IES Fernando de Herrera **Curso 2017 / 18**

Primera evaluación - Prueba de observación continua escrita nº 1 – II Bach CCSS

NOMBRE: ____

Instrucciones: **1)** Todos los **folios** deben tener el **nombre** y estar **numerados** en la parte superior. **2)** Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. **3)** No se puede usar **corrector ni lápiz**, y el bolígrafo debe ser de **tinta indeleble**. Se aconseja no usar borrador. **4)** Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar** la respuesta a una pregunta con las de otras. **5)** **Desatender las instrucciones será penalizado**.

1) Una empresa elabora dos productos, A y B. Cada unidad de A requiere 2 horas en una máquina y 5 horas en una segunda máquina. Cada unidad de B necesita 4 horas en la primera máquina y 3 horas en la segunda. Semanalmente se dispone de 100 horas en la primera máquina y de 110 horas en la segunda.
Si la empresa obtiene un beneficio de 70 euros por cada unidad de A, y de 50 euros por cada unidad de B, ¿qué cantidad semanal de cada producto debe producir con objeto de maximizar el beneficio total? ¿Cuál es ese beneficio? *(2,5 puntos)*

2) a) Sean A una matriz de dimensión 5×4, B, una de dimensión $m \times n$ y C de dimensión 3×7. Si sabemos que se puede obtener la matriz ABC, ¿cuál es la dimensión de la matriz B? ¿Y de la matriz ABC? *(1 punto)*

b) Dibujar el grafo cuya matriz de adyacencia es: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *(1 punto)*

3) a) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$, calcular las matrices:

A^tB y B^tA. *(1,5 p)*

b) Calcular el rango de la matriz B del apartado anterior. *(1,5 p)*

4) Una fábrica produce tres tipos de productos A, B y C, distribuyendo su producción entre cuatro clientes C_1, C_2, C_3 y C_4. En el mes de enero, el primer cliente compró 9 unidades de A, 5 de B y 2 de C; el segundo cliente, 3, 8 y 0 respectivamente; el tercero no compró nada y el cuarto 5, 3 y 6 unidades respectivamente.
En febrero, los dos primeros clientes duplicaron sus respectivos pedidos del mes anterior, el tercer cliente compró 4 unidades de cada artículo y el cuarto no hizo ningún pedido.

a) Construir las matrices 4×3 correspondientes a las ventas de los meses de enero y febrero. *(1 punto)*

b) Si los precios de los artículos, en euros por unidad, son 10, 8 y 9 respectivamente, escribir una matriz columna con dichos precios y, mediante operaciones matriciales, obtener una matriz que indique lo que se factura a cada cliente por el total de ambos meses. *(1,5 puntos)*

SOLUCIONES

1) Una empresa elabora dos productos, A y B. Cada unidad de A requiere 2 horas en una máquina y 5 horas en una segunda máquina. Cada unidad de B necesita 4 horas en la primera máquina y 3 horas en la segunda. Semanalmente se dispone de 100 horas en la primera máquina y de 110 horas en la segunda.
Si la empresa obtiene un beneficio de 70 euros por cada unidad de A, y de 50 euros por cada unidad de B, ¿qué cantidad semanal de cada producto debe producir con objeto de maximizar el beneficio total? ¿Cuál es ese beneficio? *(2,5 puntos)*

Traducimos los datos del enunciado a la siguiente tabla, añadiendo dos restricciones obvias: que no puede fabricarse un número negativo de unidades.

	Nº unidades	Máq 1 (h)	Máq 2 (h)	Beneficio
A	x	$2x$	$5x$	$70x$
B	y	$4y$	$3y$	$50y$
Total	$x \geq 0;\ y \geq 0$	$2x + 4y \leq 100$	$5x + 3y \leq 110$	$70x + 50y$

Por tanto, el problema es:
Maximizar la función objetivo: $F(x, y) = 70x + 50y$
Con las restricciones: $x \geq 0;\ y \geq 0;\ 2x + 4y \leq 100 \iff x + 2y \leq 50;\ 5x + 3y \leq 110$

Dibujemos la *región factible* y calculemos los vértices:

- $x + 2y \leq 50 \iff y \leq \dfrac{-x+50}{2}$ luego la solución es el *semiplano inferior a la recta* $x + 2y = 50$, cuya tabla de valores es:

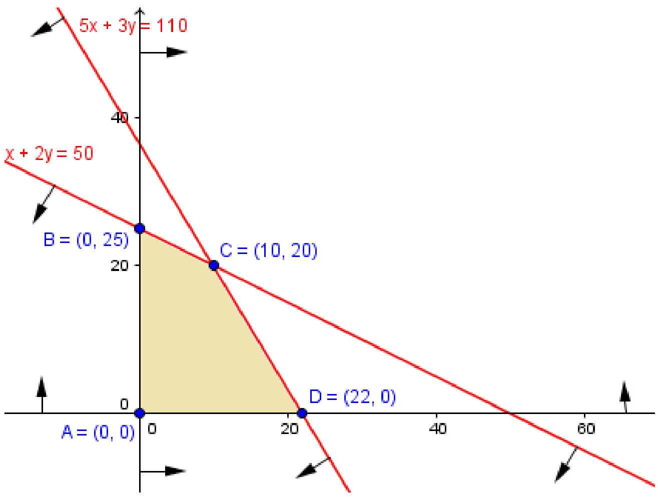
x	0	50
y	25	0

- $5x + 3y \leq 110 \iff y \leq \dfrac{-5x+110}{3}$: *semiplano inferior* a la recta $5x + 3y = 110$:

x	0	22
y	110/3	0

- $x \geq 0;\ y \geq 0$ nos restringen al I cuadrante.

Por tanto, la región factible es la del gráfico, donde con flechas hemos indicado el semiplano solución de cada inecuación.



Los vértices $\boxed{A(0,\ 0)}$, $\boxed{B(0,\ 25)}$, $\boxed{D(22,\ 0)}$ los conocemos de las tablas de valores usadas. El que falta es C (todas las coordenadas ya se han colocado en el gráfico):

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y = 50 \\ 5x + 3y = 110 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} \cdot(-5):\ -5x - 10y = -250 \\ 5x + 3y = 110 \end{array}\right\}$$

$$-7y = -140 \quad \Rightarrow y = \frac{-140}{-7} = 20$$

Sustituyendo en la primera ecuación: $x + 40 = 50 \Rightarrow x = 10 \Rightarrow \boxed{C(10,\ 20)}$.

Por último, evaluamos la *función objetivo* en cada vértice:

$F(A) = F(0, 0) = 0$
$F(B) = F(0, 25) = 50\cdot 25 = 1250$
$F(C) = F(10, 20) = 70\cdot 10 + 50\cdot 20 = 1700$
$F(D) = F(22, 0) = 70\cdot 22 = 1540$

De donde deducimos que el beneficio máximo es de 1700€ y se obtiene elaborando 10 unidades de A y 20 de B.

