PROBLEMAS DE SELECTIVIDAD RESUELTOS
PROBABILIDADES Y TEOREMA DE BAYES

1) Sean A y B dos sucesos independientes tales que $P(B) = 0.05$ y $P(A/B) = 0.35$.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que suceda al menos uno de ellos?

El suceso "Al menos uno de ellos" es el suceso unión (su verificación requiere que suceda A ó B o ambos a la vez): $A\cup B$. Sabemos que:

$$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

- Como los sucesos son independientes, $P(A/B)=P(A)=0,35$.
- También conocemos $P(B)=0,05$.
- Por la fórmula de la probabilidad condicionada, $P(A/B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} \Rightarrow$

$$P(A\cap B) = P(A/B)\cdot P(B) = 0,35\cdot 0,05 = 0,0175$$

Según todo lo anterior:

$$P(A\cup B) = 0,35+0,05-0,0175 = 0,3825$$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra el suceso A pero no el B?

Nos piden la probabilidad de que suceda A y, a la vez (es decir, intersección), que no suceda B (es decir, que suceda B^C): $P(A\cap B^C)$.

Si A y B son independientes, también lo son A y B^C (discutiremos esto más abajo). Es decir, $P(A/B^C)= P(A)$. Por tanto, usando la definición de probabilidad condicionada:

$$P(A\cap B^C) = P(A/B^C)\cdot P(B^C) = P(A)\cdot P(B^C) = P(A)\cdot(1-P(B)) = 0,35(1-0,05) = 0,3325$$

Retomamos la discusión aplazada. Si A y B son independientes, la verificación de B no influye en la de A. Por tanto, la no verificación de B tampoco. Luego A y B^C son, igualmente, independientes.
Pero podemos demostrarlo con rigor. El suceso B^C/A consiste en, sabiendo con seguridad que A se ha verificado, que no se cumpla B. Su suceso contrario es, entonces, B/A porque, en nuestra situación, seguimos sabiendo con seguridad que A se ha verificado. Como la probabilidad de un suceso más la de su contrario suman 1:

$$P(B^C/A)+ P(B/A) = 1 \quad\Rightarrow\quad P(B^C/A) = 1-P(B/A) = 1-P(B) = P(B^C)$$

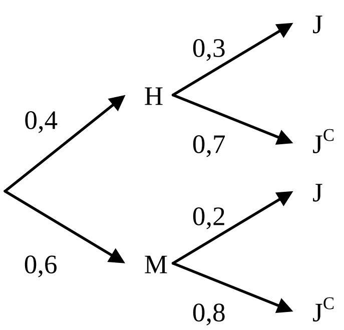
porque sabemos que A y B son independientes, por lo que $P(B/A)=P(B)$. Pues bien:

$$P(A/B^C) = \frac{P(A\cap B^C)}{P(B^C)} = \frac{P(B^C\cap A)}{P(B^C)} = \frac{P(B^C/A)\cdot P(A)}{P(B^C)} = \frac{P(B^C)\cdot P(A)}{P(B^C)} = P(A)$$

Luego A y B^C son, también, independientes, como queríamos demostrar.

2) En una agrupación musical el 60% de sus componentes son mujeres. El 20% de las mujeres y el 30% de los hombres de la citada agrupación están jubilados.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un componente de la agrupación, elegido al azar, esté jubilado?



Éste es un problema típico de probabilidad total. Hay dos experiencias aleatorias sucesivas: escoger un componente al azar y anotar su sexo (H=hombre ó M=mujer). A continuación, una vez conocido el sexo, anotar si está jubilado (J) o no lo está (J^C).
Construimos el correspondiente diagrama en árbol (adjunto). Tenemos en cuenta para ello que, en cada situación, todas las probabilidades de las distintas posibilidades deben sumar 1. Por ejemplo, en la situación de partida, todas las probabilidades son H ó M. Por tanto, si el 60% de los componentes son M, el resto (los H) constituyen el

40%. Igualmente, en la situación de tener escogida una persona que es H, como el 30% están jubilados, los no jubilados (J^C) son el 70%. Etc.
Entonces, la probabilidad de cada rama terminal del árbol es el producto de las probabilidades de las distintas ramas recorridas desde el punto origen (a la izquierda) hasta dicho punto terminal. Y eso es así por la definición de probabilidad condicionada. Por ejemplo, calculemos la probabilidad de la primera rama terminal (la primera J). Cuando llegamos ahí es porque hemos escogido una persona que ha sido, en primer lugar, H y, además, J. O sea:

$$P(J\cap H) = P(J/H)\cdot P(H) = 0{,}3\cdot 0{,}4 = 0{,}12$$

Pues bien, una vez explicado cómo se construye el árbol y cómo funciona, para averiguar la probabilidad de escoger a un jubilado, por el teorema de la probabilidad total, sumamos las probabilidades de las distintas terminales donde aparece J:

$$P(J) = P(J/H)\cdot P(H) + P(J/M\cdot P(M) = 0{,}3\cdot 0{,}4 + 0{,}2\cdot 0{,}6 = 0{,}24$$

b) Sabiendo que un componente de la agrupación, elegido al azar, está jubilado ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

