} \\ \text{descafeinado} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 550 & 400 & 240 \\ 260 & 200 & 100 \end{pmatrix} \end{array} \qquad Q: \begin{array}{r} \\ \text{natural} \\ \text{descafeinado} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2'20 & 2'75 & 2'50 \\ 3'20 & 3'90 & 3'60 \end{pmatrix} \end{array}$$

Efectúe el producto $P \cdot Q^t$ y explique el significado económico de cada uno de los elementos de la diagonal principal de la matriz resultante. *(2 puntos)*

2) *(Septiembre 2012)* Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

a) Resuelva la ecuación matricial $A \cdot X + A^t = I_2$. *(2 puntos)*
b) ¿Qué requisitos mínimos debe cumplir una matriz B para que pueda efectuarse el producto $A \cdot B$? *(0,5 puntos)*
c) ¿Y para el producto $3 \cdot B \cdot A$? *(0,5 puntos)*

3) *(Selectividad 2012)* Un comerciante quiere dar salida a 400 kg de avellanas, 300 kg de nueces y 400 kg de almendras. Para ello hace dos tipos de lotes: los de tipo A contienen 2 kg de avellanas, 2 kg de nueces y 1 kg de almendras; y los de tipo B contienen 3 kg de avellanas, 1 kg de nueces y 4 kg de almendras. El precio de venta de cada lote es de 20 euros para los del tipo A y de 40 euros para los del tipo B. ¿Cuántos lotes de cada tipo debe vender para obtener el máximo ingreso y a cuánto asciende éste? *(3 puntos)*

4) Discutir y resolver el siguiente sistema aplicando el Método de Gauss en su forma matricial: *(2 puntos)*

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y - z = 17 \\ 4x + 5y + z = 17 \end{array}\right\}$$

SOLUCIONES

1) *(Junio 2011 Específica)* Un industrial cafetero produce dos tipos de café, natural y descafeinado, en tres modalidades cada uno, A, B y C. Se han anotado en la matriz P los pesos, en kg, del café que el industrial produce de cada una de las modalidades de cada tipo, y en la matriz Q los precios a los que vende el kg de cada producto final:

$$P: \begin{array}{r} \\ \text{natural} \\ \text{descafeinado} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 550 & 400 & 240 \\ 260 & 200 & 100 \end{pmatrix} \end{array} \qquad Q: \begin{array}{r} \\ \text{natural} \\ \text{descafeinado} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2'20 & 2'75 & 2'50 \\ 3'20 & 3'90 & 3'60 \end{pmatrix} \end{array}$$

Efectúe el producto $P \cdot Q^t$ y explique el significado económico de cada uno de los elementos de la diagonal principal de la matriz resultante. *(2 puntos)*

Efectuamos el producto solicitado:

$$P \cdot Q^t = \begin{pmatrix} 550 & 400 & 240 \\ 260 & 200 & 100 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2'20 & 3'20 \\ 2'75 & 3'90 \\ 2'50 & 3'60 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2910 & 4184 \\ 1372 & 1972 \end{pmatrix}}$$

La interpretación de los elementos de la diagonal principal es la siguiente:

El elemento $a_{11} = 2910$ resulta de multiplicar los kg de café natural de cada modalidad por los precios respectivos a los que los vende, sumados. Por tanto, representa *el importe total de la venta de café natural*.

El elemento $a_{22} = 1972$ hace lo propio con el café descafeinado. Luego es *el importe total de la venta de café descafeinado*.