2) a) Sean A una matriz de dimensión 5×4, B, una de dimensión $m \times n$ y C de dimensión 3×7. Si sabemos que se puede obtener la matriz ABC, ¿cuál es la dimensión de la matriz B? ¿Y de la matriz ABC? *(1 punto)*

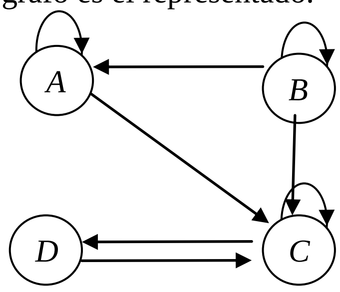
$$\underset{5\times 4}{A} \cdot \underset{m\times n}{B} \cdot \underset{3\times 7}{C}$$

Como el número de columnas de la primera matriz debe coincidir con el de filas de la segunda para que se pueda realizar el producto de dos matrices, deducimos de la expresión anterior que $m = 4$, $n = 3$. Por tanto $\boxed{\dim(B) = 4 \times 3}$.

Por otra parte, en un producto matricial, la matriz resultante tiene el mismo número de filas que la primera matriz y el mismo número de columnas que la última. Por tanto, $\boxed{\dim(ABC) = 5 \times 7}$.

b) Dibujar el grafo cuya matriz de adyacencia es: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *(1 punto)*

Llamando A, B, C, D a los *nodos* o *vértices*, y teniendo en cuenta que cada fila representa a dichos nodos, respectivamente, y lo mismo para cada columna, en cada posición habrá un 1 si hay conexión desde el nodo correspondiente a su fila hasta el que corresponde a su columna. Si hay un 0, no habrá conexión entre dichos nodos. Por tanto, el grafo es el representado.



3) a) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$, calcular las matrices: A^tB y B^tA. *(1,5 p)*

$$\boxed{A^tB =} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}}$$

Por otra parte, $(A^tB)^t = B^t(A^t)^t = B^tA$. Por tanto, esta segunda matriz que nos piden es la traspuesta de la anterior:

$$\boxed{B^tA = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \\ -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}$$

b) Calcular el rango de la matriz B del apartado anterior. *(1,5 p)*

Lo hacemos por Gauss:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & -3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3+F_2} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-2F_1} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hemos trabajado con la columna 1, tomando como *pivote* el elemento de la fila 2 de dicha columna. La fila del pivote (F_2) no se vuelve a tocar. Luego hemos elegido la columna 2 con el 2 de la primera fila como pivote. Ya está *triangularizada*. El rango es el número de filas no nulas: $\boxed{r(B) = 2}$.

4) Una fábrica produce tres tipos de productos A, B y C, distribuyendo su producción entre cuatro clientes C_1, C_2, C_3 y C_4. En el mes de enero, el primer cliente compró 9 unidades de A, 5 de B y 2 de C; el segundo cliente, 3, 8 y 0 respectivamente; el tercero no compró nada y el cuarto 5, 3 y 6 unidades respectivamente.

En febrero, los dos primeros clientes duplicaron sus respectivos pedidos del mes anterior, el tercer cliente compró 4 unidades de cada artículo y el cuarto no hizo ningún pedido.

a) Construir las matrices 4 x 3 correspondientes a las ventas de los meses de enero y febrero. *(1 punto)*

Tomando las filas para los clientes, y las columnas para los productos:

$$\boxed{Enero = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 2 \\ 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 6 \end{pmatrix} \quad Febrero = \begin{pmatrix} 18 & 10 & 4 \\ 6 & 16 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

b) Si los precios de los artículos, en euros por unidad, son 10, 8 y 9 respectivamente, escribir una matriz columna con dichos precios y, mediante operaciones matriciales, obtener una matriz que indique lo que se factura a cada cliente por el total de ambos meses. *(1,5 puntos)*

La matriz columna con los precios es: $\boxed{\begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}}$.

El total pedido en *Enero* y *Febrero* juntos es:

$$Enero + Febrero = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 2 \\ 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 18 & 10 & 4 \\ 6 & 16 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 15 & 6 \\ 9 & 24 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \\ 5 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la matriz que nos da lo facturado a cada cliente, es:

$$\begin{pmatrix} 27 & 15 & 6 \\ 9 & 24 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \\ 5 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 444 \\ 282 \\ 108 \\ 128 \end{pmatrix}}$$

Y los valores están en euros.

IES Fernando de Herrera **Curso 2017 / 18**

Primera evaluación - Prueba de observación continua escrita nº 1 – II Bach CCSS

NOMBRE: ____

Instrucciones: **1)** Todos los **folios** deben tener el **nombre** y estar **numerados** en la parte superior. **2)** Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. **3)** No se puede usar **corrector ni lápiz**, y el bolígrafo debe ser de **tinta indeleble**. Se aconseja no usar borrador. **4)** Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar** la respuesta a una pregunta con las de otras. **5)** **Desatender las instrucciones será penalizado**.

1) Siendo:

$$A=\begin{pmatrix}0 & -3 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ -2 & 0 & -1\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix};\quad D=\begin{pmatrix}-12 & -1 & 4\\ -17 & 2 & 3\\ 15 & -3 & 5\end{pmatrix},$$

resolver la ecuación matricial $-2A\cdot X+B\cdot C=D$. *(2 puntos)*

2) Clasificar, resolver y dar, si es posible, una solución en la que $x=-20$, el siguiente sistema de ecuaciones: *(2 puntos)*

$$\left.\begin{aligned}3x-2y+5z&=-3\\ 2x+3y+4z&=1\\ -2x+10y-2z&=8\end{aligned}\right\}$$

3) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$, se pide:

a) Calcular A^4. *(1 punto)*

b) Calcular A^{2017}. *(1 punto)*

4) Un estudiante ha gastado 57 euros en una papelería por la compra de un libro, una calculadora y un estuche. Sabemos que el libro cuesta el doble que el total de la calculadora y el estuche juntos. Si el precio del libro, la calculadora y el estuche hubieran sufrido un 50%, un 20% y un 25% de descuento respectivamente, el estudiante habría pagado un total de 34 euros. Plantear un sistema de ecuaciones que permita calcular el precio de cada artículo, pero no resolverlo. *(1,5 puntos)*

5) a) Representar el recinto dado por las siguientes inecuaciones, calculando las coordenadas de sus vértices: *(1,2 puntos)*

$$y\le x+3\qquad x+5y\ge 3\qquad 2x+7y\le 30\qquad y\ge 0$$

b) Razonar si el punto $(5, 3)$ pertenece al recinto anterior. *(0,5 puntos)*

c) Obtener los valores mínimo y máximo de la función $F(x, y)=x-y$ en ese recinto, indicando en qué puntos se alcanzan. *(0,8 puntos)*