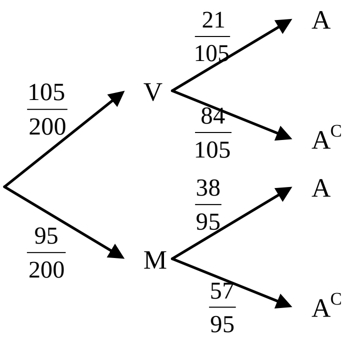
Y éste es un problema típico de probabilidades a posteriori (Fórmula de Bayes):

$$P(M/J) = \frac{P(M\cap J)}{P(J)} = \frac{P(J\cap M)}{P(J)} = \frac{P(J/M)p(M)}{P(J)} = \frac{0{,}2\cdot 0{,}6}{0{,}24} = 0{,}5$$

3) En un hospital se han producido 200 nacimientos en un mes. De ellos, 105 son varones y, de éstos, 21 tienen los ojos azules. Asimismo se ha observado que 38 de las niñas nacidas en ese mes tienen los ojos azules. Se elige, al azar, un recién nacido entre los 200 citados.

a) Calcule la probabilidad de que tenga los ojos azules.

Este problema se puede enfocar igual que el anterior, aunque después lo haremos de otra forma. Construimos el correspondiente diagrama en árbol (V=varón; M=mujer; A=tener los ojos azules; A^C=no tener los ojos azules), teniendo en cuenta los datos del problema, la fórmula de probabilidad de Laplace y las indicaciones dadas en el problema anterior.



Entonces, por el Teorema de la Probabilidad Total (suma de todas las ramas terminales en las que aparece A):

$$P(A) = P(A/V)\cdot P(V) + P(A/M)\cdot P(M) = \frac{21}{105}\frac{105}{200} + \frac{38}{95}\frac{95}{200} = \frac{59}{200} = 0{,}295$$

De otra forma: El problema puede enfocarse mediante una tabla de contingencia. En primer lugar, ponemos los datos que nos da el problema (tabla de la izquierda) y, a continuación, considerando los totales, rellenamos los datos que nos faltan (tabla final, de la derecha):

	A	A^C	Total
V	21		105
M	38		
Total			200

	A	A^C	Total
V	21	84	105
M	38	57	95
Total	59	141	200

Según los datos de la tabla completa, por Laplace, obtenemos el mismo resultado que antes:

$$P(\mathrm{A}) = \frac{59}{200} = 0{,}295$$

b) Si el recién nacido que se elige tiene los ojos azules, ¿cuál es la probabilidad de que sea un varón?

Abordando el problema por la forma del esquema en árbol, por la Fórmula de Bayes:

$$P(\mathrm{V/A}) = \frac{P(\mathrm{V}\cap \mathrm{A})}{P(\mathrm{A})} = \frac{P(\mathrm{A/V})\cdot P(\mathrm{V})}{P(\mathrm{A})} = \frac{\frac{21}{105}\,\frac{105}{200}}{\frac{59}{200}} = \frac{\frac{21}{200}}{\frac{59}{200}} = \frac{21}{59} = 0{,}3559$$

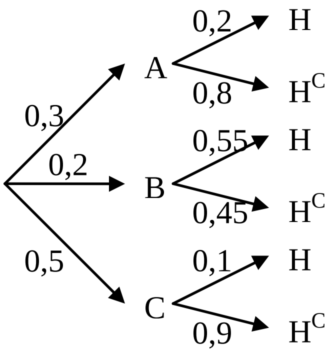
Y por tablas de contingencia:

$$P(\mathrm{V/A}) = \frac{21}{59} = 0{,}3559$$

porque, de entre los 59 niños con ojos azules, 21 son varones, según vemos en la tabla de contingencia.

4) Una determinada enfermedad puede estar provocada por 3 causas, A, B o C, en las proporciones 30%, 20% y 50% respectivamente. En cada enfermo sólo se presenta una de estas 3 causas. El tratamiento de esta enfermedad requiere hospitalización en el 20% de los casos si está provocada por A, en el 55% si la causa es B y en el 10% si la causa es C.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un enfermo cualquiera de la citada enfermedad no necesite hospitalización?



Como en el problema 2 del examen anterior, construimos el árbol de probabilidades, teniendo en cuenta que la suma de las probabilidades de todas las posibilidades de cada situación deben sumar 1, resultando el esquema de la izquierda.