2) *(Septiembre 2012)* Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

a) Resuelva la ecuación matricial $A \cdot X + A^t = I_2$. *(2 puntos)*

Tenemos en cuenta que se trata de matrices, por lo que hemos de operar con cuidado, aplicando las propiedades que conocemos de las mismas y de su comportamiento frente a las operaciones matriciales. Además, I_2 es la matriz identidad de orden 2.

$$A \cdot X + A^t = I_2 \;\Rightarrow\; A \cdot X + A^t - A^t = I_2 - A^t \;\Rightarrow\; A \cdot X + O = I_2 - A^t \;\Rightarrow$$

donde O es la matriz nula. Simplificamos y suponemos que existe la inversa de la matriz A:

$$A \cdot X = I_2 - A^t \;\Rightarrow\; A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1}(I_2 - A^t) \;\Rightarrow\; I_2 \cdot X = A^{-1}(I_2 - A^t) \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; X = A^{-1}(I_2 - A^t)$$

La multiplicación por la inversa de A se ha producido a la izquierda, y no hubiera sido posible hacerlo a la derecha porque el producto de matrices no es conmutativo. Hemos encontrado los cálculos necesarios para hallar X.

Comencemos calculando:

$$I_2 - A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Por otro lado, para calcular la inversa de A, comenzamos hallando el valor de su determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 2 = 1$$

Al ser no nulo, existe la inversa de A. Si no hubiera sido así, el problema no tendría solución.

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{Adj}(A^t) = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$X = A^{-1}(I_2 - A^t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}}$$

b) ¿Qué requisitos mínimos debe cumplir una matriz B para que pueda efectuarse el producto $A·B$? *(0,5 puntos)*

Deben coincidir las columnas de A y las filas de B. Como A es 2 x 2, $\boxed{B \text{ debe tener 2 filas}}$.

c) ¿Y para el producto $3·B·A$? *(0,5 puntos)*

Lo importante es el producto matricial, ya que el externo por 3 no es más que multiplicar dicho número real por cada elemento de la matriz $B·A$. Como A es 2 x 2, B debe tener el mismo número de columnas que filas tiene A. Esto es, la matriz $\boxed{B \text{ debe tener 2 columnas}}$.

3) *(Selectividad 2010)* Un comerciante quiere dar salida a 400 kg de avellanas, 300 kg de nueces y 400 kg de almendras. Para ello hace dos tipos de lotes: los de tipo A contienen 2 kg de avellanas, 2 kg de nueces y 1 kg de almendras; y los de tipo B contienen 3 kg de avellanas, 1 kg de nueces y 4 kg de almendras. El precio de venta de cada lote es de 20 euros para los del tipo A y de 40 euros para los del tipo B. ¿Cuántos lotes de cada tipo debe vender para obtener el máximo ingreso y a cuánto asciende éste? *(3 puntos)*

Organizamos los datos del problema en una tabla que nos ayude a plantearlo aplicando las técnicas de Programación Lineal.

En primer lugar, decidimos las variables. Como se nos solicita el nº de lotes de cada tipo, ya las tenemos claras. Colocaremos en filas los datos correspondientes a cada lote.

Por otra parte, las restricciones nos vienen dadas porque el número de lotes no puede ser negativo y por la cantidad de kg disponibles de cada producto (avellanas, nueces y almendras).

Por último, al final colocamos una columna correspondiente a los datos económicos: se trata de maximizar los ingresos. Se hace teniendo en cuenta el ingreso que reporta cada unidad vendida de cada lote. Se supone que se venden los x lotes confeccionados del tipo A y los y del tipo B.

Por tanto:

	Nº de lotes	Contenido en Avellanas (kg)	Contenido en Nueces (kg)	Contenido en Almendras (kg)	Ingresos
Lotes tipo *A*	x	2	2	1	20
Lotes tipo *B*	y	3	1	4	40
Restricciones:	$x \geq 0$; $y \geq 0$	$2x + 3y \leq 400$	$2x + y \leq 300$	$x + 4y \leq 400$	$F(x, y) = 20x + 40y$ Maximizar

Seguidamente, dibujamos un gráfico con las restricciones. Cambiamos en cada una de las cinco inecuaciones el signo de desigualdad por un igual, obteniendo así la ecuación de una recta. Trazamos dichas rectas.