SOLUCIONES

1) Siendo:

$$A=\begin{pmatrix}0 & -3 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ -2 & 0 & -1\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix};\quad D=\begin{pmatrix}-12 & -1 & 4\\ -17 & 2 & 3\\ 15 & -3 & 5\end{pmatrix},$$

resolver la ecuación matricial $-2A\cdot X+B\cdot C=D$. *(2 puntos)*

Suponiendo que A es *invertible*:

$$-2A\cdot X+B\cdot C=D\ \Rightarrow\ -2A\cdot X+B\cdot C-B\cdot C=D-B\cdot C\ \Rightarrow\ -2A\cdot X=D-B\cdot C\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ -\frac{1}{2}(-2A\cdot X)=-\frac{1}{2}(D-B\cdot C)\ \Rightarrow\ A\cdot X=-\frac{1}{2}(D-B\cdot C)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)(D-B\cdot C)\ \Rightarrow$$

Como $A^{-1}\cdot A=I$, $I\cdot X=X$ y en el producto externo puede alterarse el orden en que se escriben el número real y la matriz:

$$\Rightarrow\ \boxed{X=-\frac{1}{2}A^{-1}\cdot(D-B\cdot C)}$$

Calculemos dichos elementos, para hallar X.

$$\boxed{D-B\cdot C=}\begin{pmatrix}-12 & -1 & 4\\ -17 & 2 & 3\\ 15 & -3 & 5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-12 & -1 & 4\\ -17 & 2 & 3\\ 15 & -3 & 5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2 & 3 & 2\\ -3 & 4 & 3\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}-10 & -4 & 2\\ -14 & -2 & 0\\ 16 & -2 & 4\end{pmatrix}}$$

Por otra parte: $|A|=\begin{vmatrix}0 & -3 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ -2 & 0 & -1\end{vmatrix}=6-4-3=-1\ \Rightarrow\ \exists A^{-1}$.

$$A^{t}=\begin{pmatrix}0 & 1 & -2\\ -3 & -2 & 0\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ \text{Adj}(A^{t})=\begin{pmatrix}2 & -3 & -1\\ -1 & 2 & 1\\ -4 & 6 & 3\end{pmatrix}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \boxed{A^{-1}=}\ \frac{1}{|A|}\ \text{Adj}(A^{t})=\boxed{\begin{pmatrix}-2 & 3 & 1\\ 1 & -2 & -1\\ 4 & -6 & -3\end{pmatrix}}$$

Finalmente:

$$\boxed{X=}-\frac{1}{2}A^{-1}\cdot(D-B\cdot C)=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2 & 3 & 1\\ 1 & -2 & -1\\ 4 & -6 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-10 & -4 & 2\\ -14 & -2 & 0\\ 16 & -2 & 4\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-6 & 0 & 0\\ 2 & 2 & -2\\ -4 & 2 & -4\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ -1 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 2\end{pmatrix}}.$$

2) Clasificar, resolver y dar, si es posible, una solución en la que $x = -20$, el siguiente sistema de ecuaciones: *(2 puntos)*

$$\left.\begin{array}{r} 3x-2y+5z=-3 \\ 2x+3y+4z=1 \\ -2x+10y-2z=8 \end{array}\right\}$$

La última ecuación es simplificable entre 2. Por tanto:

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 & -3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ -1 & 5 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2+2F_3]{F_1+3F_3} \begin{pmatrix} 0 & 13 & 2 & 9 \\ 0 & 13 & 2 & 9 \\ -1 & 5 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1-F_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 2 & 9 \\ -1 & 5 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

La tenemos triangularizada. Como ninguna fila ha resultado ser nula salvo la última posición, el sistema es compatible. Como las filas nulas se descartan, quedan menos filas que incógnitas, por lo que es un $\boxed{\textit{sistema compatible indeterminado}}$.

Llamamos $\boxed{y = t}$. Podríamos elegir también $z = t$, pero y tiene coeficientes más complicados que z, lo que nos llevará a denominadores más simples en la forma general de las soluciones. No deberíamos elegir $x = t$, porque perderíamos la triangularización. Sustituyendo en la 2ª ecuación (la 1ª ha quedado descartada):

$$2z = 9 - 13t \;\Rightarrow\; z = \frac{9-13t}{2}$$

Sustituyendo en la tercera: $-x+5t-\dfrac{9-13t}{2}=4 \;\Rightarrow\; -2x + 10t - (9 - 13t) = 8 \;\Rightarrow$

$10t - 9 + 13t - 8 = 2x \;\Rightarrow\; 23t - 17 = 2x \;\Rightarrow\; x = \dfrac{23t-17}{2}$

Luego la forma general de las soluciones es: $\boxed{(x, y, z) = \left(\dfrac{23t-17}{2}, t, \dfrac{9-13t}{2}\right)}$. Por otros caminos: $\boxed{(x, y, z) = \left(\dfrac{-7-23t}{13}, \dfrac{9-2t}{13}, t\right)}$ ó $\boxed{(x, y, z) = \left(t, \dfrac{17+2t}{23}, \dfrac{-7-13t}{23}\right)}$.

Por último, Si $x = -20$, con la primera de estas soluciones, sería obtenida si:

$$\frac{23t-17}{2} = -20 \;\Rightarrow\; 23t - 17 = -40 \;\Rightarrow\; 23t = -23 \;\Rightarrow\; t = -1$$

Y con este valor: $y = t = -1$; $z = \dfrac{9-13(-1)}{2} = 11$. O sea: $\boxed{(x, y, z) = (-20, -1, 11)}$.

3) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Calcular A^4. *(1 punto)*

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^2A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I}.$$

b) Calcular A^{2017}. *(1 punto)*

Como 2017 = 4·504 + 1 (Dividendo = divisor · cociente + resto, en la división de 2017 entre 4), se tiene:

$$\boxed{A^{2017}} = A^{4\cdot 505+1} = A^{4\cdot 505}\cdot A^1 = (A^4)^{505}\cdot A = I^{505}\cdot A = I\cdot A = \boxed{A}$$

4) Un estudiante ha gastado 57 euros en una papelería por la compra de un libro, una calculadora y un estuche. Sabemos que el libro cuesta el doble que el total de la calculadora y el estuche juntos. Si el precio del libro, la calculadora y el estuche hubieran sufrido un 50%, un 20% y un 25% de descuento respectivamente, el estudiante habría pagado un total de 34 euros. Plantear un sistema de ecuaciones que permita calcular el precio de cada artículo, pero no resolverlo. *(1,5 puntos)*

Llamemos:

x = precio del libro
y = precio de la calculadora
z = precio del estuche

Lo que ha gastado en total son 57 euros:

$$x + y + z \quad = \quad 57$$

El libro cuesta el doble que el total de la calculadora y el estuche juntos:

$$x \quad = \quad 2\cdot \quad (y+z)$$

Si descuentan el 50% al libro, el 20% a la calculadora y el 25% al estuche pagaría 34

$$0{,}5x \quad + 0{,}8\,y \quad + 0{,}75z \quad = \quad 34$$

Hay que considerar que si descuentan el 20% a la calculadora, paga el 80% del precio anterior, que es $80\cdot y$ / 100 = 0,8y. Igual para el libro y el estuche.