Por el Teorema de la probabilidad total, sabemos que la probabilidad de H es la suma de las probabilidades de todas las terminales derechas del árbol en las que aparece H:

$P(\mathrm{H}) = P(\mathrm{H/A})\cdot P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{H/B})\cdot P(\mathrm{B}) + P(\mathrm{H/C})\cdot P(\mathrm{C}) =$
$= 0{,}2 \cdot 0{,}3 + 0{,}55 \cdot 0{,}2 + 0{,}1 \cdot 0{,}5 =$
$= 0{,}22$

Por tanto, $P(\mathrm{H^C}) = 1 - P(\mathrm{H}) = 1 - 0{,}22 = 0{,}78$.

Evidentemente, se podía haber optado por calcular directamente $P(\mathrm{H^C})$ por el *Teorema de la Probabilidad Total*, en lugar de hacerlo con H.

b) Si un enfermo está hospitalizado, ¿cuál es la probabilidad de que la causa sea A?

Por el Teorema de Bayes, que no es más que usar la fórmula de la probabilidad condicionada en el árbol anterior:

$$P(\mathrm{A/H}) = \frac{P(\mathrm{H/A})P(\mathrm{A})}{P(\mathrm{H})} = \frac{0{,}2\cdot 0{,}3}{0{,}22} = 0{,}27$$

5) Dado un espacio muestral E se consideran los sucesos A y B, cuyas probabilidades son $P(A)= 2/3$ y $P(B)= 1/2$.

1) ¿Pueden ser los sucesos A y B incompatibles? ¿Por qué?

Dos sucesos son incompatibles si no se pueden presentar a la vez, es decir, si $P(A\cap B)=0$. Como $P(A\cup B) = P(A)+P(B)–P(A\cap B)$, si conociésemos $P(A\cup B)$ podríamos calcular $P(A\cap B)$. Pero no es así.

Pero es posible responder a la cuestión, recurriendo a una demostración por reducción al absurdo. Supongamos que A y B son incompatibles $\Rightarrow$ $P(A\cap B) = 0$ $\Rightarrow$ $P(A\cup B) = P(A)+P(B)–P(A\cap B) = \frac{2}{3}+\frac{1}{2}-0 = \frac{7}{6}$. Pero esta probabilidad es mayor que 1, lo que no es posible. Por tanto, suponer que A y B son incompatibles nos lleva a una situación imposible (absurda), por lo que no es cierta la suposición. Por tanto, A y B no son incompatibles.

2) Suponiendo que los sucesos A y B son independientes, calcule $P(A\cup B)$

Por la fórmula anterior, para calcular dicha probabilidad seguimos necesitando conocer $P(A\cap B)$. La otra fórmula básica en la que aparece $P(A\cap B)$ es la de la probabilidad condicionada. Como los sucesos son independientes, $P(A/B) = P(A)$. Por tanto:

$$P(A\cap B) = P(A/B)\cdot P(B) = P(A)\cdot P(B) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

Luego: $P(A\cup B) = P(A)+P(B)–P(A\cup B) = \frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$

3) Suponiendo que $A\cup B = E$, calcule $P(A\cap B)$.

Recurrimos a la misma fórmula, la única fórmula básica en la que interviene el suceso unión. Como sabemos que $A\cup B= E$ $\Rightarrow$ $P(A\cup B) = P(E) = 1$. Por tanto:

$$P(A\cup B) = P(A)+P(B)–P(A\cap B) \;\Rightarrow\; 1 = \frac{2}{3}+\frac{1}{2}-P(A\cap B) \;\Rightarrow$$

$$P(A\cap B) = \frac{2}{3}+\frac{1}{2}-1 = \frac{1}{6}$$

6) En un determinado curso el 60% de los estudiantes aprueban Economía y el 45% aprueban Matemáticas. Se sabe además que la probabilidad de aprobar Economía habiendo aprobado Matemáticas es 0.75.

a) Calcule el porcentaje de estudiantes que aprueban las dos asignaturas.

Los datos son: $P(E) = 0.6$, $P(M) = 0.45$, $P(E/M) = 0.75$

Nos piden $P(E\cap M)$. La intersección aparece únicamente en dos fórmulas: la de la unión y la de la probabilidad condicionada. Como en los datos no aparece nada de unión y sí de probabilidad condicionada, la solución debe ir por aquí. Entonces:

$$P(E\cap M) = P(E/M)\, P(M) = 0.75\cdot 0.45 = 0.3375$$

b) Entre los que aprueban Economía ¿qué porcentaje aprueba Matemáticas?

Nos piden $P(M/E)$. Usamos directamente la fórmula de la probabilidad condicionada:

$$P(M/E) = \frac{P(M\cap E)}{P(E)} = \frac{0.3375}{0.6} = 0.5625$$

7) Sean A y B dos sucesos independientes tales que $P(A) = 0.4$ y $P(A \cap B) = 0.05$.

a) Calcule $P(B)$.

