IES Fernando de Herrera **Curso 2016 / 17**

Primer trimestre – Observación evaluable escrita nº 1 – 2º Bach CCSS

NOMBRE: ____

Instrucciones: **1)** Todos los **folios** deben tener el **nombre** y estar **numerados** en la parte superior. **2)** Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. **3)** No se puede usar **corrector ni lápiz**, y el bolígrafo debe ser de **tinta indeleble**. Se aconseja no usar borrador. **4)** Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar** la respuesta a una pregunta con las de otras. **5)** **Desatender las instrucciones puede penalizarse con hasta 1 punto** o la **anulación** en caso de usar tinta corregible.

1) Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}3&-1&0\\-2&1&-1\\0&3&1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}2&-1\\0&5\\-3&3\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}5&0&0\\-1&3&0\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}-41&-7&30\\-15&15&20\\58&1&60\end{pmatrix}$$

resolver la ecuación matricial $10A\cdot X-B\cdot C=D$. *(3 puntos)*

2) Un industrial cafetero produce dos tipos de café, natural y descafeinado, en tres modalidades cada uno, A, B y C. Se han anotado en la matriz P los pesos, en kg, del café que el industrial produce de cada una de las modalidades de cada tipo, y en la matriz Q los precios a los que vende el kg de cada producto final:

$$P:\ \begin{array}{c c}& \begin{array}{ccc}A&B&C\end{array}\\ \textit{natural} & \multirow{2}{*}{} \\ \textit{descafeinado} & \end{array}\begin{pmatrix}550&400&240\\260&200&100\end{pmatrix}\qquad Q:\ \begin{array}{c}\textit{natural}\\ \textit{descafeinado}\end{array}\begin{pmatrix}2.20&2.75&2.50\\3.20&3.90&3.60\end{pmatrix}$$

Efectúe el producto $P\cdot Q^t$ y explique el significado económico de cada uno de los elementos de la diagonal principal de la matriz resultante. *(1 punto)*

3) Hallar A^{2016}, siendo $A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$. *(2 puntos)*

4) Clasificar según el número de soluciones y resolver por el método de Gauss en su forma matricial (no es válido ningún otro método) el siguiente sistema. Si tuviera más de una solución, dar dos soluciones concretas: *(2 puntos)*

$$\left.\begin{array}{r}3x-8y-3z=1\\3x-8y+2z=-4\\-3x+8y+8z=-6\end{array}\right\}$$

5) Dada la siguiente matriz, hallar los valores posibles para m sabiendo que hay una fila es combinación lineal de otras: *(2 puntos)*

$$\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&m+1&0\\1&1&m-1\end{pmatrix}$$

SOLUCIONES

1) Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}3&-1&0\\-2&1&-1\\0&3&1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}2&-1\\0&5\\-3&3\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}5&0&0\\-1&3&0\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}-41&-7&30\\-15&15&20\\58&1&60\end{pmatrix}$$

resolver la ecuación matricial $10A\cdot X - B\cdot C = D$. *(3 puntos)*

$$10A\cdot X - B\cdot C = D \Rightarrow 10A\cdot X - B\cdot C + B\cdot C = D + B\cdot C \Rightarrow 10A\cdot X = D + B\cdot C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{10}10A\cdot X = \frac{1}{10}(D + B\cdot C) \Rightarrow A\cdot X = \frac{1}{10}(D + B\cdot C) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot\frac{1}{10}(D + B\cdot C) \Rightarrow X = A^{-1}\cdot\frac{1}{10}(D + B\cdot C)$$

Como $A^{-1}\cdot\frac{1}{10}$ es un *producto externo*, podemos intercambiar el orden:

$$A^{-1}\cdot\frac{1}{10} = \frac{1}{10}A^{-1}$$

Por tanto: $\boxed{X = \frac{1}{10}\cdot A^{-1}\cdot(D + B\cdot C)}$, suponiendo que $\exists\, A^{-1}$.

Como $|A| = \begin{vmatrix}3&-1&0\\-2&1&-1\\0&3&1\end{vmatrix} = (F_2+F_3)\begin{vmatrix}3&-1&0\\-2&4&0\\0&3&1\end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix}3&-1\\-2&4\end{vmatrix} = 12-2 = 10 \neq 0$,

existe la *inversa* de A. La calculamos:

$$A^t=\begin{pmatrix}3&-2&0\\-1&1&3\\0&-1&1\end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{Adj}(A^t)=\begin{pmatrix}4&1&1\\2&3&3\\-6&-9&1\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{10}\mathrm{Adj}(A^t)=\boxed{\frac{1}{10}\begin{pmatrix}4&1&1\\2&3&3\\-6&-9&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2/5&1/10&1/10\\1/5&3/10&3/10\\-3/5&-9/10&1/10\end{pmatrix}}$$

