RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES DEPENDIENTES DE PARÁMETROS ESTUDIANDO RANGOS

1) Discuta y resuelva el siguiente sistema en función del parámetro m:

$$\begin{cases} x + \ \ y + 2z = 3 \\ x + 2y + 3z = 5 \\ x + 3y + mz = 7 \end{cases}$$

Este problema está resuelto por el método de Gauss en el documento "*Problemas resueltos por el método de Gauss*". Aquí vamos a resolverlo aplicando el Teorema de Rouché-Frobenius, al objeto de que puedan compararse ambos métodos.

m no es una incógnita, sino un parámetro: para cada valor del mismo, tenemos un sistema de ecuaciones diferente. En realidad, estamos resolviendo infinitos sistemas de ecuaciones que son muy parecidos entre sí, diferenciándose en el valor de m. Lo que veremos es cuáles de esos sistemas son compatibles, ya sean determinados o indeterminados, o incompatibles, según los valores del parámetro m.

La *matriz ampliada* es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & m & 7 \end{pmatrix}$$

Hay que estudiar el rango de la *matriz de los coeficientes*, esto es, la anterior sin la última columna. Al estudiar el rango de esta matriz, en la que intervienen parámetros, es conveniente hacerlo al revés que en el procedimiento estándar, en el que buscamos un menor de orden pequeño, no nulo, y lo vamos orlando con el resto de filas, ampliándolo, hasta conseguir el mayor *menor* no nulo. Con parámetros, como hemos dicho, conviene proceder a la inversa: *buscamos el menor de mayor dimensión posible, y en el que intervenga el mínimo de parámetros que se pueda, y vemos qué valores de los parámetros hacen que dicho menor sea no nulo. Para el resto de valores de los parámetros, que serán pocos por lo general, se estudian los sistemas resultantes*.

De este modo, tenemos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & m \end{vmatrix} = 2m + 3 + 6 - 4 - m - 9 = m - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m = 4.$$

Distinguimos, entonces, los siguientes casos:

- $\underline{m \neq 4}$: $r(A) = 3$, pues el menor hallado es no nulo y su orden es 3. Por tanto, $r(A') = 3$, puesto que el rango, que es el número de filas linealmente independientes, no puede ser mayor, ya que sólo hay 3 filas. Como ambos rangos coinciden, por el Teorema de Rouché-Frobenius tenemos que el sistema es compatible determinado y tendría solución única.

  Nos piden resolverlo. Aquí sí que puede ser más útil emplear Gauss. Pero vamos a hacerlo por Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}3 & 1 & 2\\ 5 & 2 & 3\\ 7 & 3 & m\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & m\end{vmatrix}}=\frac{6m+21+30-28-5m-27}{m-4}=\frac{m-4}{m-4}=1$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 3 & 2\\ 1 & 5 & 3\\ 1 & 7 & m\end{vmatrix}}{|m-4|}=\frac{5m+9+14-10-3m-21}{m-4}=\frac{2m-8}{m-4}=\frac{2(m-4)}{m-4}=2$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 5\\ 1 & 3 & 7\end{vmatrix}}{|m-4|}=\frac{14+5+9-6-7-15}{m-4}=0$$

Así que la solución única no depende de m y es $\boxed{(1, 2, 0)}$.

- <u>$m = 4$</u>: Sabemos que el rango de la *matriz de los coeficientes* es menor que 3 (el *menor* de orden 3 era nulo). La *matriz ampliada* es la siguiente:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3 & 5\\ 1 & 3 & 4 & 7\end{pmatrix}$$

Como el menor de orden 2 formado con las dos primeras filas y columnas es no nulo, $r(A) = 2$:

$$\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1\neq 0$$

Para buscar el $r(A')$, lo orlamos con la tercera fila y con la cuarta columna (la tercera columna ya está estudiada y el menor correspondiente es nulo):

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 5\\ 1 & 3 & 7\end{vmatrix}=14+5+9-6-7-15=0$$

Con lo que concluimos que $r(A') = 2$. La tercera fila (ecuación) es combinación lineal de las dos primeras y la eliminamos. El rango coincidente de las matrices de los coeficientes y ampliada es 2, inferior al número de incógnitas, que es 3, por lo que el sistema es <u>compatible indeterminado</u>, con infinitas soluciones.