Si A y B son independientes $\Rightarrow$ $P(A \cap B) = P(A/B)\, P(B) = P(A)\, P(B)$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad 0.05 = 0.4 \cdot P(B) \quad \Rightarrow \quad \frac{0.05}{0.4} = P(B) \quad \Rightarrow \quad P(B) = 0.125$$

b) Calcule $P(A \cap B^C)$.

Como no nos hablan, para nada, de unión, usaremos la fórmula de la probabilidad condicionada. Si A y B son independientes, también lo son A y B^C. Entonces, $P(A/B^C) = P(A)$. Por tanto:

$$P(A \cap B^C) = P(A/B^C)\, P(B^C) = P(A)\, P(B^C) = P(A)\, [1 - P(B)] = 0.4(1 - 0.125) = 0.35$$

Otra forma, más sencilla, de hacerlo es:

$$P(A \cap B^C) = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 0.4 - 0.05 = 0.35$$

c) Sabiendo que no ha sucedido B, calcule la probabilidad de que suceda A.

Por la misma razón que en el apartado anterior, $P(A/B^C) = P(A) = 0.4$

Y, también, sin tener en cuenta lo dicho antes:

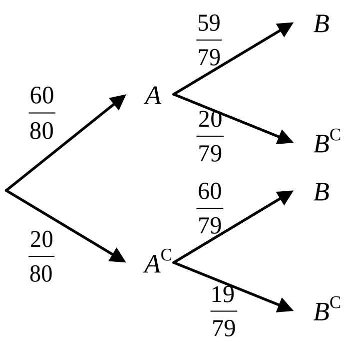
$$P(A/B^C) = \frac{P(A \cap B^C)}{P(B^C)} = \frac{0.35}{1 - 0.125} = 0.4$$

8) Un estudiante se presenta a un examen en el que debe responder a dos temas, elegidos al azar, de un temario de 80, de los que se sabe 60.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que responda correctamente a los dos?

Sean los sucesos A = Se ha estudiado el primer tema; B = ídem el segundo.

Distribuimos las probabilidades en un esquema de árbol.



Por tanto:

$$P(A \cap B) = \frac{60}{80}\frac{59}{79} = \frac{177}{316} = 0.5601$$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que responda correctamente al menos a uno de los dos?

Realizaremos este problema de tres formas diferentes.

1) La forma más corta de hacerlo es teniendo en cuenta que lo contrario de que se sepa al menos uno: $A \cup B$, es que no se sepa ninguno: $A^C \cap B^C$. (Eso es así por las leyes de Morgan: $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$). Por tanto, como la probabilidad de un suceso y su contrario suman 1:

$$P(A \cup B) = 1 - P(A^C \cap B^C) = 1 - \frac{20}{80}\frac{19}{79} = 0.9399$$

2) Nos piden $P(A \cup B)$. Usamos la única fórmula en la que aparece: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Lo que sucede es que $P(B)$ no la sabemos directamente, pues depende de que haya salido A ó A^C. Por tanto, hay que recurrir al teorema de la probabilidad total (desde el árbol se obtiene rápidamente):

$$P(B) = P(B/A) \cdot P(A) + P(B/A^C) \cdot P(A^C) = \frac{59}{79}\frac{60}{80} + \frac{60}{79}\frac{20}{80} = \frac{3}{4}$$

Entonces:

$$P(A\cup B) = \frac{60}{80} + \frac{3}{4} - \frac{177}{316} = \frac{297}{316} = 0.9399$$

3) Por último, la tercera, se basa en que saberse alguno de los dos temas consiste en: saberse el primero y el segundo, o saberse el primero pero no el segundo, o no saberse el primero pero sí el segundo. Es decir:

$$P(A\cup B) = P(A\cap B) + P(A\cap B^C) + P(A^C\cap B) = \frac{59}{79}\frac{60}{80} + \frac{20}{79}\frac{60}{80} + \frac{60}{79}\frac{20}{80} = \frac{297}{316} =$$
$$= 0.9399$$

probabilidades que se sacan directamente del árbol.

9) (Selectividad 2005) En un juego se sortea cada día un premio utilizando papeletas con tres cifras, numeradas del 000 al 999.

a) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que el número premiado termine en 5.

Hay 1.000 papeletas en el sorteo. Estos son los casos posibles.

Los favorables son el número de papeletas que terminan en 5. Éstas tienen la estructura:

		5

Donde cada una de las dos primeras posiciones pueden ocuparse por 10 elementos distintos (las cifras del 0 al 9), que pueden repetirse (la misma cifra en las dos posiciones). Por tanto, son:

$$VR_{10,2} = 10^2 = 100$$

(sin combinatoria, serían 10 posibilidades para la primera posición y, para cada una de ellas, 10 para la segunda; o sea, 10·10 = 100)

Luego:

$$P(\text{nº premiado termina en 5}) = \frac{100}{1000} = 0{,}1$$

b) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que el número premiado termine en 55.