Hemos comprobado que la solución es correcta, comprobando $A\cdot A^{-1} = I$. No es imprescindible hacerlo, pero es fácil equivocarse por la cantidad de cálculos que hay que hacer, por lo que sí que es conveniente la comprobación. Por otra parte:

$$B\cdot C=\begin{pmatrix}2&-1\\0&5\\-3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&0&0\\-1&3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11&-3&0\\-5&15&0\\-18&9&0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow D+B\cdot C=\begin{pmatrix}-41&-7&30\\-15&15&20\\58&1&60\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}11&-3&0\\-5&15&0\\-18&9&0\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}-30&-10&30\\-20&30&20\\40&10&60\end{pmatrix}}$$

Y, finalmente:

$$X=\frac{1}{10}A^{-1}\cdot(D+B\cdot C)=\frac{1}{10}\,\frac{1}{10}\begin{pmatrix}4&1&1\\2&3&3\\-6&-9&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-30&-10&30\\-20&30&20\\40&10&60\end{pmatrix}=$$

$$= \frac{1}{100}\begin{pmatrix} -100 & 0 & 200 \\ 0 & 100 & 300 \\ 400 & -200 & -300 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}}$$

2) Un industrial cafetero produce dos tipos de café, natural y descafeinado, en tres modalidades cada uno, A, B y C. Se han anotado en la matriz P los pesos, en kg, del café que el industrial produce de cada una de las modalidades de cada tipo, y en la matriz Q los precios a los que vende el kg de cada producto final:

$$P: \begin{array}{c|ccc} & A & B & C \\ \hline \textit{natural} & 550 & 400 & 240 \\ \textit{descafeinado} & 260 & 200 & 100 \end{array} \qquad Q: \begin{array}{c|ccc} & A & B & C \\ \hline \textit{natural} & 2.20 & 2.75 & 2.50 \\ \textit{descafeinado} & 3.20 & 3.90 & 3.60 \end{array}$$

Efectúe el producto $P \cdot Q^t$ y explique el significado económico de cada uno de los elementos de la diagonal principal de la matriz resultante. *(1 punto)*

$$\boxed{P \cdot Q^t =} \begin{pmatrix} 550 & 400 & 240 \\ 260 & 200 & 100 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.20 & 3.20 \\ 2.75 & 3.90 \\ 2.50 & 3.60 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2910 & 4184 \\ 1372 & 1972 \end{pmatrix}}$$

2910 son los ingresos que obtiene en total por la modalidad *natural* de café.
1972 son los correspondientes a *descafeinado*.

3) Hallar A^{2016}, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *(2 puntos)*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Parece que la fórmula que se obtiene es $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Si así fuera, debería cumplirse que $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 2(n+1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Supongamos que es cierta la fórmula propuesta para A^n. Veamos si se verifica la de A^{n+1}, con lo cual, como es cierta para $n = 1$, lo será para $n = 2$; y como será, entonces, cierta para $n = 2$, lo será para $n = 3$; y así para todo $n \in$ N:

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2+2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2(n+1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la fórmula es cierta. En consecuencia:

$$A^{2016} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \cdot 2016 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 4032 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

4) Clasificar según el número de soluciones y resolver por el método de Gauss en su forma matricial (no es válido ningún otro método) el siguiente sistema. Si tuviera más de una solución, dar dos soluciones concretas: *(2 puntos)*

$$\left.\begin{array}{r} 3x-8y-3z=1 \\ 3x-8y+2z=-4 \\ -3x+8y+8z=-6 \end{array}\right\}$$

Realizamos transformaciones lineales de filas en la matriz ampliada con el fin de triangularizar la matriz de los coeficientes (formada por la matriz ampliada salvo la última columna:

$$A'=\begin{pmatrix} 3 & -8 & -3 & 1 \\ 3 & -8 & 2 & -4 \\ -3 & 8 & 8 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3+F_1]{F_2-F_1} \begin{pmatrix} 3 & -8 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-F_2}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -8 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como la F_3 resultante es nula, la eliminamos. El sistema queda triangularizado. <u>No bastaba con el primer paso, porque hay que dar dos pasos (hay 3 filas)</u>. Queda con una ecuación menos que incógnitas, por lo que es un $\boxed{\text{sistema compatible indeterminado}}$.

Llamamos $y=t$ y reconstruimos el sistema:

- <u>2ª ecuación</u>: $5z=-5 \Rightarrow z=-1$
- <u>1ª ecuación</u>: $3x-8t+3=1 \Rightarrow 3x=8t-2 \Rightarrow x=\dfrac{8t-2}{3}$

Luego las infinitas soluciones del sistema tienen la forma: $\boxed{\left(\dfrac{8t-2}{3},\ t,\ -1\right)}$.

Las soluciones concretas que nos piden las obtenemos dando valores (elegidos arbitrariamente) a t. Por ejemplo:

- $t=0$: $\boxed{(-2/3, 0, -1)}$
- $t=1$: $\boxed{(2, 1, -1)}$

5) Dada la siguiente matriz, hallar los valores posibles para m sabiendo que hay una fila es combinación lineal de otras: *(2 puntos)*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m+1 & 0 \\ 1 & 1 & m-1 \end{pmatrix}$$

Una fila es combinación lineal de otras si, y sólo si el determinante de la matriz (por ser cuadrada) vale 0. Obligamos, entonces, a que así suceda:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m+1 & 0 \\ 1 & 1 & m-1 \end{vmatrix} \underset{F_3-F_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m+1 & 0 \\ 0 & 1 & m \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} m+1 & 0 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m(m+1)$$

En lugar de *Sarrus*, hemos sumado a F_3 una combinación lineal de F_1 y desarrollado por *adjuntos de la columna* 1. El determinante vale 0 si, y sólo si $m(m+1)=0 \Leftrightarrow$ (un producto se anula si y sólo si lo hace algún factor) $\boxed{m = 0 \text{ ó } m=-1}$.