La incógnita z, que no está en el menor no nulo que tenemos, la consideramos parámetro (la llamamos $z = t$, donde t toma un valor arbitrario elegido por nosotros) y la pasamos al segundo miembro:

$$\left.\begin{array}{r}x+y=3-2t\\ x+2y=5-3t\end{array}\right\}$$

Podemos resolver este sistema como queramos: Por Cramer, por Gauss, por reducción, o por sustitución. Vamos a hacerlo por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3-2t & 1 \\ 5-3t & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{6-4t-5+3t}{1} = 1-t$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3-2t \\ 1 & 5-3t \end{vmatrix}}{1} = 5-3t-3+2t = 2-t$$

$z = t$

Luego el conjunto de infinitas soluciones, una para cada valor de t, es:

$$\boxed{(1-t,\ 2-t,\ t)}$$

2) Discuta el siguiente sistema según los valores de a y b:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+az=1 \\ x+y+z=1 \\ x+ay+z=b \end{array}\right\}$$

Este problema también está resuelto por Gauss en el documento citado. La *matriz ampliada* es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & b \end{pmatrix}$$

El mayor menor posible al estudiar la *matriz de los coeficientes* es:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = 1+1+a^2-a-1-a = a^2-2a+1 = 0 \iff a = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = 1$$

- Si <u>$a \neq 1$</u> $\Rightarrow$ $r(A) = 3$ $\Rightarrow$ $r(A') = 3$ $\Rightarrow$ El sistema es <u>compatible determinado</u> independientemente de lo que valga b. No nos piden la resolución, pero la obtendríamos por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \\ b & a & 1 \end{vmatrix}}{a^2-2a+1} = \frac{1+b+a^2-ab-1-a}{(a-1)^2} = \frac{a^2-ab-a+b}{(a-1)^2} = \frac{(a-1)(-a-b)}{(a-1)^2} = -\frac{a+b}{a-1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \end{vmatrix}}{(a-1)^2} = \frac{1+1+ab-a-1-b}{(a-1)^2} = \frac{ab-a-b+1}{(a-1)^2} = \frac{(a-1)(b-1)}{(a-1)^2} = \frac{b-1}{a-1}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b \end{vmatrix}}{a^2-2a+1} = \frac{b+1+a-1-b-a}{a^2-2a+1} = 0$$

La solución única es: $\boxed{\left(-\frac{a+b}{a-1}, \frac{b-1}{a-1}, 0\right)}$. Las descomposiciones en factores de los numeradores que hemos hecho ha sido mediante Ruffini. Por ejemplo, vamos a descomponer $a^2 - ab - a + b$. Para ello, consideramos que es un polinomio en que la *indeterminada* es a, siendo b un *parámetro* (un valor conocido o desconocido que forma parte de los coeficientes, pero no es la letra principal del polinomio). Así, el polinomio sería: $a^2 + (-b-1)a + b$. Por tanto, por Ruffini:

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & -b-1 & b \\ 1 & & 1 & -b \\ \hline & -1 & -b & \boxed{0} \end{array}$$

Por tanto (recordar que hablamos de polinomios en la indeterminada a), se tiene:

$$a^2 + (-b-1)a + b = (a-1)(-a-b)$$

- Si $\underline{a = 1}$ la *matriz ampliada* es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & b \end{pmatrix}$$