Análogamente al anterior, hay 1.000 casos posibles y los favorables son las papeletas de la forma:

	5	5

o sea, 10 papeletas (las 10 posibilidades de completar la primera posición). Luego:

$$P(\text{nº premiado termina en 55}) = \frac{10}{1000} = 0{,}01$$

c) **(0.5 puntos)** Sabiendo que ayer salió premiado un número terminado en 5, calcule la probabilidad de que el número premiado hoy también termine en 5.

Las extracciones son independientes; no hay ninguna influencia entre ellas. Por tanto, si:

A = Terminar hoy en 5

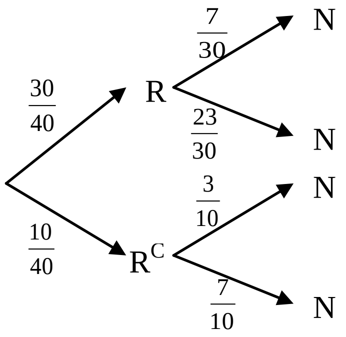
B = Terminar ayer en 5

se tiene que: $P(A/B) = P(A) = 0{,}1$

10) (Selectividad 2006) En un aula de dibujo hay 40 sillas, 30 con respaldo y 10 sin él. Entre las sillas sin respaldo hay 3 nuevas y entre las sillas con respaldo hay 7 nuevas.

a) **(1 punto)** Tomada una silla al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea nueva?

Un procedimiento estándar para resolver este tipo de problemas, donde hay una experiencia compuesta, con dos condicionantes sucesivos: tener respaldo (*R*), o no tenerlo (R^C) y ser nueva (*N*), o no serlo (N^C), es distribuir las probabilidades en un árbol (figura adjunta).



Aplicando el Teorema de la Probabilidad Total:

$$P(N) = P(N/R)\cdot P(R) + P(N/R^C)\cdot P(R^C) =$$

$$\frac{7}{30}\cdot\frac{30}{40}+\frac{3}{10}\cdot\frac{10}{40}=\frac{7}{40}+\frac{3}{40}=\frac{10}{40}=\frac{1}{4}$$

Pero cuando nos dan todos los datos, en lugar de las probabilidades, como es el caso, puede resultar muy fácil la resolución mediante una *tabla de contingencia*. La escribimos a continuación, dondo hemos escrito en negrita los datos del problema, y los demás los hemos calculado completando la tabla para que los totales sean los que nos dan:

	N	N^C	Total
R	**7**	23	**30**
R^C	**3**	7	**10**
Total	10	30	**40**

Por tanto, por Laplace:

$$P(N) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$$

b) **(1 punto)** Si se coge una silla que no es nueva, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga respaldo?

Por el procedimiento estándar, hay que recurrir a la fórmula de Bayes. En el enunciado nos dan por seguro que la silla no es nueva (N^C) y nos piden, sabiendo esto, la probabilidad de no tener respaldo (R^C). Es decir, nos piden $P(R^C/N^C)$. El árbol nos da las probabilidades al revés (por ejemplo, $P(N^C/R^C)$). Por eso usamos Bayes:

$$P(R^C/N^C) = \frac{P(R^C\cap N^C)}{P(N^C)} = \frac{P(N^C/R^C)P(R^C)}{1-P(N)} = \frac{\frac{7}{10}\cdot\frac{10}{40}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{7}{40}}{\frac{3}{4}} = \frac{7\cdot 4}{3\cdot 40} = \frac{7\cdot 1}{3\cdot 10} = \frac{7}{30}$$

donde hemos aprovechado que ya teníamos calculado $P(N)$.

Por la tabla de contingencia, hay 30 sillas que no son nuevas. De ellas, hay 7 sin respaldo. Por tanto, según Laplace:

$$P(R^C/N^C) = \frac{7}{30}$$

11) (Selectividad 2006) Sean los sucesos A y B independientes. La probabilidad de que ocurra el suceso B es 0.6. Sabemos también que $P(A/B) = 0.3$.

a) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que suceda al menos uno de los dos sucesos.

Que suceda al menos uno de los dos sucesos es que suceda A o que suceda B o que sucedan ambos a la vez. Es decir, que suceda $A \cup B$.

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$

Como los sucesos son independientes, $P(A/B) = P(A) = 0.3$. Además:

$$P(A\cap B) = P(A/B)\cdot P(B) = 0.3 \cdot 0.6 = 0.18$$

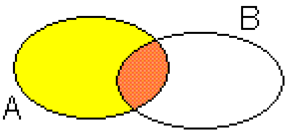
Luego:

$$P(A\cup B) = 0.3 + 0.6 - 0.18 = 0.72$$

b) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que ocurra el suceso A pero no el B.