IES Fernando de Herrera **Curso 2016 / 17**

Primer trimestre – Observación evaluable escrita nº 2 – 2º Bach CCSS

NOMBRE: ____

Instrucciones: **1)** Todos los **folios** deben tener el **nombre** y estar **numerados** en la parte superior. **2)** Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. **3)** No se puede usar **corrector ni lápiz**, y el bolígrafo debe ser de **tinta indeleble**. Se aconseja no usar borrador. **4)** Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar** la respuesta a una pregunta con las de otras. **5)** **Desatender las instrucciones puede penalizarse con hasta 1 punto** o la **anulación** en caso de usar tinta corregible.

1) Considere las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix}-3 & 3 & 2\\ -8 & 7 & 4\\ 8 & -6 & -3\end{pmatrix}$$

   a) Calcule, si es posible, la inversa de A. *(0,5 puntos)*
   b) Halle la matriz X que verifica $AX+B=2A$. *(1 punto)*
   c) Calcule B^2 y B^{2016}. *(0,2+0,8 puntos)*

2) Clasificar y resolver el siguiente sistema de ecuaciones. Si tuviese más de una solución, dar dos soluciones concretas: *(Clasif: 0,5 + Resol: 1 + Sols concr si bien resuelto: 1)*

$$\left.\begin{array}{r}3x-2y-3z=2\\ 2x+3y+5z=4\\ -4x+7y+11z=0\end{array}\right\}$$

3) a) Calcular el valor del siguiente determinante sin aplicar la Regla de Sarrus:

$$\begin{vmatrix}-2 & 5 & 3\\ 3 & 2 & 7\\ 4 & -3 & 5\end{vmatrix}$$ *(1,2 puntos)*

   b) Hallar los valores de a y b para que se verifique: $B\cdot C^t=A$: *(1,3 puntos)*

$$A=\begin{pmatrix}-1 & -6\\ 2 & 4\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix}a & 0 & 1\\ 3 & -1 & b\end{pmatrix}$$

4) Se desea invertir un máximo de 100000 € en dos productos financieros A y B que tienen una rentabilidad del 2% y del 2.5% respectivamente. Se sabe que el producto B exige una inversión mínima de 10000 € y, por cuestiones de riesgo, no se desea que la inversión en B supere el triple de lo invertido en A. ¿Cuánto se debe invertir en cada producto para que el beneficio sea máximo y cuál sería dicho beneficio?*(2,5 p)*

IES Fernando de Herrera **Curso 2016 / 17**

Primer trimestre – Observación evaluable escrita nº 2 – 2º Bach CCSS

SOLUCIONES

1) Considere las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -8 & 7 & 4 \\ 8 & -6 & -3 \end{pmatrix}$$

a) Calcule, si es posible, la inversa de A. *(0,5 puntos)*

Como $|A| = -1 + 2 = 1 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$. La calculamos:

$$A^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A^t) = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}}$$

b) Halle la matriz X que verifica $AX + B = 2A$. *(1 punto)*

Como tenemos la inversa de A, procedemos así:

$AX + B = 2A \Rightarrow$ (Restando B en ambos miembros): $AX = 2A - B \Rightarrow$

$\Rightarrow$ (Multiplicando por A^{-1} a la izquierda en ambos): $\boxed{X = A^{-1}(2A - B)}$.

Y como:

$$2A - B = 2\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -8 & 7 & 4 \\ 8 & -6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 8 & -5 & -4 \\ -12 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

Se tiene:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 8 & -5 & -4 \\ -12 & 8 & 5 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 13 & -9 & -5 \\ 8 & -5 & -4 \\ 6 & -5 & -1 \end{pmatrix}}$$

c) Calcule B^2 y B^{2016}. *(0,2+0,8 puntos)*

$$B^2 = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -8 & 7 & 4 \\ 8 & -6 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -8 & 7 & 4 \\ 8 & -6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

Por tanto: $\boxed{B^{2016} =} (B^2)^{1008} = (I_3)^{1008} \boxed{= I_3}$. O sea, la matriz *identidad* de orden 3.