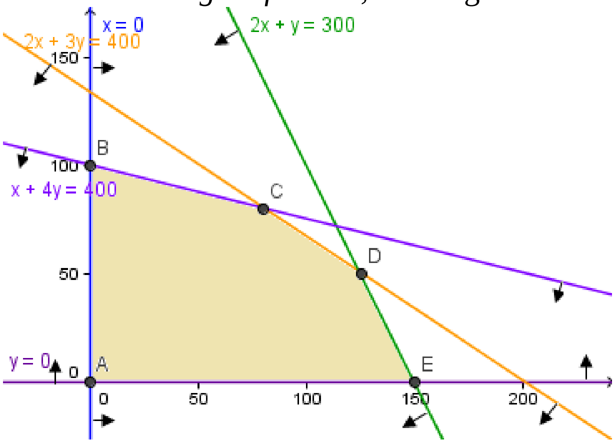
$x = 0$ e $y = 0$ son los ejes OY y OX respectivamente $\Rightarrow$ $x \geq 0$ e $y \geq 0$ nos restringen, pues, al primer cuadrante, que es donde se verifican ambas inecuaciones a la vez.

Para $2x + 3y = 400$, hacemos $x = 0$ $\Rightarrow$ $y = 400/3$. Y también $y = 0$ $\Rightarrow$ $x = 200$, Luego pasa por $(0, 400/3)$ y $(200, 0)$. Esta recta divide al plano en dos semiplanos. Para decidir cuál de ellos verifica la inecuación $2x + 3y \leq 400$ podemos optar por despejar y en la inecuación: $y \leq \dfrac{-2x+400}{3}$, con lo que sabemos que, como los puntos que están sobre la recta verifican la misma expresión, pero con el signo =, los puntos cuya y es inferior a los que están sobre la recta, esto es, aquellos que quedan por debajo de la misma, son la solución de la inecuación. Pero otra opción para decidir cuál es el semiplano solución es tomar un punto que no esté en la recta, por ejemplo, el (0, 0), y sustituirlo en la inecuación, a ver si lo verifica:

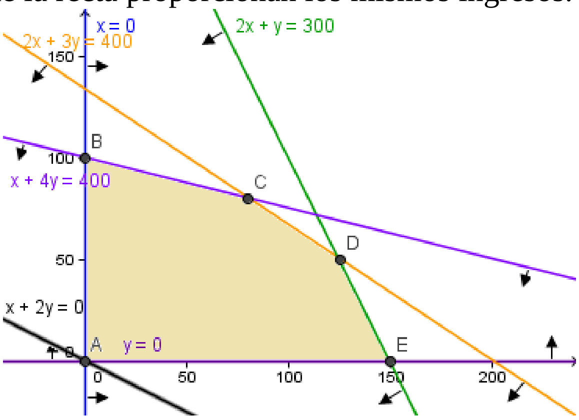
$$2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \leq 400 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq 400$$

que resulta cierto. Por tanto, de los dos semiplanos, la solución es el que contiene al punto (0, 0). Señalamos dicho semiplano con unas flechitas sobre la recta $2x + 3y = 400$.

Repetimos cálculos similares para las otras dos inecuaciones. El gráfico, en el que se han destacado los vértices de la *región factible*, es el siguiente:



Para optimizar la función objetivo, podemos optar por un método gráfico, consistente en dibujar las funciones de la forma $20x + 40y = c$. Son rectas paralelas. Para un c determinado, todos los puntos (x, y) de la recta proporcionan los mismos ingresos. Como el coeficiente de y es positivo: 40, de entre todas estas paralelas, cuanto más alta esté la recta en el gráfico, mayor es el c que le corresponde. Hemos de elegir la más alta posible que contenga algún punto de la región factible. Trazamos $20x + 40y = 0$, y la recta que buscamos es paralela a ella. Por tanto, se trata de la que pasa por C o por D (es dudoso). Lo vemos en el gráfico adjunto.



Para decidir la solución, evaluamos la

función objetivo en C y en D y, comparando los resultados, decidimos en cuál de ellos está la solución.