Las dos primeras filas son iguales, por lo que eliminamos una de ellas (la primera, por ejemplo). El rango de la *matriz de los coeficientes* es 1, porque no es posible encontrar un menor de orden 2 no nulo, puesto que siempre coinciden las filas (y las columnas). Veamos qué ocurre con la matriz ampliada, orlando el menor de orden 1 que quedaría arriba a la izquierda:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & b \end{vmatrix} = b - 1 = 0 \iff b = 1$$

  - Si $\underline{a = 1 \text{ y } b \neq 1}$: $r(A) = 1$ y $r(A') = 2 \Rightarrow$ <u>Sistema incompatible</u>.
  - Si $\underline{a = 1 \text{ y } b = 1}$: $r(A) = 1$ y $r(A') = 1 \Rightarrow$ <u>Sistema compatible indeterminado</u>. Tendríamos sólo una ecuación:
    $x + y + z = 1$.
    Llamando $y = s$, $z = t \Rightarrow x = 1 - s - t$. Las infinitas soluciones adoptan la estructura: $\boxed{(1 - s - t, s, t)}$.

3) Discuta el siguiente sistema según los valores de a y b:

$$\left.\begin{array}{r} x - 2y + az = 3 \\ 5x + 2y = 1 \\ x + 2z = 2b \end{array}\right\}$$

Este problema también está resuelto por Gauss en el documento citado. La *matriz ampliada* es:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & a & 3 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2b \end{pmatrix}$$

Como:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & a \\ 5 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 2a + 20 = 24 - 2a = 0 \iff a = 12$$

Se tiene:

- Si $\underline{a \neq 12}$: $r(A) = r(A') = 3$ $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado. La solución, por Cramer (que no nos piden):

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 & a \\ 1 & 2 & 0 \\ 2b & 0 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & a \\ 5 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{12-4ab+4}{24-2a} = \frac{16-4ab}{24-2a} = \frac{8-2ab}{12-a}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & a \\ 5 & 1 & 0 \\ 1 & 2b & 2 \end{vmatrix}}{24-2a} = \frac{2+10ab-a-30}{24-2a} = \frac{10ab-a-28}{24-2a}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2b \end{vmatrix}}{24-2a} = \frac{4b-2-6+20b}{24-2a} = \frac{24b-8}{24-2a} = \frac{12b-4}{12-a}$$

La solución única, dependiendo de a y b, es: $\boxed{\left(\frac{8-2ab}{12-a}, \frac{10ab-a-28}{24-2a}, \frac{12b-4}{12-a}\right)}$.

- Si $\underline{a = 12}$: $r(A) = 2$. Orlando con la tercera fila y cuarta columna de la *matriz ampliada*, tendremos:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2b \end{vmatrix} = 24b - 8 = 0 \iff b = 1/3$$

  - Si $\underline{a = 12 \text{ y } b \neq 1/3}$: $r(A) = 2$ y $r(A') = 3$ $\Rightarrow$ Sistema incompatible.
  - Si $\underline{a = 12 \text{ y } b = 1/3}$: $r(A) = r(A') = 2$ $\Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado. Eliminaríamos la tercera fila (ecuación) que no forma parte del menor no nulo encontrado. Para las dos ecuaciones restantes, el sistema sería, una vez pasada $z = t$ al segundo miembro (porque z no está en el menor):

$$\left.\begin{aligned} x-2y &= 3-12t \\ 5x+2y &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Por Cramer, la solución (que no piden) sería:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3-12t & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{6-24t+2}{2+10} = \frac{8-24t}{12} = \frac{2-6t}{3}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3-12t \\ 5 & 1 \end{vmatrix}}{12} = \frac{1-15+60t}{12} = \frac{60t-14}{12} = \frac{30t-7}{6}$$

$z = t$

La terna de infinitas soluciones es: $\boxed{\left(\frac{2-6t}{3}, \frac{30t-7}{6}, t\right)}$.

4) (Sobr 05) Considera el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{r} x+3y+z=5 \\ mx+2z=0 \\ my-z=m \end{array}\right\}$

a) Determina los valores de m para los que el sistema tiene una única solución. Calcula dicha solución para $m = 1$.