2) Clasificar y resolver el siguiente sistema de ecuaciones. Si tuviese más de una solución, dar dos soluciones concretas: *(Clasif: 0,5 + Resol: 1 + Sols concr si bien resuelto: 1)*

$$\left.\begin{aligned} 3x - 2y - 3z &= 2 \\ 2x + 3y + 5z &= 4 \\ -4x + 7y + 11z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Por el método de Gauss, triangularizamos la *matriz de los coeficientes*, inmersa en la *matriz ampliada*:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \\ -4 & 7 & 11 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{3F_2-2F_1 \\ 3F_3+4F_1}} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 13 & 21 & 8 \\ 0 & 13 & 21 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-F_2} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 13 & 21 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hemos conseguido triangularizar el sistema. Como ninguna fila es toda de 0 salvo la última columna, el sistema es *compatible*. La última fila es nula, por lo que prescindimos de ella, quedándonos con un sistema triangularizado con menos filas (2) que ecuaciones (3), por lo que se trata de un *sistema compatible indeterminado*, con infinitas soluciones.

Reconstruimos el sistema resultante, para resolverlo. A la incógnita que sobra (tenemos una incógnita más que el número de ecuaciones, ya que hemos eliminado la F_3), la llamamos t, siendo éste un valor libremente elegido por nosotros (hay infinitas formas de hacerlo: una por cada número real), y la pasamos al segundo miembro. Debemos elegir, para ello, y ó z, pues si llamásemos t a x, perderíamos la triangularización al pasarla al segundo miembro. Elegimos $z = t$:

$$\left.\begin{array}{r} 3x-2y \quad -3t=2 \\ 13y+21t=8 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x-2y \quad = \quad 2+3t \\ 13y=8-21t \end{array}\right\} \Rightarrow \text{(2ª ec.)} \ y=\frac{8-21t}{13}$$

Sustituimos en la 1ª: $3x-2\dfrac{8-21t}{13} = 2+3t \Rightarrow \dfrac{39x-2(8-21t)}{13}=2+3t \Rightarrow$

$$\Rightarrow 39x-16+42t=26+39t \Rightarrow 39x=26+39t+16-42t \Rightarrow x=\frac{42-3t}{39}=\frac{14-t}{13}$$

El esquema general de las infinitas soluciones, en función de t, es:

$$\boxed{\left(\frac{14-t}{13},\ \frac{8-21t}{13},\ t\right)}$$

Dando valores a t obtenemos las diferentes soluciones. Nos piden 2. Por ejemplo:

- $t = 0$: (14/13, 8/13, 0)
- $t = 1$: (1, –1, 1)

3) a) Calcular el valor del siguiente determinante sin aplicar la Regla de Sarrus:

$$\begin{vmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 7 \\ 4 & -3 & 5 \end{vmatrix}$$

(1,2 puntos)

Aplicaremos transformaciones elementales de filas para simplificarlo y desarrollar por adjuntos de una columna (también podría ser al revés: transformaciones de columnas para desarrollar por una fila). Recordar que si la fila sustituida es multiplicada por un número, hay que multiplicar todo el determinante por el inverso de dicho número:

$$\begin{vmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 7 \\ 4 & -3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 2F_2+3F_1 \\ F_3+2F_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 0 & 19 & 23 \\ 0 & 7 & 11 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(-2)\begin{vmatrix} 19 & 23 \\ 7 & 11 \end{vmatrix} =$$

$$= -(19\cdot 11 - 23\cdot 7) = \boxed{-48}$$

b) Hallar los valores de a y b para que se verifique: $B\cdot C^t = A$: *(1,3 puntos)*

$$A=\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 3 & -1 & b \end{pmatrix}$$

Realizamos el producto e igualamos el resultado a A:

$$B{\cdot}C^t=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & 3\\ 0 & -1\\ 1 & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a+2 & -4+2b\\ a-1 & 3-b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -6\\ 2 & 4\end{pmatrix}$$

La igualdad es posible porque tienen la misma dimensión. Además, los elementos que ocupan la misma posición en cada matriz deben coincidir, por lo que deben ser cierta, simultáneamente, las siguientes igualdades:

$$\begin{cases}-a+2=-1\Rightarrow a=3\\ -4+2b=-6\Rightarrow 2b=-2\Rightarrow b=-1\\ a-1=2\Rightarrow a=3\\ 3-b=4\Rightarrow b=-1\end{cases}$$

Los mismos valores de a y b hacen ciertas las cuatro ecuaciones a la vez. Si esto no hubiese sido así, el problema no tendría solución. Por tanto:

$$\boxed{a=3 \text{ con } b=-1}$$

4) Se desea invertir un máximo de 100000 € en dos productos financieros A y B que tienen una rentabilidad del 2% y del 2.5% respectivamente. Se sabe que el producto B exige una inversión mínima de 10000 € y, por cuestiones de riesgo, no se desea que la inversión en B supere el triple de lo invertido en A. ¿Cuánto se debe invertir en cada producto para que el beneficio sea máximo y cuál sería dicho beneficio?*(2,5 p)*

Llevamos los datos del problema a una tabla, que nos ayudará a plantearlo:

Productos financieros	€ a invertir	Rentabilidad
A	x	$0.02x$
B	y	$0.025y$
Restricciones:	$x \geq 0$; $y \geq 0$ $y \geq 10000$ $y \leq 3x$ $x + y \leq 10000$	$F(x, y) = 0.02x + 0.025y$

Las restricciones proceden de que:

a) No podemos invertir una cantidad negativa en ninguno de los productos.
b) La inversión en B (y) tiene que ser, como mínimo, de 10000 €.
c) La inversión en B (y) no puede superar el triple de lo invertido en A ($3x$).
d) La inversión total es de 100000 €.