Lo hacemos de tres formas:

1) Nos piden $P(A\cap B^C) = P(A - B) = P(A) - P(A\cap B) = 0.3 - 0.18 = 0.12$
2) Nos piden $P(A\cap B^C) = P(A/B^C)\cdot P(B^C)$.
   Como A y B son independientes, también lo son A y B^C. Por tanto, $P(A/B^C) = P(A)$.
   Por otra parte, $P(B^C) = 1 - P(B) = 1 - 0.6 = 0.4$
   Por tanto: $P(A\cap B^C) = 0.3\cdot 0.4 = 0.12$
3) Otra forma de hacerlo es teniendo en cuenta que $A\cap B^C$ (que es la zona amarilla de la figura) y $A\cap B$ (zona naranja) son incompatibles (disjuntos, sin nada en común) y que, además, su unión es A. Por tanto:



$$P(A) = P[(A\cap B^C) \cup (A\cap B)] = P(A\cap B^C) + P(A\cap B) \Rightarrow$$
$$0.3 = P(A\cap B^C) + 0.18 \Rightarrow P(A\cap B^C) = 0.3 - 0.18 = 0.12$$

12) (Selectividad 2006) Laura tiene un dado con tres caras pintadas de azul y las otras tres de rojo. María tiene otro dado con tres caras pintadas de rojo, dos de verde y una de azul. Cada una tira su dado y observan el color.

a) **(1 punto)** Describa el espacio muestral asociado y las probabilidades de los sucesos elementales.

En el diagrama de árbol adjunto hemos esquematizado el experimento siendo, siempre, el primero el dado de Laura. El espacio muestral es, pues:

$$E = \{RR, RV, RA, AR, AV, AA\}$$

Multiplicando las ramas del árbol correspondiente, tenemos:

$P(RR) = 0{,}5\cdot 0{,}5 = 0{,}25$

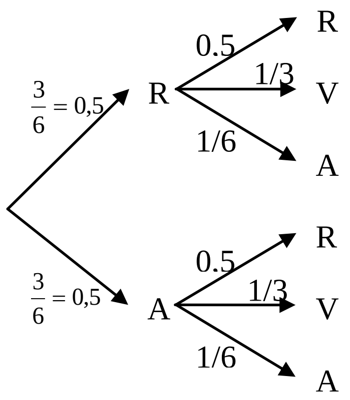
$P(RV) = 0{,}5\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

$P(RA) = 0{,}5\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{12}$

$P(AR) = 0{,}5\cdot 0{,}5 = 0{,}25$

$P(AV) = 0{,}5\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

$P(AA) = 0{,}5\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{12}$



Observar que la suma de las seis probabilidades da 1.

La resolución por árbol es un procedimiento normalizado y fácil. Pero en este caso no es necesaria, porque se trata de sucesos independientes y la probabilidad de la intersección es el producto de las probabilidades. Así, por ejemplo: $P(RR) = P$("Laura saca rojo" y "María saca rojo") = P("Laura saca rojo" $\cap$ "María saca rojo") = P("Laura saca rojo") $\cdot$ P("María saca rojo") = $0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$

b) **(1 punto)** Si salen los dos colores iguales gana Laura; y si sale el color verde, gana María. Calcule la probabilidad que tiene cada una de ganar.

$$P(\text{Ganar Laura}) = P(\{RR, AA\}) = P(RR) + P(AA) = 0{,}25 + 1/12 =$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{3}{12} + \frac{1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$
$$P(\text{Ganar María}) = P(\{RV, AV\}) = P(RV) + P(AV) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

13) (Selectividad 2006) De un estudio sobre accidentes de tráfico se dedujeron los siguientes datos: En el 23% de los casos no se llevaba puesto el cinturón de seguridad, en el 65% no se respetaron los límites de velocidad permitidos y en el 30% de los casos se cumplían ambas normas, es decir, llevaban puesto el cinturón y respetaban los límites de velocidad.

a) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que, en un accidente de tráfico, no se haya cumplido alguna de las dos normas.

Llamemos A = *Llevar puesto el cinturón de seguridad*, y B = *Respetar la velocidad*. Entonces:

$P(A) = 1 – P(A^C) = 1 – 0.23 = 0.77$

$P(B) = 1 – P(B^C) = 1 – 0.65 = 0.35$ Leyes de Morgan

$P(A \cap B) = 0.3$

Nos piden $P(A^C \cup B^C) = P[(A \cap B)^C] = 1 – P(A \cap B) = 1 – 0.3 = 0.7$

b) **(1 punto)** Razone si son independientes los sucesos "llevar puesto el cinturón" y "respetar los límites de velocidad".

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.3}{0.35} = 0.8571$$

Como $P(A/B) \neq P(A) = 0.77$, los sucesos no son independientes.

14) (Selectividad 2007) La baraja española consta de diez cartas de oros, diez de copas, diez de espadas y diez de bastos. Se extraen dos cartas. Calcule razonadamente la probabilidad de que, al menos, una de las dos cartas sea de espadas en los siguientes supuestos:

a) **(1 punto)** Si se extraen las cartas con reemplazamiento.