La matriz ampliada es $A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ m & 0 & 2 & 0 \\ 0 & m & -1 & m \end{pmatrix}$. Como $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{r}(A) \geq 2$.

Orlando este menor con la columna 1 y la fila 3 de A, nos queda el determinante de A, cuyo valor es (por Sarrus): $|A| = m^2 + 3m - 2m = m^2 + m = m(m+1)$.
Igualando a 0: $m = 0$ ó $m = -1$.
Estos son los dos valores de m que anulan $|A|$. Por tanto, si $m \neq 0$ y $m \neq -1$, se tiene que r(A) = 3, por lo que r(A') = 3 y el sistema será compatible determinado, con solución única.
Nos piden resolverlo para uno de estos valores: $m = 1$. Para dicho valor:

$A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Vamos a resolverlo por Gauss que, cuando el sistema no depende de un parámetro, suele ser más cómodo que por Cramer. Comenzamos con $F_2 - F_1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2+3F_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2 \leftrightarrow F_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

El sistema está triangularizado. Multiplicando por –1/2 la última fila, la tercera ecuación es: $z = 1$. Sustituyendo en la segunda:

$$y - z = 1 \Rightarrow y - 1 = 1 \Rightarrow y = 2$$

Y sustituyendo en la primera:

$$x + 3\cdot 2 + 1 = 5 \Rightarrow x = -2.$$

Por tanto, la solución única es: ($x = -2$, $y = 2$, $z = 1$).

b) Determina los valores de m para los que el sistema tiene infinitas soluciones. Calcula dichas soluciones.

Del apartado anterior, nos quedó pendiente averiguar qué ocurre cuando $m = 0$ ó $m = -1$. Veámoslo.

Si m = 0, $A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, del que teníamos ya un menor no nulo. Orlándolo con la C_4 y con la F_3: $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ = 0, porque $F_2 = -2F_3$. Por tanto, también r(A') = 2, con lo que el sistema tiene infinitas soluciones, al ser compatible indeterminado.

La tercera fila de la matriz ampliada no forma parte del menor no nulo que hemos encontrado, por lo que la eliminamos. Tampoco la primera columna está en dicho menor, por lo que la incógnita x la pasamos al segundo miembro y la tomamos como si fuera un parámetro conocido. El sistema resultante es:

$\left.\begin{array}{r} 3y + z = 5 - x \\ 2z = 0 \end{array}\right\}$ De donde, de forma inmediata, z = 0; $3y = 5 - x \;\Rightarrow\; y = \dfrac{5-x}{3}$.

Por tanto, llamando $x = t$, las infinitas soluciones tienen la forma (hay una para cada valor de t):

$$(x, y, z) = \left(t, \frac{5-t}{3}, 0 \right).$$

Nos aseguramos de que el valor de m que queda por estudiar no hace que el sistema tenga, también, infinitas soluciones.

Si m = –1, la matriz ampliada es:

$A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Un menor no nulo es $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$. Sabemos que es el mayor que podemos encontrar en A, puesto que r(A) = 2. Orlándolo con la C_4:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2(-3+5) \neq 0 \;\Rightarrow\; r(A') = 3 \neq r(A) = 2$$

Por tanto, el sistema es incompatible para este valor.

c) ¿Hay algún valor de m para el que el sistema no tiene solución?

Se acaba de calcular al finalizar el apartado anterior: Si m = –1, el sistema es incompatible, por lo que no tiene solución.