En la última columna hemos puesto la función objetivo, que hay que maximizar.

Vamos a dibujar la *región factible*, trabajando con cada una de las *restricciones*:

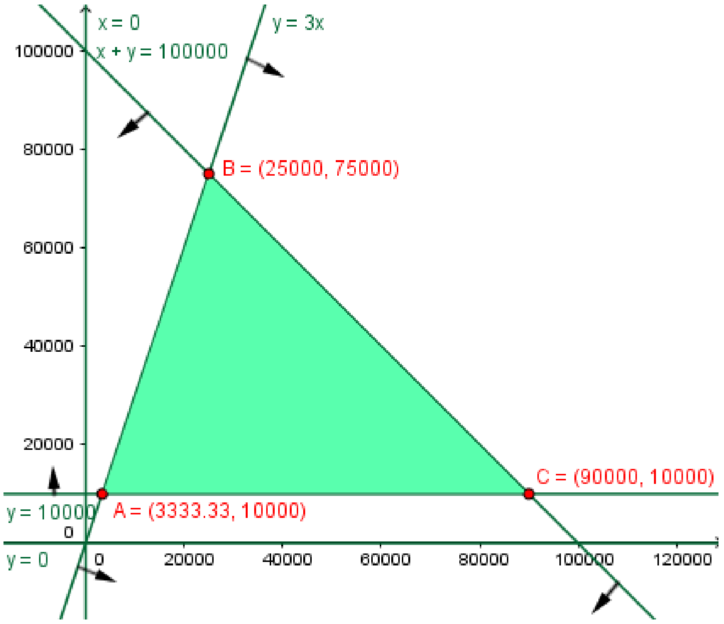
- $x \geq 0$, $y \geq 0$ nos limitan al primer cuadrante.
- $y \geq 10000$ es el semiplano que queda a la derecha de la recta vertical $y = 10000$.
- $y \leq 3x$ *Semipl. inferior* a la recta $y = 3x$. *Tabla de valores*:

x	0	1000
y	0	3000

- $x + y \leq 100000 \Leftrightarrow y \leq -x + 100000$: Semiplano inferior a la recta $y = -x + 100000$, cuya tabla de valores es:

x	0	100000
y	100000	0

Por tanto, obtenemos el recinto de la figura, donde para cada recta se ha señalado con flechitas el semiplano que resuelve su correspondiente inecuación. Basándonos en ella, calculamos las coordenadas de los vértices que están señalados (no podemos hacerlo *nunca* gráficamente, sino resolviendo los correspondientes sistemas de ecuaciones).



Tenemos que calcular los vértices, lo que no puede hacerse nunca desde el gráfico:

- $\left.\begin{array}{r} y=3x \\ y=10000 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x=10000 \Rightarrow x=\dfrac{10000}{3}$. Luego: $\boxed{A(10000/3,\ 10000)}$.
- $\left.\begin{array}{r} x+y=100000 \\ \underline{-3x+y=0} \end{array}\right\} \Rightarrow y = 3\cdot 25000 \Rightarrow y = 75000$

  $\text{Restando}: \ 4x=100000 \Rightarrow x=25000$

  Luego: $\boxed{B(25000,\ 75000)}$.
- $\left.\begin{array}{r} x+y=100000 \\ \underline{y=\ \ 10000} \end{array}\right\} \Rightarrow$ Luego: $\boxed{C(90000,\ 10000)}$.

  $\text{Restando}: \ x=90000$

Por último, evaluamos la función objetivo en cada vértice:

- $F(A) = F(10000/3,\ 10000) = 0.02\cdot 10000/3 + 0.025\cdot 10000 = 950/3 = 316.67$
- $F(B) = F(25000,\ 75000) = 0.02\cdot 25000 + 0.025\cdot 75000 = 2375$
- $F(C) = F(90000,\ 10000) = 0.02\cdot 90000 + 0.025\cdot 10000 = 2050$

De donde el ingreso máximo es de 2375 €, que se consigue invirtiendo 25000 € en A y 75000 en B.

IES Fernando de Herrera **Curso 2016 / 17**

Primer trimestre – Recuperación – 2º Bach CCSS

NOMBRE: ____

Instrucciones: **1)** Todos los **folios** deben tener el **nombre** y estar **numerados** en la parte superior. **2)** Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. **3)** No se puede usar **corrector ni lápiz**, y el bolígrafo debe ser de **tinta indeleble**. Se aconseja no usar borrador. **4)** Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar** la respuesta a una pregunta con las de otras. **5)** **<u>Desatender las instrucciones puede penalizarse con hasta 1 punto</u>** <u>o la</u> **<u>anulación</u>** en caso de usar tinta corregible.