Luego el sistema pedido es:

$$\boxed{\left.\begin{array}{r} x+y+z=57 \\ x=2(y+z) \\ 0{,}5x+0{,}8y+0{,}75z=34 \end{array}\right\}} \Leftrightarrow \boxed{\left.\begin{array}{r} x+y+z=57 \\ x-2y-2z=0 \\ 50x+80y+75z=3400 \end{array}\right\}} \Leftrightarrow \boxed{\left.\begin{array}{r} x+y+z=57 \\ x-2y-2z=0 \\ 10x+16y+15z=680 \end{array}\right\}}$$

5) a) Representar el recinto dado por las siguientes inecuaciones, calculando las coordenadas de sus vértices: *(1,2 puntos)*

$$y \le x + 3 \qquad x + 5y \ge 3 \qquad 2x + 7y \le 30 \qquad y \ge 0$$

- $y \le x + 3$ es el semiplano inferior a la recta $y = x + 3$:

x	0	–3
y	3	0

- $x + 5y \ge 3 \Leftrightarrow y \ge \dfrac{-x+3}{5}$: semipl. superior a la recta $y = \dfrac{-x+3}{5}$

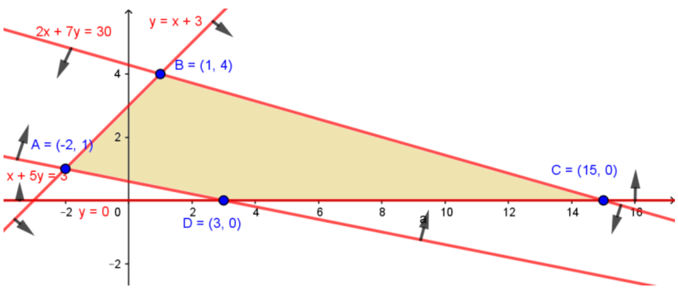
x	0	3
y	3/5	0

- $2x + 7y \le 30 \Leftrightarrow y \le \dfrac{-2x+30}{7}$: semipl. inferior a la recta.

x	0	15
y	30/7	0

- $y \ge 0$: semiplano superior al eje OX, de ecuación $y = 0$.

Esto nos lleva al gráfico adjunto. En él tenemos ya las coordenadas de algunos vértices, que conocemos de las tablas de valores usadas: $\boxed{C(15,\ 0)}$ y $\boxed{D(3,\ 0)}$.



Calculamos el resto:

$$\left.\begin{array}{r} x+5y=3 \\ y=x+3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$ Sustituyendo la 2ª

en la 1ª: $x + 5(x + 3) = 3 \Rightarrow x + 5x + 15 = 3 \Rightarrow 6x = -12 \Rightarrow x = -2$.
Sustituyendo en la 2ª: $y = -2 + 3 = 1 \Rightarrow \boxed{A(-2, 1)}$.

$\left.\begin{array}{r} 2x+7y=30 \\ y=x+3 \end{array}\right\}$ $\Rightarrow$ Sustituyendo la 2ª en la 1ª: $2x + 7x + 21 = 30 \Rightarrow 9x = 9 \Rightarrow$
$x = 1 \Rightarrow$ En la 2ª: $y = 1 + 3 = 4 \Rightarrow \boxed{B(1, 4)}$.

b) Razonar si el punto (5, 3) pertenece al recinto anterior. *(0,5 puntos)*
Hay que comprobar si cumple *todas* las restricciones anteriores. <u>Nunca se puede deducir un dato numérico de un gráfico, porque el gráfico no tiene por qué ser perfecto</u>.

- $y \le x + 3$: $3 \le 5 + 3$, cierto.
- $x + 5y \ge 3$: $5 + 15 \ge 3$, cierto.
- $2x + 7y \le 30$: $10 + 21 \le 30$, falso.

Ya no seguimos. Hay al menos una restricción que no se verifica. Por tanto, el punto $\boxed{\text{no pertenece}}$ al recinto.

c) Obtener los valores mínimo y máximo de la función $F(x, y) = x - y$ en ese recinto, indicando en qué puntos se alcanzan. *(0,8 puntos)*

$F(A) = F(-2, 1) = -2 - 1 = -3$
$F(B) = F(1, 4) = 1 - 4 = -3$
$F(C) = F(15, 0) = 15 - 0 = 15$
$F(D) = F(3, 0) = 3 - 0 = 3$

Por tanto:
$\boxed{\text{El máximo valor es } 15 \text{ y se obtiene en } C(15, 0)}$.

El mínimo valor es -3 y se alcanza en $A(-2, 1)$, en $B(1, 4)$ y en todos los puntos del segmento que los une. Estos puntos, al estar sobre la recta $y = x + 3$, según deducimos del gráfico, verifican esta ecuación, pero con $-2 \le x \le 1$, que son las coordenadas x de los dos puntos citados, en orden.

IES Fernando de Herrera **Curso 2017 / 18**

Primera evaluación - Recuperación – II Bach CCSS

NOMBRE: ____

Instrucciones: **1)** Todos los **folios** deben tener el **nombre** y estar **numerados** en la parte superior. **2)** Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. **3)** No se puede usar **corrector ni lápiz**, y el bolígrafo debe ser de **tinta indeleble**. Se aconseja no usar borrador. **4)** Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar** la respuesta a una pregunta con las de otras. **5)** **Desatender las instrucciones será penalizado**.