5) (Sobr 05) Considera el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{r} (b+1)x + y + z = 2 \\ x + (b+1)y + z = 2 \\ x + y + (b+1)z = -4 \end{array}\right\}$.

a) Clasifica el sistema según los valores del parámetro b.

$$A' = \begin{pmatrix} b+1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & b+1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & b+1 & -4 \end{pmatrix}$$

$r(A) \geq 1$, pero no es posible encontrar un menor de orden 2 en el que no aparezca b. Entonces, lo que haremos es ver cuándo $r(A)$ = 3. Es decir, en lugar de proceder, como es habitual a la hora de calcular rangos, a orlar menores no nulos cada vez de mayor tamaño, lo hacemos a la inversa, o sea, buscando el menor no nulo de mayor tamaño posible. Además, el determinante de la matriz de los coeficientes A tiene la peculiaridad de que todas las filas suman lo mismo, por lo que existe un procedimiento estándar de cálculo del mismo:

$$|A| = \begin{vmatrix} b+1 & 1 & 1 \\ 1 & b+1 & 1 \\ 1 & 1 & b+1 \end{vmatrix} \underset{F_1+(F_2+F_3)}{=} \begin{vmatrix} b+3 & b+3 & b+3 \\ 1 & b+1 & 1 \\ 1 & 1 & b+1 \end{vmatrix} = (b+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & b+1 & 1 \\ 1 & 1 & b+1 \end{vmatrix} =$$

$$\underset{\substack{C_2-C_1 \\ C_3-C_1}}{=} (b+3)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 1 & 0 & b \end{vmatrix} = (b+3)b^2$$

Como consecuencia, $|A| = 0 \iff b = -3$ ó $b = 0$. Así que:

- <u>Si $b \neq -3$ y $b \neq 0$</u> se tiene que $r(A) = 3$, por lo que también lo será $r(A')$ (no puede valer más de 3), y el sistema será <u>*compatible determinado*</u>.
- <u>Si $b = -3$</u> $\Rightarrow$ $A' = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$. Sabemos que, para este valor, $|A| = 0$. Y cómo $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow r(A) = 2$. Orlamos este menor con la F_1 y C_4 de A' (que es la única manera de orlarlo en A'):

  $$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -16 + 2 + 2 + 4 + 4 + 4 = 0$$

  por lo que, también, $r(A') = 2 \Rightarrow$ El sistema es <u>*compatible indeterminado*</u>, puesto que dicho valor es menor que el número de incógnitas.
- <u>Si $b = 0$</u> $\Rightarrow$ $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$. Como A tiene sus tres filas iguales y distintas de 0, tenemos que $r(A) = 1$ (sólo tiene una fila linealmente independiente). El único menor no nulo que podemos obtener es el formado por un único elemento, por ejemplo, $a_{11} = 1$. Al orlarlo con la C_4 y la F_3 de A', queda:

  $$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} \neq 0$$

  por lo que $r(A') = 2 \neq r(A) \Rightarrow$ El <u>*sistema*</u> es <u>*incompatible*</u>.

b) Resuelve el sistema cuando sea compatible indeterminado.

Según lo anterior, es para $b = -3$. La ecuación que no forma parte del menor no nulo encontrado antes es la primera, por lo que es combinación lineal de las otras dos, con lo que la eliminamos. Igualmente, la incógnita z no está en dicho menor, por lo que la consideramos como un número conocido, $z = t$, y la pasamos al segundo miembro. Con ello, que el sistema es:

$$\left.\begin{aligned} x - 2y &= 2 - t \\ x + y &= -4 + 2t \end{aligned}\right\}$$

Por reducción, que para dos ecuaciones es similar a Gauss, restando la primera ecuación menos la segunda, se obtiene:

$$-3y = 6 - 3t \quad \Rightarrow \quad y = -2 + t$$

Sustituyendo en la primera:

$$x - 2(-2+t) = 2 - t \quad \Rightarrow \quad x + 4 - 2t = 2 - t \quad \Rightarrow \quad x = t - 2$$

Luego las infinitas soluciones del sistema quedan en función de t, a quien podemos darle valores libremente. Y tienen la forma:

$$(x, y, z) = (t-2, t-2, t)$$

6) (Sobr 07) Considera el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} x \quad + y + mz &= \ \ 1 \\ my \quad - z &= -1 \\ x + 2my \quad &= \ \ 0 \end{aligned}\right\}$$

a) Clasifica el sistema según los valores de m.