La otra opción, que es la que vamos a desarrollar, consisten en calcular las coordenadas de los cinco vértices y comparar los resultados de la función objetivo en cada uno de ellos. Sabemos que la solución óptima estará sobre un vértice o sobre el segmento que une dos consecutivos. Por tanto, de estos resultados obtendremos la solución.

Calculemos los cinco vértices:

- $\boxed{A(0, 0)}$, pues es la intersección de los ejes.
- B es la intersección de la recta $x + 4y = 400$ con el eje OY, cuya ecuación es $x = 0$. Sustituyendo este valor en la ecuación de la otra recta: $0 + 4y = 400 \Rightarrow y = 100$. Luego $\boxed{B(0, 100)}$.
- Análogamente:

$$\left.\begin{array}{r} x+4y=400 \\ 2x+3y=400 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} \cdot(-2): -2x-8y=-800 \\ 2x+3y=400 \\ \hline -5y=-400 \end{array} \Rightarrow y=\frac{-400}{-5}=80$$

  Sustituyendo en la primera: $x + 4\cdot 80 = 400 \Rightarrow x = 400 - 320 = 80$. Luego $\boxed{C(80, 80)}$.

- $$\left.\begin{array}{r} 2x+y=300 \\ 2x+3y=400 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} \cdot(-1): -2x-y=-300 \\ 2x+3y=400 \\ \hline 2y=100 \end{array} \Rightarrow y=50$$

  Sustituyendo en la primera: $2x + 50 = 300 \Rightarrow x = 250/2 = 125$. Con lo que $\boxed{D(125, 50)}$.
- Haciendo $y = 0$ en $2x + y = 300$: $2x = 300 \Rightarrow x = 150 \Rightarrow \boxed{E(150, 0)}$.

Calculamos la función objetivo en cada uno de los vértices:

- $F(A) = F(0, 0) = 20\cdot 0 + 40\cdot 0 = 0$
- $F(B) = F(0, 100) = 20\cdot 0 + 40\cdot 100 = 4000$
- $F(C) = F(80, 80) = 20\cdot 80 + 40\cdot 80 = 4800$
- $F(D) = F(125, 50) = 20\cdot 125 + 40\cdot 50 = 4500$
- $F(E) = F(150, 0) = 20\cdot 150 + 40\cdot 0 = 3000$

La solución está en C, y consiste en preparar 80 unidades de cada lote, obteniendo unos ingresos de 4800€.

4) Discutir y resolver el siguiente sistema aplicando el Método de Gauss en su forma matricial: *(2 puntos)*

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=0 \\ 2x+3y-z=17 \\ 4x+5y+z=17 \end{array}\right\}$$

Trabajamos con la matriz ampliada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 17 \\ 4 & 5 & 1 & 17 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-4F_1]{F_2-2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 17 \\ 0 & 1 & -3 & 17 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como la tercera fila es de 0, la eliminamos. Las dos filas restantes corresponden a un sistema ya triangularizado, pero con dos ecuaciones y tres incógnitas. Por tanto, al estar triangularizado y tener menos ecuaciones que incógnitas, es un *sistema compatible indeterminado*, con infinitas soluciones. Pasamos, por ejemplo z al segundo miembro; a partir de ahora, actuará de parámetro: $z = t$, suponiendo t un número conocido, cuyo valor determinamos nosotros a nuestro antojo:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+\ \ z=\ 0 \\ y-3z=17 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=\quad -z \\ y=17+3z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=\quad -t \\ y=17+3t \end{array}\right\}$$

La segunda ecuación nos da el valor de y. Sustituyéndolo en la primera y despejando:

$$x + 17 + 3t = -t \quad \Rightarrow \quad x = -17 - 4t$$

Las infinitas soluciones, dependientes del valor que, para cada una de ellas, elijamos para t, son:

$$\boxed{(x = -17 - 4t,\ y = 17 + 3t,\ z = t)}$$