1) Siendo:

$$A=\begin{pmatrix}0 & -3 & 2\\ -1 & -2 & 1\\ -2 & 0 & -1\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix};\quad D=\begin{pmatrix}-19 & -6 & -5\\ 0 & -7 & -3\\ 25 & -2 & 5\end{pmatrix},$$

resolver la ecuación matricial $-3A\cdot X - B\cdot C = D$. *(2 puntos)*

2) Clasificar, resolver y dar, si es posible, una solución en la que $x = 69$, el siguiente sistema de ecuaciones usando el método de Gauss en su forma matricial (no es válido ningún otro método): *(2 puntos)*

$$\left.\begin{aligned}4x-3y+5z&=-1\\ 3x+2y+4z&=3\\ 2x+7y+3z&=7\end{aligned}\right\}$$

3) Calcular, justificando claramente la respuesta $\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}^{2017}$ *(1,5 puntos)*

4) Sabemos que el precio del kilo de tomates es la mitad que el del kilo de carne. Además, el precio del kilo de gambas es el doble que el de carne.
Si pagamos 18 euros por 3 kilos de tomates, 1 kilo de carne y 250 gramos de gambas, ¿cuánto pagaríamos por 2 kilos de carne, 1 kilo de tomates y 500 gramos de gambas? (Resolverlo por Rouché-Fröbenius más Cramer). *(2 puntos)*

5) Sea el recinto definido por las siguientes inecuaciones:

$$y \le 2x+1 \qquad y \le 13-4x \qquad x \ge 4-y$$

a) Razonar si el punto de coordenadas $(1.1, 2.8)$ pertenece al recinto. *(0,5 puntos)*

b) ¿En qué puntos alcanza la función $F(x, y) = -3x + 1.5y$ sus valores extremos y cuáles son estos? *(1,5 puntos)*

c) Razone si existe algún punto del recinto en el que la función F se anule. *(0,5 p)*

SOLUCIONES

1) Siendo:

$$A=\begin{pmatrix}0&-3&2\\-1&-2&1\\-2&0&-1\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}2&1\\3&2\\1&3\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}-1&2&1\\0&-1&0\end{pmatrix};\quad D=\begin{pmatrix}-19&-6&-5\\0&-7&-3\\25&-2&5\end{pmatrix},$$

resolver la ecuación matricial $-3A\cdot X-B\cdot C=D$. *(2 puntos)*

Suponiendo que A es *invertible*:

$$-3A\cdot X-B\cdot C=D\ \Rightarrow\ -3A\cdot X-B\cdot C+B\cdot C=D+B\cdot C\ \Rightarrow\ -3A\cdot X=D+B\cdot C\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ -\frac{1}{3}(-3A\cdot X)=-\frac{1}{3}(D+B\cdot C)\ \Rightarrow\ A\cdot X=-\frac{1}{3}(D+B\cdot C)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)(D+B\cdot C)\ \Rightarrow$$

Como $A^{-1}\cdot A=I$, $I\cdot X=X$ y en el producto externo puede alterarse el orden en que se escriben el número real y la matriz:

$$\Rightarrow\ \boxed{X=-\frac{1}{3}A^{-1}\cdot(D+B\cdot C)}$$

Calculemos dichos elementos, para hallar X.

$$\boxed{D+B\cdot C=}\begin{pmatrix}-19&-6&-5\\0&-7&-3\\25&-2&5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&1\\3&2\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&2&1\\0&-1&0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-19&-6&-5\\0&-7&-3\\25&-2&5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2&3&2\\-3&4&3\\-1&-1&1\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}-21&-3&-3\\-3&-3&0\\24&-3&6\end{pmatrix}}$$

Por otra parte: $|A|=\begin{vmatrix}0&-3&2\\-1&-2&1\\-2&0&-1\end{vmatrix}=6-8+3=1\ \Rightarrow\ \exists A^{-1}$.

$$A^t=\begin{pmatrix}0&-1&-2\\-3&-2&0\\2&1&-1\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ \mathrm{Adj}(A^t)=\begin{pmatrix}2&-3&1\\-3&4&-2\\-4&6&-3\end{pmatrix}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \boxed{A^{-1}=}\ \frac{1}{|A|}\mathrm{Adj}(A^t)=\boxed{\begin{pmatrix}2&-3&1\\-3&4&-2\\-4&6&-3\end{pmatrix}}$$

Finalmente:

$$\boxed{X=}-\frac{1}{3}A^{-1}\cdot(D+B\cdot C)=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-3&1\\-3&4&-2\\-4&6&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-21&-3&-3\\-3&-3&0\\24&-3&6\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-9&0&0\\3&3&-3\\-6&3&-6\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}3&0&0\\-1&-1&1\\2&-1&2\end{pmatrix}}.$$

2) Clasificar, resolver y dar, si es posible, una solución en la que $x = 69$, el siguiente sistema de ecuaciones usando el método de Gauss en su forma matricial (no es válido ningún otro método): *(2 puntos)*

$$\left.\begin{array}{r} 4x-3y+5z=-1 \\ 3x+2y+4z=3 \\ 2x+7y+3z=7 \end{array}\right\}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 5 & -1 \\ 3 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 7 & 3 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[2F_2-3F_3]{F_1-2F_3} \begin{pmatrix} 0 & -17 & -1 & -15 \\ 0 & -17 & -1 & -15 \\ 2 & 7 & 3 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2-F_1} \begin{pmatrix} 0 & -17 & -1 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

El sistema está triangularizado. No ha quedado ninguna fila completamente nula salvo la última posición $\Rightarrow$ no es incompatible $\Rightarrow$ es compatible. Podemos eliminar F_2 por ser nula, quedando menos filas que incógnitas $\Rightarrow$ es indeterminado. Luego es un $\boxed{\text{sistema compatible indeterminado}}$.

Llamamos $y = t$. Podríamos hacerlo con z, pero no deberíamos con x porque, al eliminar F_2 y pasar t al segundo miembro perderíamos la triangularización. Elegimos y en lugar de z porque tiene coeficientes más complicados, lo que se traducirá en denominadores más sencillos al poner las incógnitas en función de t.

<u>1ª ec</u>: $-17t - z = -15 \Rightarrow \boxed{15 - 17t = z}$.

<u>3ª ec</u>: $2x + 7t + 3(15 - 17t) = 7 \Rightarrow 2x = 7 - 7t - 3(15 - 17t) \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x = 7 - 7t - 45 + 51t = -38 + 44t \Rightarrow \boxed{x = -19 + 22t}$.

Por tanto, la forma general de las soluciones es: $\boxed{(x, y, z) = (-19 + 22t, t, 15 - 17t)}$.

Hay infinitas, y cada una se obtiene dando un valor arbitrario a t. La solución que proporciona $x = 69$ se obtiene para:

$$-19 + 22t = 69 \Rightarrow 22t = 88 \Rightarrow t = 4$$

De donde la solución es: $\boxed{(x, y, z) = (69, 4, -53)}$.