Este problema se puede resolver distribuyendo los datos en un diagrama de árbol. Pero lo intentamos directamente:

Los resultados de las dos extracciones constituyen sucesos independientes, puesto que, como la primera carta se restituye a la baraja, no influye en el resultado de la segunda extracción. Por tanto:

P("al menos una carta es de espadas") =

= 1 – P("ninguna de las dos es de espadas") =

= 1 – P("la 1ª carta no es de espadas" y "la 2ª carta no es espadas") =

= 1 – P("la 1ª carta no es de espadas" $\cap$ "la 2ª carta no es espadas") =

como son independientes:

= 1 – P("la 1ª carta no es de espadas") · P("la 2ª carta no es espadas") =

$$= 1 - \frac{30}{40} \cdot \frac{30}{40} = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$$

porque hay 30 cartas que no son de espadas de un total de 40 cartas.

b) **(1 punto)** Si se extraen las cartas sin reemplazamiento.

Si lo hacemos por un árbol, hay que cambiar las probabilidades de las ramas. Igual que antes, lo abordamos directamente:

En este caso, los sucesos son dependientes. Si llamamos A = "la 1ª carta no es de espadas", B = "la 2ª carta no es de espadas":

P("al menos una carta es de espadas") = 1 – P("ninguna de las dos es de espadas") =

$$= 1 - P(A \cap B) = 1 - P(A) \cdot P(B/A) = 1 - \frac{30}{40} \cdot \frac{29}{39} = \frac{23}{52}$$

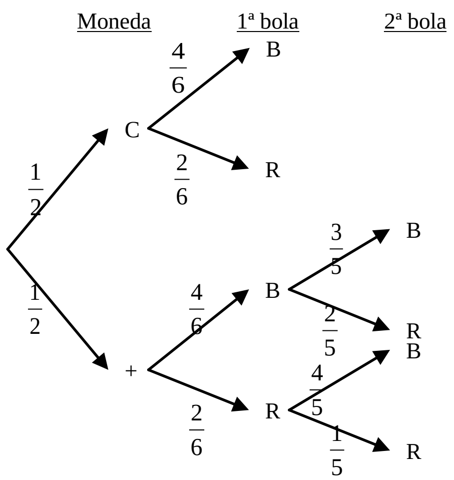
Porque en la primera extracción hay 30 cartas que no son de espadas de un total de 40. Pero en la segunda, ya hay una carta menos que no es de espadas (luego quedan 29) de un total de 39 cartas, porque damos por hecho que la primera carta extraída no ha sido de espadas.

15) (Selectividad 2007) En una urna hay cuatro bolas blancas y dos rojas. Se lanza una moneda, si sale cara se extrae una bola de la urna y si sale cruz se extraen, sin reemplazamiento, dos bolas de la urna.

a) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que se hayan extraído dos bolas rojas.

Son tres experimentos aleatorios sucesivos. Construimos un árbol con sus correspondientes probabilidades.

Tenemos en cuenta que si sale cara no se extrae una segunda bola. Si sale cruz, dos bolas sin reemplazar equivalen a extraer una y luego otra sin devolver la primera a la urna. Al extraer la segunda bola ya no hay 6 en la urna, sino 5. Teniendo en cuenta el color de la primera que salga, quedarán más o menos del color en que nos fijamos. Con estas premisas establecemos las probabilidades de cada rama. Observamos que sólo la última rama es la que da lugar a dos bolas rojas. Por tanto, la probabilidad que nos piden es la de dicha rama, que es el producto de todas las probabilidades desde la raíz del árbol hasta llegar al final de dicho ramal:



$$P(\text{"2 bolas rojas"}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{30}$$

b) **(1 punto)** Halle la probabilidad de que no se haya extraído ninguna bola roja.

Será la suma de los ramales donde no sale ninguna roja; esto es, el primero (B), el tercero (BB) y ya está, porque el segundo (R), el cuarto (BR), el quinto (RB) y el sexto (RR) contienen alguna roja. Por tanto:

$$P(\text{"ninguna roja"}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}$$

Estos problemas pueden resolverse sin árbol. Pero el uso de éste es un procedimiento estándar que nos suele conducir a la solución sin demasiados problemas.

16) (Selectividad 2007) En un espacio muestral se sabe que para dos sucesos A y B se verifica

$$P(A \cap B) = 0.1, \quad P(A^C \cap B^C) = 0.6, \quad P(A/B) = 0.5.$$

a) **(0.75 puntos)** Calcule $P(B)$.

$$P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B) \quad \Rightarrow \quad P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A/B)} = \frac{0.1}{0.5} = 0.2$$

b) **(0.75 puntos)** Calcule $P(A \cup B)$.

No podemos usar la fórmula $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ porque desconocemos $P(A)$. Pero, según las leyes de Morgan:

$$P[(A \cup B)^C] = P(A^C \cap B^C) = 0.6 \quad \Rightarrow \quad P(A \cup B) = 1 - P[(A \cup B)^C] = 1 - 0.6 = 0.4$$

c) **(0.5 puntos)** ¿Son A y B independientes?