1) Sea C la matriz que depende de un parámetro m, dada por

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & m \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 17 \end{pmatrix}$$

a) ¿Para qué valores del parámetro m no tiene inversa la matriz C? *(1 punto)*

b) Calcula la matriz inversa de C para $m = 2$ *(1,5 puntos)*

2) Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Calcule $(A - I_2) \cdot B$, siendo I_2 la matriz identidad de orden 2. *(1 punto)*

b) Calcule la matriz X que verifica $A \cdot X + B = C.$ *(1,5 puntos)*

3) Clasificar y dar todas las soluciones del siguiente sistema, resolviéndolo por el método de Gauss. Si tuviera más de una solución, dar una concreta:

$$\left.\begin{array}{r} 4x + 3y + \ \ 2z = \ \ 4 \\ -3x + 2y + \ \ 5z = \ \ 8 \\ -5x + 9y + 17z = 28 \end{array}\right\}$$

(2,5 puntos)

4) Un comerciante quiere dar salida a 400 kg de avellanas, 300 kg de nueces y 400 kg de almendras. Para ello hace dos tipos de lotes: los de tipo A contienen 2 kg de avellanas, 2 kg de nueces y 1 kg de almendras; y los de tipo B contienen 3 kg de avellanas, 1 kg de nueces y 4 kg de almendras. El precio de venta de cada lote es de 20 euros para los del tipo A y de 40 euros para los del tipo B. ¿Cuántos lotes de cada tipo debe vender para obtener el máximo ingreso y a cuánto asciende éste? *(2,5 ptos)*

SOLUCIONES

1) Sea C la matriz que depende de un parámetro m, dada por

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & m \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 17 \end{pmatrix}$$

a) ¿Para qué valores del parámetro m no tiene inversa la matriz C? *(1 punto)*

Una matriz tiene inversa si, y sólo si su determinante es distinto de cero. Veamos cuándo ocurre.

$$det(C) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & m \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 17 \end{vmatrix} \overset{\boxed{C_3+C_1}}{\overset{\downarrow}{=}} \begin{vmatrix} 2 & -1 & m+2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 15 \end{vmatrix} \overset{\boxed{\text{Adj de } F_2}}{\overset{\downarrow}{=}} -1\cdot\begin{vmatrix} -1 & m+2 \\ 1 & 15 \end{vmatrix} \overset{\boxed{F_1+F_2}}{\overset{\downarrow}{=}}$$

$$= -\begin{vmatrix} 0 & m+17 \\ 1 & 15 \end{vmatrix} = m+17$$

Se han aplicado propiedades de determinantes, pero también podía haberse desarrollado por la regla de Sarrus. Según eso, el determinante vale 0 si $m = -17$. Por tanto, $\boxed{\text{no existe matriz inversa si, y sólo si } m = -17}$.

b) Calcula la matriz inversa de C para $m = 2$ *(1,5 puntos)*

Si $m = 2 \Rightarrow |C| = 19$ y existe C^{-1}.

$$Adj(C) = \begin{vmatrix} 1 & -15 & 1 \\ 19 & 38 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \boxed{C^{-1} =} \frac{1}{19}\left[Adj(C)\right]^t = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{1}{19} & 1 & \frac{1}{19} \\ -\frac{15}{19} & 2 & \frac{4}{19} \\ \frac{1}{19} & 0 & \frac{1}{19} \end{pmatrix}}$$

2) Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Calcule $(A - I_2)\cdot B$, siendo I_2 la matriz identidad de orden 2. *(1 punto)*

$$(A-I_2)\cdot B = \left[\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}}$$

b) Calcule la matriz X que verifica $A\cdot X + B = C$. *(1,5 puntos)*

$$A\cdot X + B = C \Rightarrow A\cdot X = C - B \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}(C-B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_2X = A^{-1}(C-B) \Rightarrow X = A^{-1}(C-B).$$

Calculemos A^{-1}. En primer lugar, comprobamos que existe, calculando su determinante:

$|A| = -2$. Como es no nulo, existe A^{-1}.

$$A^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$\boxed{X =} A^{-1}(C–B) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -1 & 5/2 & -2 \end{pmatrix}}$$

3) Clasificar y dar todas las soluciones del siguiente sistema, resolviéndolo por el método de Gauss. Si tuviera más de una solución, dar una concreta:

$$\left.\begin{array}{r} 4x+3y+\ 2z=\ 4 \\ -3x+2y+\ 5z=\ 8 \\ -5x+9y+17z=28 \end{array}\right\}$$

(2,5 puntos)

Lo resolvemos por Gauss. Escribimos la matriz ampliada y aplicamos las transformaciones lineales de filas que indicamos:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 4 \\ -3 & 2 & 5 & 8 \\ -5 & 9 & 17 & 28 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-3F_1]{3F_2-2F_1} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 4 \\ -17 & 0 & 11 & 16 \\ -17 & 0 & 11 & 16 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-F_2} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 4 \\ -17 & 0 & 11 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como tenemos *triangularizada* la matriz y podemos eliminar la F_3 por ser toda de 0, nos quedan menos ecuaciones (2) que incógnitas (3), por lo que estamos ante un **sistema compatible indeterminado**. Lo reconstruimos:

$$\left.\begin{array}{r} 4x+3y+2z=4 \\ -17x\quad +11z=16 \end{array}\right\}$$

Llamamos $z = t$, siendo t un número arbitrario (ya no es incógnita), y lo pasamos al segundo miembro (también podríamos haber llamado $x = t$, pero no deberíamos hacerlo con y, porque perderíamos la triangularización):

$$\left.\begin{array}{r} 4x+3y=4-2t \\ -17x\quad =16-11t \end{array}\right\} \Rightarrow (2^{\text{a}}\text{ ec.}):\ x = \frac{16-11t}{-17} = \frac{-16+11t}{17}$$