Despejando de otras formas, se hubieran obtenido, igualmente, las soluciones en la forma:

$$\boxed{(x, y, z) = \left(\frac{7-22t}{17}, \frac{15-t}{17}, t\right)} \text{ ó } \boxed{(x, y, z) = \left(t, \frac{19+t}{22}, \frac{7-17t}{22}\right)}$$

3) Calcular, justificando claramente la respuesta $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{2017}$ *(1,5 puntos)*

Llamando A a la matriz, se tiene:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Por tanto, como dividiendo 2017 entre 2, como dividendo = divisor · cociente + resto, se tiene: $2017 = 2 \cdot 1008 + 1$. Por tanto:

$$\boxed{A^{2017} =} A^{2\cdot 1008 + 1} = A^{2\cdot 1008} \cdot A = (A^2)^{1008} \cdot A = I^{1008} \cdot A = I \cdot A = \boxed{A}$$

4) Sabemos que el precio del kilo de tomates es la mitad que el del kilo de carne. Además, el precio del kilo de gambas es el doble que el de carne.
Si pagamos 18 euros por 3 kilos de tomates, 1 kilo de carne y 250 gramos de gambas, ¿cuánto pagaríamos por 2 kilos de carne, 1 kilo de tomates y 500 gramos de gambas? (Resolverlo por Rouché-Fröbenius más Cramer). *(2 puntos)*
Llamemos x = precio del kg de tomates; y = ídem carne; z = ídem gambas.

El precio del kg de tomates es la mitad que el del kg de carne

$$x = \frac{1}{2} y$$

El precio del kg de gambas es el doble que el de carne

$$z = 2y$$

3 kg de tomates, 1 kg de carne y 250 g de gambas cuestan 18€

$$3x + y + 0{,}25z = 18$$

Luego el sistema que permite calcular los precios de los artículos es:

$$\left.\begin{array}{r} 2x-y\qquad=0 \\ 2y-z=0 \\ 12x+4y+z=72 \end{array}\right\}$$

Como $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 12 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 12 + 8 = 24 \neq 0 \Rightarrow r(A) = 3 \Rightarrow r(A') = 3 \Rightarrow$ Es compatible y, además, determinado, por coincidir ese valor con el número de incógnitas. Lo resolvemos por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 72 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{24} = \frac{72}{24} = 3 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 12 & 72 & 1 \end{vmatrix}}{24} = \frac{72 \cdot 2}{24} = 6$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 12 & 4 & 72 \end{vmatrix}}{24} = \frac{72 \cdot 4}{24} = 12$$

Luego los tomates están a 3€/kg, la carne a 6€/kg y las gambas, a 12 €/kg. Por ello, 1 kg de tomates, 2 kg de carne y 500 g de gambas costarán:

$$3 + 6\cdot 2 + 0{,}5\cdot 12 = \boxed{21\text{ €}}.$$

5) Sea el recinto definido por las siguientes inecuaciones:

$$y \leq 2x + 1 \qquad y \leq 13 - 4x \qquad x \geq 4 - y$$

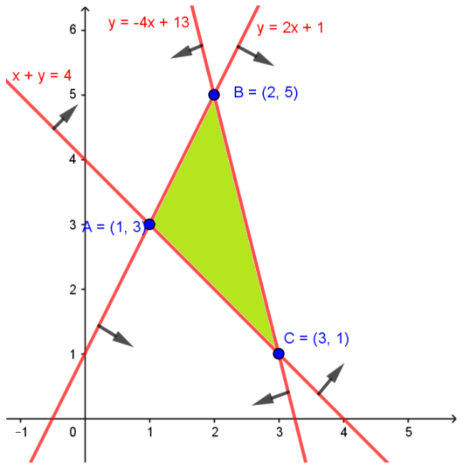
a) Razonar si el punto de coordenadas (1.1, 2.8) pertenece al recinto. *(0,5 puntos)*
Para estar en el recinto, debe cumplir todas las restricciones que lo definen. Comprobemos que el punto verifica cada inecuación:

- $y \leq 2x + 1$: $2.8 \leq 2\cdot 1.1 + 1 = 2.2 + 1 = 3.2$, cierto.
- $y \leq 13 - 4x$: $2.8 \leq 13 - 4\cdot 1.1 = 13 - 4.4 = 8.6$, cierto.
- $x \geq 4 - y$: $1.1 \geq 4 - 2.8 = 1.2$, falso.

Por tanto, $\boxed{\text{el punto no pertenece al recinto}}$.

b) ¿En qué puntos alcanza la función $F(x, y) = -3x + 1.5y$ sus valores extremos y cuáles son estos? *(1,5 puntos)*

Comencemos dibujando el recinto.



- $y \le 2x + 1$ es el semiplano *inferior* a la recta $y = 2x + 1$, porque la verifican los puntos cuyo y es menor al que proporciona la recta para un valor dado de x. Dicha recta la dibujamos desde la tabla de valores:

x	0	–1/2
y	1	0

- $y \le 13 - 4x$: semiplano *inferior* a $y = -4x + 13$

x	0	13/4
y	13	0

- $x \ge 4 - y \Leftrightarrow y \ge -x + 4$: semiplano *superior*

x	0	4
y	4	0

Y los vértices:

- A: $\left.\begin{matrix} y = 2x+1 \\ x + y = 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x + (2x + 1) = 4 \Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 2\cdot 1 + 1 = 3$

  Luego: $\boxed{A(1, 3)}$.
- B: $\left.\begin{matrix} y = 2x+1 \\ y = -4x+13 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2x + 1 = -4x + 13 \Rightarrow 6x = 12 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow$

  $\Rightarrow y = 2\cdot 2 + 1 = 5$. Luego: $\boxed{B(2, 5)}$.
- C: $\left.\begin{matrix} x + y = 4 \\ y = -4x+13 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x - 4x + 13 = 4 \Rightarrow -3x = -9 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow$

  $y = -4\cdot 3 + 13 = 1$. Luego: $\boxed{C(3, 1)}$.

Por último, evaluamos la *función objetivo* en ellos:

- $F(A) = F(1, 3) = -3\cdot 1 + 1.5\cdot 3 = 1.5$
- $F(B) = F(2, 5) = -3\cdot 2 + 1.5\cdot 5 = 1.5$
- $F(C) = F(3, 1) = -3\cdot 3 + 1.5\cdot 1 = -7.5$

Luego el valor máximo alcanzado por la función objetivo es 1.5, y lo hace en $A(1, 3)$, en $B(2, 5)$ y en los infinitos puntos del segmento que los une que, observando el gráfico, vemos que son los puntos que verifican la ecuación $y = 2x + 1$ con $1 \le x \le 2$, valores de x que corresponden a las abscisas de dichos puntos.

Y el valor mínimo es –7.5, alcanzado en $C(3, 1)$.

c) Razone si existe algún punto del recinto en el que la función F se anule. *(0,5 p)*

En el recinto, el valor mínimo que alcanza la función objetivo es –7.5 y el máximo, 1.5. Entre ellos, todos los valores son alcanzados. Como 0 está entre dichos valores, es alcanzado. Por tanto, en el recinto existe algún punto donde F se anula.