La matriz ampliada es:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m & 1 \\ 0 & m & -1 & -1 \\ 1 & 2m & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Podemos encontrar en A un menor de orden 2 no nulo: $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$, por lo que $r(A) \geq 2$.

Además:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & m & -1 \\ 1 & 2m & 0 \end{vmatrix} = -1 - m^2 + 2m$$

$$|A| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m^2 - 2m + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (m-1)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m = 1.$$

En conclusión:

- Si $m \neq 1 \quad \Rightarrow \quad r(A) = 3 \quad \Rightarrow \quad r(A') = 3 \quad \Rightarrow$ Sistema *compatible determinado*.
- Si $m = 1 \quad \Rightarrow \quad r(A) = 2$. Si orlamos el menor no nulo de orden 2 que teníamos con la fila 3 y columna 4 de A':

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Por lo que $r(A') = 2$ y el sistema es *compatible indeterminado*.

b) Resuelve el sistema cuando sea compatible indeterminado.

Como hemos visto, es el caso de $m = 1$. La ecuación que no forma parte del menor no nulo que tenemos es la primera, por lo que prescindimos de ella. Asimismo, la incógnita y no está en el menor, por lo que la consideramos como parámetro (vamos a llamar $y = t$) y la pasamos al segundo miembro. El sistema es, entonces:

$$\begin{cases} -z = -1 - t \\ \quad x = -2t \end{cases}$$

Ya tenemos las incógnitas despejadas en función de t, por lo que las infinitas soluciones (dependiendo de los valores arbitrarios que demos a t) tienen la forma:

$$(-2t, t, 1 + t)$$

7) (Sobr 07) Considera el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} x+\ y+\ z=0 \\ 2x+\lambda y+\ z=2 \\ x+\ y+\lambda z=\lambda-1 \end{array}\right\}$$

a) Determina el valor de λ para que el sistema sea incompatible.

La matriz ampliada es:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & \lambda & 1 & 2 \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda-1 \end{pmatrix}$$

Se tiene que el determinante de la matriz de los coeficientes vale:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 + 2 - \lambda - 2\lambda - 1 = \lambda^2 - 3\lambda + 2.$$

Con lo que $|A| = 0 \iff \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \iff \lambda = 1$ ó $\lambda = 2$. Estudiemos los distintos casos que pueden presentarse.

- Si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq 2 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow r(A) = 3 \Rightarrow r(A') = 3 \Rightarrow$ Sistema *compatible determinado*.
- Si $\lambda = 1 \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. $r(A) = 2$, porque $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ es un menor, y $|A| = 0$ (éste era uno de los dos valores que anulaban el determinante). Orlando dicho menor con la fila 3 y la columna 4 de A':

  $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ (tiene dos filas iguales)}$$

  Con lo que $r(A') = 2$. El sistema es, entonces, *compatible indeterminado*.
- Si $\lambda = 2 \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Sabemos que $|A| = 0$. El siguiente menor de A es no nulo: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ (intersecciones de las filas 1 y 3 con las columnas 1 y 3). Por tanto, $r(A) = 2$. Al orlar este menor con la fila 2 y columna 4 de A':

  $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 - 2 - 4 \neq 0 \Rightarrow r(A') = 3$$

  Por tanto, el sistema es *incompatible*.

b) Resuelve el sistema para $\lambda = 1$.