Nunca debe dejarse, en una expresión final, un denominador negativo, por lo que hemos multiplicado numerador y denominador por –1 para evitarlo (al hacerlo, la expresión que tenemos tiene el mismo valor, pues –1/(–1) =1). Sustituimos en la 1ª ec:

$$4\frac{-16+11t}{17}+3y=4-2t \Rightarrow 4(–16 + 11t) + 51y = 68 – 34t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow – 64 + 44t + 51y = 68 – 34t \Rightarrow 51t = 68 + 64 – 34t – 44t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{132-78t}{51} = \frac{44-26t}{17}$$

Así, la estructura general de las soluciones es: $\boxed{\left(\frac{-16+11t}{17}, \frac{44-26t}{17}, t\right)}$.

Obtendremos dos soluciones concretas (sólo piden una) dando valores arbitrarios a t. Por ejemplo:

- $t = 3$: $(1, -2, 3)$
- $t = 0$: $(-16/17, 44/17, 0)$

4) Un comerciante quiere dar salida a 400 kg de avellanas, 300 kg de nueces y 400 kg de almendras. Para ello hace dos tipos de lotes: los de tipo A contienen 2 kg de avellanas, 2 kg de nueces y 1 kg de almendras; y los de tipo B contienen 3 kg de avellanas, 1 kg de nueces y 4 kg de almendras. El precio de venta de cada lote es de 20 euros para los del tipo A y de 40 euros para los del tipo B. ¿Cuántos lotes de cada tipo debe vender para obtener el máximo ingreso y a cuánto asciende éste? *(2,5 ptos)*

Organizamos los datos del problema en una tabla que nos ayude a plantearlo aplicando las técnicas de Programación Lineal.

En primer lugar, decidimos las variables. Como se nos solicita el nº de lotes de cada tipo, ya las tenemos claras. Colocaremos en filas los datos correspondientes a cada lote.

Por otra parte, las restricciones nos vienen dadas porque el número de lotes no puede ser negativo y por la cantidad de kg disponibles de cada producto (avellanas, nueces y almendras).

Por último, al final colocamos una columna correspondiente a los datos económicos: se trata de maximizar los ingresos. Se hace teniendo en cuenta el ingreso que reporta cada unidad vendida de cada lote. Se supone que se venden los x lotes confeccionados del tipo *A* y los y del tipo *B*.

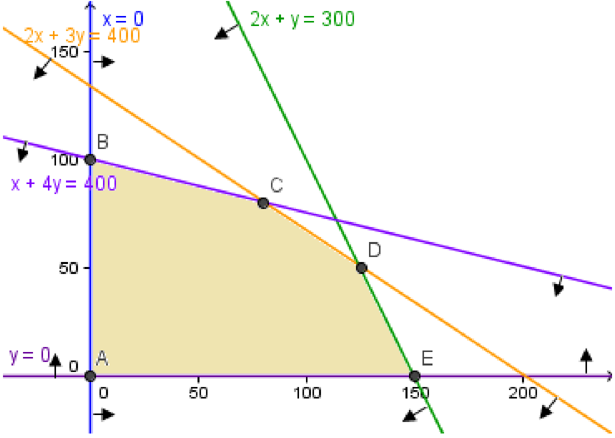
Por tanto:

	Nº de lotes	Contenido en Avellanas (kg)	Contenido en Nueces (kg)	Contenido en Almendras (kg)	Ingresos
Lotes tipo *A*	x	$2x$	$2x$	$1x$	$20x$
Lotes tipo *B*	y	$3y$	$1y$	$4y$	$40y$
Restricciones:	$x \geq 0; y \geq 0$	$2x + 3y \leq 400$	$2x + y \leq 300$	$x + 4y \leq 400$	$F(x, y) = 20x + 40y$ Maximizar

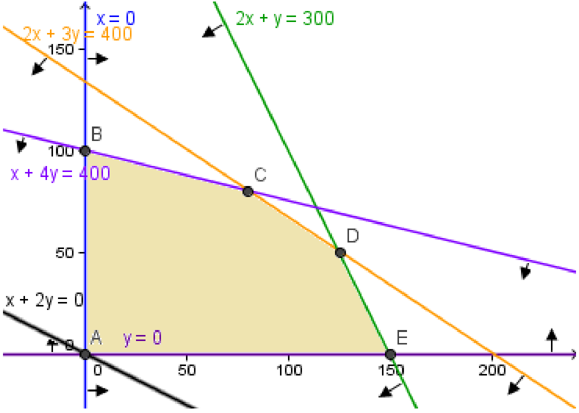
Seguidamente, dibujamos un gráfico con las restricciones. Cambiamos en cada una de las cinco inecuaciones el signo de desigualdad por un igual, obteniendo así la ecuación de una recta. Trazamos dichas rectas.