IES Fernando de Herrera **Curso 2017 / 18**

Primera evaluación – Recuperación 2 – II Bach CCSS

NOMBRE: ____

Instrucciones: **1)** Todos los **folios** deben tener el **nombre** y estar **numerados** en la parte superior. **2)** Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. **3)** No se puede usar **corrector ni lápiz**, y el bolígrafo debe ser de **tinta indeleble**. Se aconseja no usar borrador. **4)** Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar** la respuesta a una pregunta con las de otras. **5)** **Desatender las instrucciones será penalizado**.

1) Sea el siguiente sistema de inecuaciones:

$$x + 2y \le 11 \qquad x \ge 2y - 5 \qquad 3x + y \le 18 \qquad x \ge 0 \qquad y \ge 0$$

a) Dibuje la región que definen y calcule sus vértices. *(0.5 puntos)*

b) ¿Pertenece el punto (5.5, 2) a la región anterior. *(0.5 puntos)*

c) Calcule los puntos de esa región en los que la función $F(x, y) = 2x + 3y$ alcanza los valores máximo y mínimo y determine dichos valores. *(1,5 puntos)*

2) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Efectúe, si se puede: $A \cdot D + B \cdot C$; $D^t \cdot B - A^2$ *(1 punto)*

b) Halle la matriz X que verifica: $A \cdot X = B - C$, calculando A^{-1}. *(1,5 puntos)*

3) Un taller de carpintería ha vendido 15 muebles, entre sillas, sillones y butacas, por un total de 1600 euros. Se sabe que cobra 50 euros por cada silla, 150 euros por cada sillón y 200 euros por cada butaca, y que el número de butacas es la cuarta parte del número que suman los demás muebles. Plantee y resuelva el sistema de ecuaciones adecuado que permite calcular cuántos muebles de cada clase ha vendido ese taller. *(2,5 puntos)*

4) a) Un industrial cafetero produce dos tipos de café, natural y descafeinado, en tres modalidades cada uno: A, B y C. Se han anotado en la matriz P los pesos, en kg, del café que el industrial produce de cada una de las modalidades de cada tipo, y en la matriz Q los precios a los que vende el kg de cada producto final:

$$P: \begin{array}{r} \\ \text{natural} \\ \text{descafein.} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 550 & 400 & 240 \\ 260 & 200 & 100 \end{pmatrix} \end{array} \qquad Q: \begin{array}{r} \\ \text{natural} \\ \text{descafein.} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2.20 & 2.75 & 2.50 \\ 3.20 & 3.90 & 3.60 \end{pmatrix} \end{array}$$

Efectúe el producto $P \cdot Q^t$ y explique el significado económico de cada uno de los elementos de la diagonal principal de la matriz resultante. *(1 punto)*

b) Sean las matrices $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Resuelva la ecuación matricial $2X - CD = (I_3 + D)C$. *(1,5 puntos)*

SOLUCIONES

1) Sea el siguiente sistema de inecuaciones:

$$x + 2y \le 11 \qquad x \ge 2y - 5 \qquad 3x + y \le 18 \qquad x \ge 0 \qquad y \ge 0$$

a) Dibuje la región que definen y calcule sus vértices. *(0.5 puntos)*

- $x + 2y \le 11 \iff y \le \dfrac{-x+11}{2}$ luego la solución es el *semiplano inferior a la recta* $x + 2y = 11$, cuya tabla de valores es:

x	0	11
y	11/2	0

- $x \ge 2y - 5 \iff y \le \dfrac{x+5}{2}$: *semiplano inferior*.

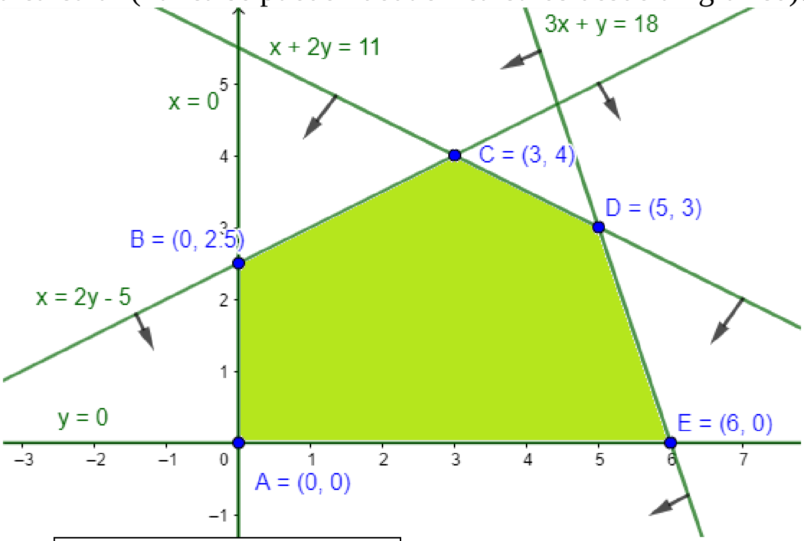
x	0	–5
y	5/2	0

- $3x + y \le 18 \iff y \le -3x + 18$: *semiplano inferior*

x	0	6
y	18	0

- $x \ge 0;\ y \ge 0$ nos restringen al I cuadrante.

Por tanto, el recinto es el del gráfico, donde ya hemos señalado los vértices, que pasamos a calcular (nunca se pueden deducir cálculos desde un gráfico):



Los vértices $\boxed{A(0, 0),\ B(0, 5/2),\ E(6, 0)}$ los conocemos por las tablas de valores usadas para construir el recinto. Los otros dos son:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y=11 \\ x-2y=-5 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} x+2y=11 \\ x-2y=-5 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \boxed{C(3, 4)}$$

$$2x \quad = 6 \Rightarrow x = 3 \qquad \text{Restando: } \ 4y = 16 \Rightarrow y = 4$$

$$\left.\begin{array}{r} x+2y=11 \\ 3x+y=18 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y=11 \\ -6x-2y=-36 \end{array}\right\} \qquad \text{Sust. en 1ª: } 5 + 2y = 11 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow$$

$$-5x \quad = -25 \Rightarrow x = 5$$

$$\boxed{D(5, 3)}$$

b) ¿Pertenece el punto (5.5, 2) a la región anterior. *(0.5 puntos)*

Lo hará si verifica todas las inecuaciones. No se debe deducir dibujándolo en el gráfico, porque las imperfecciones de éste nos pueden llevar a una conclusión errónea:

- $x + 2y \leq 11$: $5.5 + 2\cdot 2 = 9.5 \leq 11$. Se verifica.
- $x \geq 2y - 5$: $5.5 \geq 2\cdot 2 - 5 = -1$. Se verifica.
- $3x + y \leq 18$: $3\cdot 5.5 + 2 = 18.5 \leq 18$. No se verifica.