Hemos averiguado que en este caso el sistema es compatible indeterminado. Teníamos un menor no nulo formado por las intersecciones de las filas 1 y 2 con las columnas 1 y 2. Eliminamos la ecuación que no está en este menor, que es la tercera, y llamamos $z = t$, porque es la incógnita que no forma parte del menor, y la pasamos al segundo miembro. El sistema resultante es:

$$\left.\begin{aligned} x+y&=-t \\ 2x+y&=2-t \end{aligned}\right\}$$

El sistema resulta muy cómodo de resolver por reducción, porque al restarle a la segunda ecuación la primera, resulta:

$$x = 2$$

Y sustituyendo en la primera ecuación:

$$2 + y = -t \;\Rightarrow\; y = -\mathrm{t} - 2.$$

Por tanto, las infinitas soluciones (dependiendo de valores arbitrarios para t) tienen la forma:

$$(x, y, z) = (2, -2-t, t)$$

8) (Sobr 07) Clasifica y resuelve el siguiente sistema según los valores de a:

$$\left.\begin{aligned} x+\ y+\ z&=0 \\ (a+1)y+2z&=y \\ x-2y+(2-a)z&=2z \end{aligned}\right\}$$

Ponemos, para empezar, todas las incógnitas en el primer miembro, y los términos independientes en el segundo, de manera que tengamos el sistema en la forma habitual:

$$\left.\begin{aligned} x+\ y+\ z&=0 \\ ay+y+2z-y&=0 \\ x-2y+2z-az-2z&=0 \end{aligned}\right\} \;\Rightarrow\; \left.\begin{aligned} x+\ y+\ z&=0 \\ ay+2z&=0 \\ x-2y-az&=0 \end{aligned}\right\}$$

Nos resulta un sistema homogéneo, cuya matriz de coeficientes es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 2 \\ 1 & -2 & -a \end{pmatrix}$$

En el caso de sistemas homogéneos, la matriz ampliada A' añade una columna de ceros, por lo que su rango coincidirá con el de la matriz de los coeficientes. Calculamos su determinante:

$$|A| = -a^2 + 2 - a + 4 = -a^2 - a + 6 = 0 \;\Leftrightarrow\; a^2 + a - 6 = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; a = \frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1\pm 5}{2} = \left\langle \begin{aligned} &= \frac{-1-5}{2} = -3 \\ &= \frac{-1+5}{2} = 2 \end{aligned}\right.$$

Por tanto:

- Si $\boxed{a \neq -3 \text{ y } a \neq 2}$ $\Rightarrow$ $|A| \neq 0$ $\Rightarrow$ $r(A) = r(A') = 3$ $\Rightarrow$ Sistema *compatible determinado* lo que en el caso de sistemas homogéneos significa que la única solución es la trivial: $\boxed{(x, y, z) = (0, 0, 0)}$.
- Si $\boxed{a = -3}$ $\Rightarrow$ la matriz de coeficientes se transforma en:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Sabemos que, en este caso, $|A| = 0$. Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} \neq 0 \;\Rightarrow\; r(A) = r(A') = 2 \;\Rightarrow$ sistema *compatible indeterminado*, con infinitas soluciones. Pasando $z = t$ al segundo miembro (es la incógnita que no pertenece al menor no nulo hallado) y eliminando la tercera ecuación (no está en dicho menor), el sistema es:

$$\left.\begin{array}{r} x+y=-t \\ -3y=-2t \end{array}\right\} \Rightarrow \text{(2ª ec.) } y = \frac{2}{3}t \;\Rightarrow\; \text{(Sust. en la 1ª ec): } x+\frac{2}{3}t=-t \;\Rightarrow\; x = -\frac{5}{3}t$$

Luego las infinitas soluciones (en función de t) son de la forma:

$$\boxed{(x, y, z) = (-\frac{5}{3}t, \frac{2}{3}t, t)}$$

- Si $\boxed{a = 2} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$, con $|A| = 0$ y el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$. El sistema es:

$$\left.\begin{array}{r} x+y=-t \\ 2y=-2t \end{array}\right\} \Rightarrow y=-t \qquad \text{Sustituyendo en la 1ª ec: } x-t=-t \;\Rightarrow\; x=0.$$

Luego las soluciones son de la forma:

$$\boxed{(x, y, z) = (0, -t, t)}$$