- $x = 0$ e $y = 0$ son los ejes *OY* y *OX* respectivamente $\Rightarrow$ $x \geq 0$ e $y \geq 0$ nos restringen, pues, al primer cuadrante, que es donde se verifican ambas inecuaciones a la vez.
- Para $2x + 3y = 400$, hacemos $x = 0 \Rightarrow y = 400/3$. Y también $y = 0 \Rightarrow x = 200$, Luego pasa por $(0, 400/3)$ y $(200, 0)$. Esta recta divide al plano en dos semiplanos. Para decidir cuál de ellos verifica la inecuación $2x + 3y \leq 400$ podemos optar por despejar y en la inecuación: $y \leq \frac{-2x+400}{3}$, con lo que sabemos que, como los puntos que están sobre la recta verifican la misma expresión, pero con el signo =, los puntos cuya y es inferior a los que están sobre la recta, esto es, aquellos que quedan por debajo de la misma, son la solución de la inecuación. Pero otra opción para decidir cuál es el semiplano solución es tomar un punto que no esté en la recta, por ejemplo, el (0, 0), y sustituirlo en la inecuación, a ver si lo verifica:
$$2\cdot 0 + 3\cdot 0 \leq 400 \Leftrightarrow 0 \leq 400$$
que resulta cierto. Por tanto, de los dos semiplanos, la solución es el que contiene al punto (0, 0). Señalamos dicho semiplano con unas flechitas sobre la recta $2x + 3y = 400$.

Repetimos cálculos similares para las otras dos inecuaciones. El gráfico, en el que se han destacado los vértices de la *región factible*, es el siguiente:



Para optimizar la función objetivo, podemos optar por un método gráfico, consistente en dibujar las funciones de la forma $20x + 40y = c$. Son rectas paralelas. Para un c determinado, todos los puntos (x, y) de la recta proporcionan los mismos ingresos. Como el coeficiente de y es positivo: 40, de entre todas estas paralelas, cuanto más alta esté la recta en el gráfico, mayor es el c que le corresponde. Hemos de elegir la más alta posible que contenga algún punto de la región factible. Trazamos $20x + 40y = 0$, y la recta que buscamos es paralela a ella. Por tanto, se trata de la que pasa por C o por D (es dudoso). Lo vemos en el gráfico adjunto.



Para decidir la solución, evaluamos la función objetivo en C y en D y, comparando los resultados, decidimos en cuál de ellos está la solución.

La otra opción, que es la que vamos a desarrollar, consiste en calcular las coordenadas de los cinco vértices y comparar los resultados de la función objetivo en cada uno de ellos. Sabemos que la solución óptima estará sobre un vértice o sobre el segmento que une dos consecutivos. Por tanto, de estos resultados obtendremos la solución.

Calculemos los cinco vértices:

- $\boxed{A(0, 0)}$, pues es la intersección de los ejes.
- B es la intersección de la recta $x + 4y = 400$ con el eje OY, cuya ecuación es $x = 0$. Sustituyendo este valor en la ecuación de la otra recta: $0 + 4y = 400 \Rightarrow y = 100$. Luego $\boxed{B(0, 100)}$.
- Análogamente:

$$\left.\begin{array}{r} x+4y=400 \\ 2x+3y=400 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} \cdot(-2): -2x-8y=-800 \\ 2x+3y=400 \end{array}\right\} \\ \hline -5y=-400 \end{array} \Rightarrow y=\frac{-400}{-5}=80$$

Sustituyendo en la primera: $x + 4 \cdot 80 = 400 \Rightarrow x = 400 - 320 = 80$. Luego $\boxed{C(80, 80)}$.

- $\left.\begin{array}{r} 2x+y=300 \\ 2x+3y=400 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} \cdot(-1):-2x-y=-300 \\ 2x+3y=400 \\ \hline 2y=100 \end{array} \Rightarrow y=50$

  Sustituyendo en la primera: $2x + 50 = 300 \Rightarrow x = 250/2 = 125$. Con lo que $\boxed{D(125, 50)}$.
- Haciendo $y = 0$ en $2x + y = 300$: $2x = 300 \Rightarrow x = 150 \Rightarrow \boxed{E(150, 0)}$.

Calculamos la función objetivo en cada uno de los vértices:

- $F(A) = F(0, 0) = 20\cdot0 + 40\cdot0 = 0$
- $F(B) = F(0, 100) = 20\cdot0 + 40\cdot100 = 4000$
- $F(C) = F(80, 80) = 20\cdot80 + 40\cdot80 = 4800$
- $F(D) = F(125, 50) = 20\cdot125 + 40\cdot50 = 4500$
- $F(E) = F(150, 0) = 20\cdot150 + 40\cdot0 = 3000$

La solución está en C, y consiste en preparar 80 unidades de cada lote, obteniendo unos ingresos de 4800€.