Calculemos $P(A)$. Como $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \Rightarrow$

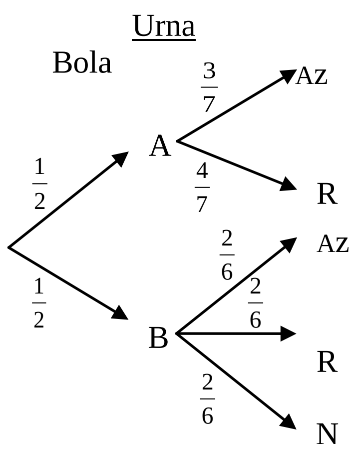
$$P(A) = P(A \cup B) - P(B) + P(A \cap B) = 0.4 - 0.2 + 0.1 = 0.3.$$

Como $P(A) \neq P(A/B) = 0.5$, los sucesos A y B no son independientes.

17) (Selectividad 2007) Una urna A contiene tres bolas azules y cuatro rojas y otra urna B contiene dos bolas azules, dos rojas y dos negras. Se extrae, al azar, una bola de una de las urnas.

a) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que la bola extraída sea roja.

Dos experimentos aleatorios sucesivos: la elección de la urna y la extracción de la bola de la urna elegida. Este tipo de situaciones se resuelve bien mediante un árbol. Lo hemos construido en el gráfico adjunto.



La probabilidad de obtener bola roja es la suma de las probabilidades de los dos ramales que finalizan en bola roja. Y la probabilidad de cada ramal es el producto de las probabilidades de todas las ramas desde la raíz hasta la finalización de dicho ramal. Por tanto:

$$P(\text{“obtener R”}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} = \frac{19}{42}$$

b) **(1 punto)** Si la bola extraída resulta ser azul, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la urna B?

$$P(\text{B/Az}) = \frac{P(B \cap Az)}{P(Az)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6}} = \frac{7}{16}$$

18) (Selectividad 2008) a) **(1 punto)** Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral. Sabiendo que $P(A) = 0.5$, que $P(B) = 0.4$ y que $P(A \cup B) = 0.8$, determine $P(A / B)$.

El axioma de la probabilidad condicionada nos dice que:

$$P(A / B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

No nos dan $P(A \cap B)$. Pero podemos usar la fórmula general para la probabilidad de la unión de sucesos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0.5 + 0.4 - 0.8 = 0.1$$

Por tanto:

$$P(A / B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.1}{0.4} = \boxed{\frac{1}{4} = 0.25}$$

b) **(1 punto)** Sean C y D dos sucesos de un mismo espacio muestral. Sabiendo que $P(C) = 0.3$, que $P(D) = 0.8$ y que C y D son independientes, determine $P(C \cup D)$.

Podemos volver a usar la fórmula de la probabilidad de la unión de sucesos, pero precisamos conocer la probabilidad del suceso intersección.

Como los sucesos son independientes:

$$P(C \cap D) = P(C) \cdot P(D) = 0.3 \cdot 0.8 = 0.24$$

En consecuencia: $P(C \cup D) = P(C) + P(D) - P(C \cap D) = 0.3 + 0.8 - 0.24 = \boxed{0.86}$.

19) (Selectividad 2008) Se sabe que el 30% de los individuos de una población tiene estudios superiores; también se sabe que, de ellos, el 95% tiene empleo. Además, de la parte de la población que no tiene estudios superiores, el 60% tiene empleo.

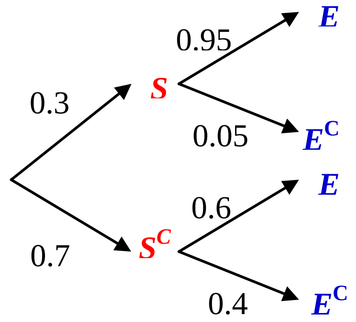
a) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que un individuo, elegido al azar, tenga empleo.

Designemos los sucesos:

S = "tener estudios superiores"

E = "tener empleo"

Según los datos, construimos el árbol.



Por el Teorema de la Probabilidad Total:

$\boxed{P(E)} = P(E / S) \cdot P(S) + P(E / \bar{S}) \cdot P(\bar{S}) = 0.95 \cdot 0.3 + 0.6 \cdot 0.7 = \boxed{0.705}$

b) **(1 punto)** Se ha elegido un individuo aleatoriamente y tiene empleo; calcule la probabilidad de que tenga estudios superiores.

Usando la fórmula de la probabilidad condicionada, llegamos a la del Teorema de Bayes:

$$P(S / E) = \frac{P(S \cap E)}{P(E)} = \frac{P(E/S) \cdot P(S)}{P(E)} = \frac{0.95 \cdot 0.3}{0.705} = \boxed{0.4043}$$