Por tanto, $\boxed{\text{el punto no está en el recinto}}$, pues hay una de las inecuaciones que no se verifica.

c) Calcule los puntos de esa región en los que la función $F(x, y) = 2x + 3y$ alcanza los valores máximo y mínimo y determine dichos valores. *(1,5 puntos)*

- $F(A) = F(0, 0) = 2\cdot 0 + 3\cdot 0 = 0$
- $F(B) = F(0, 5/2) = 2\cdot 0 + 3\cdot 2.5 = 7.5$
- $F(C) = F(3, 4) = 2\cdot 3 + 3\cdot 4 = 18$
- $F(D) = F(5, 3) = 2\cdot 5 + 3\cdot 3 = 19$
- $F(E) = F(6, 0) = 2\cdot 6 + 3\cdot 0 = 12$

De donde el máximo valor es 19 y se alcanza en $D(5, 3)$, mientras que el mínimo es 0, que se alcanza en $A(0, 0)$.

2) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Efectúe, si se puede: $A\cdot D + B\cdot C$; $D^t\cdot B - A^2$ *(1 punto)*

- $A\cdot D + B\cdot C$ no puede efectuarse, puesto que $\dim(A\cdot D) = 2 \times 3$, mientras que $\dim(B\cdot C) = 2 \times 2$, y no podrán sumarse.
- $D^t\cdot B - A^2$ no puede efectuarse tampoco, porque $\dim(D^t\cdot B) = 3 \times 2$, mientras que $\dim(A^2) = 2 \times 2$, y no podrán sumarse.

b) Halle la matriz X que verifica: $A\cdot X = B - C$, calculando A^{-1}. *(1,5 puntos)*

Despejando: $A\cdot X = B - C \Rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot(B - C) \Rightarrow \boxed{X = A^{-1}\cdot(B - C)}$.

Como $|A| = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -2$, existe su inversa.

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{A^{-1} =} \frac{1}{|A|}\text{Adj}(A^t) = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

Por otra parte:

$$B - C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$\boxed{X =} A^{-1}\cdot(B - C) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}$$

3) Un taller de carpintería ha vendido 15 muebles, entre sillas, sillones y butacas, por un total de 1600 euros. Se sabe que cobra 50 euros por cada silla, 150 euros por cada sillón y 200 euros por cada butaca, y que el número de butacas es la cuarta parte del número que suman los demás muebles. Plantee y resuelva el sistema de ecuaciones adecuado que permite calcular cuántos muebles de cada clase ha vendido ese taller. *(2,5 puntos)*

En la última frase del enunciado averiguamos que lo que se pretende saber es el número de muebles de cada clase. Esto nos dice cuáles son las incógnitas, que es lo primero que debemos explicitar:

x = número de *sillas*
y = número de *sillones*
z = número de *butacas*

- Entre sillas, sillones y butacas, ha vendido 15 muebles:
  $$x + y + z = 15$$
- 50€ por silla, 150€ por sillón, 200€ por butaca totalizan una venta de 1600€:
  $$50x + 150y + 200z = 1600$$
- El nº de butacas es la cuarta parte del nº que suman los demás muebles:
  $$z = \frac{1}{4} \cdot (x+y)$$

Ya tenemos planteadas las tres ecuaciones del sistema, que escribimos simplificado:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=15 \\ x+3y+4z=32 \\ x+y-4z=0 \end{array}\right\}$$

Lo resolvemos por Gauss. Haciendo transformaciones elementales de filas en la matriz ampliada, con objeto de triangularizarla (una columna, que no sea la de términos independientes, completa de ceros salvo una posición; otra igual salvo otra posición y la no nula de la columna previa, etc.):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 15 \\ 1 & 3 & 4 & 32 \\ 1 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 - F_1]{F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 15 \\ 0 & 2 & 3 & 17 \\ 0 & 0 & -5 & -15 \end{pmatrix}$$

Como hemos conseguido la triangulización en un solo paso (el siguiente sería trivial: $F_3 - 0 \cdot F_2$) y no ha salido incompatible (en una fila todas las posiciones son 0 salvo la de términos independientes) ni hay que eliminar ninguna fila porque todas sus posiciones sean nulas, esta será la expresión final que, al tener el mismo número de ecuaciones que de incógnitas dice que es una $\boxed{\textit{sistema compatible determinado}}$. Reconstruimos las ecuaciones y resolvemos:

- 3ª ecuación: $-5z = -15 \Rightarrow z = 3$
- 2ª ecuación: $2y + 3 \cdot 3 = 17 \Rightarrow 2y = 8 \Rightarrow y = 4$
- 1ª ecuación: $x + 4 + 3 = 15 \Rightarrow x = 8$

Por tanto, $\boxed{\text{se vendieron 8 sillas, 4 sillones y 3 butacas}}$.

4) a) Un industrial cafetero produce dos tipos de café, natural y descafeinado, en tres modalidades cada uno: *A*, *B* y *C*. Se han anotado en la matriz P los pesos, en kg, del café que el industrial produce de cada una de las modalidades de cada tipo, y en la matriz Q los precios a los que vende el kg de cada producto final:

$$P: \begin{array}{l} \\ \text{natural} \\ \text{descafein.} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 550 & 400 & 240 \\ 260 & 200 & 100 \end{pmatrix} \end{array} \qquad Q: \begin{array}{l} \\ \text{natural} \\ \text{descafein.} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2.20 & 2.75 & 2.50 \\ 3.20 & 3.90 & 3.60 \end{pmatrix} \end{array}$$

Efectúe el producto $P \cdot Q^t$ y explique el significado económico de cada uno de los elementos de la diagonal principal de la matriz resultante. *(1 punto)*

$$P\cdot Q^t = \begin{pmatrix} 550 & 400 & 240 \\ 260 & 200 & 100 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2.20 & 3.20 \\ 2.75 & 3.90 \\ 2.50 & 3.60 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2910 & 4184 \\ 1372 & 1972 \end{pmatrix}}$$

$a_{11} = 2910$ sería el precio de la venta del café natural producido.
$a_{22} = 1972$ sería el precio de la venta del café descafeinado producido.
$a_{12} = 4184$ sería el precio de la venta del café natural a precios del descafeinado.
$a_{21} = 1372$ sería el precio de la venta del café descafeinado a precios del natural.

No se pide la interpretación de estos dos últimos valores.

b) Sean las matrices $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Resuelva la ecuación matricial $2X - CD = (I_3 + D)C$. *(1,5 puntos)*

Despejando, tenemos:

$$2X - CD = (I_3 + D)C \Rightarrow 2X = (I_3 + D)C + CD \Rightarrow \boxed{X = \frac{1}{2}[(I_3 + D)C + CD]}$$

Efectuamos la operación:

$$I_3 + D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(I_3 + D)C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$CD = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(I_3 + D)C + CD = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{2}[(I_3 + D)C + CD] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$