IES Fernando de Herrera **Curso 2015 / 16**

Segundo trimestre - Primer examen – 2º Bach CCSS

NOMBRE: ____

Instrucciones: **1)** Todos los **folios** deben tener el **nombre** y estar **numerados** en la parte superior. **2)** Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. **3)** No se puede usar **corrector ni lápiz**, y el bolígrafo debe ser de **tinta indeleble**. Se aconseja no usar borrador. **4)** Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar** la respuesta a una pregunta con las de otras. **5)** **Desatender las instrucciones puede penalizarse con hasta 1 punto** o la **anulación** en caso de usar tinta corregible.

EN LA PREGUNTA 4 HAY QUE OBTENER, AL MENOS 1,8 PUNTOS. EN CASO CONTRARIO, LA CALIFICACIÓN MÁXIMA ES DE 4,4

1) Calcular los siguientes límites: *(2 puntos)*

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2-3x}-1}{1-x}$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{4x^2-3x}-1}{1-x}$

2) Calcular las asíntotas de $f(x) = \dfrac{-2x^3-3x}{1-x^2}$ *(2,5 puntos)*

3) Estudiar la continuidad de la siguiente función, clasificando sus discontinuidades:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x-1}{x-1} & \text{si} \quad x<-1 \\ \dfrac{3x^2-3}{x(x-1)} & \text{si} \quad x\geq -1 \end{cases}$$ *(3 puntos)*

4) Calcular y simplificar las derivadas de las siguientes funciones: *(2,5 puntos)*

a) $f(x) = \dfrac{2(3x+1)^2}{3x-1}$

b) $g(x) = (x^2 - x + 1)\, e^{5x}$

c) $h(x) = 3\sqrt[3]{2(5x^2-1)^2}$

d) $j(x) = \ln\left(\sqrt[5]{\dfrac{(5x-3)^3}{2x^4}}\right)$

SOLUCIONES

1) Calcular los siguientes límites: *(2 puntos)*

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2-3x}-1}{1-x}$

Cuando se obtiene indeterminación ∞/∞ y tenemos polinomios o raíces o potencias de polinomios, podemos sustituir tales expresiones por sólo su término de mayor grado, tanto en numerador como en denominador:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4x^2-3x}-1}{1-x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2}}{-x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{-x} = \lim_{x\to\infty}(-2) = \boxed{-2}$$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{4x^2-3x}-1}{1-x}$

Al obtener 0/0 y aparecer raíces dentro de restas, multiplicamos y dividimos por los conjugados de dichas restas, para obtener polinomios que podamos factorizar:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{4x^2-3x}-1}{1-x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{4x^2-3x}-1}{1-x}\cdot\frac{\sqrt{4x^2-3x}+1}{\sqrt{4x^2-3x}+1} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{4x^2-3x-1}{(1-x)(\sqrt{4x^2-3x}+1)} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

Factorizamos, por Ruffini los polinomios $4x^2-3x-1$ y $-x+1$:

	4	–3	–1
1		4	1
	4	1	0

	–1	1
1		–1
	–1	0

Por tanto, el límite es:

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(4x+1)(x-1)}{-(x-1)(\sqrt{4x^2-3x}+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{4x+1}{-(\sqrt{4x^2-3x}+1)} = \frac{5}{-(1+1)} = \boxed{-\frac{5}{2}}$$

2) Calcular las asíntotas de $f(x) = \dfrac{-2x^3-3x}{1-x^2}$ *(2,5 puntos)*

En primer lugar, su dominio es R – {–1, 1}, porque estos valores que quitamos son los que anulan el denominador.

- Asíntotas verticales:

$$\lim_{x\to -1}\frac{-2x^3-3x}{1-x^2} = \left(\frac{2+3}{0}\right) = \infty \Rightarrow \text{ la recta } \boxed{x=-1 \text{ es asíntota vertical}}.$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{-2x^3-3x}{1-x^2} = \left(\frac{-2-3}{0}\right) = \infty \Rightarrow \text{ la recta } \boxed{x=1 \text{ es asíntota vertical}}.$$

- Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-2x^3-3x}{1-x^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{-2x^3}{-x^2} = \lim_{x\to\infty} 2x = \infty \Rightarrow \boxed{\text{No tiene a.horiz.}}$$

- Asíntotas oblicuas:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-2x^3-3x}{1-x^2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-2x^3-3x}{(1-x^2)x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-2x^3-3x}{x-x^3} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-2x^3}{-x^3} = 2$$

$$n = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{-2x^3-3x}{1-x^2} - 2x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{-2x^3-3x-2x(1-x^2)}{1-x^2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-2x^3-3x-2x+2x^3}{1-x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{-5x}{1-x^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{-5x}{-x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{5}{x} = 0$$

Por tanto, la recta $\boxed{y = 2x \text{ es asíntota oblicua}}$.

3) Estudiar la continuidad de la siguiente función, clasificando sus discontinuidades:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x-1}{x-1} & \text{si } x < -1 \\ \dfrac{3x^2-3}{x(x-1)} & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

(3 puntos)

- $(-\infty, -1)$: f coincide con $g(x) = \dfrac{2x-1}{x-1}$. Las funciones elementales son continuas en su dominio, y el de ésta es $\mathbb{R} - \{1\}$. O sea, que tiene, únicamente, una discontinuidad en $x = 1 \notin (-\infty, -1) \Rightarrow$ f es continua en $(-\infty, -1)$.
- $(-1, +\infty)$: f coincide con $h(x) = \dfrac{3x^2-3}{x(x-1)}$, que es continua en $\mathbb{R} - \{0, 1\}$.

  Ambos valores están en el intervalo estudiado, luego son, también, discontinuidades de f. Clasifiquémoslas:
  - $x = 0$: 1) No existe $f(0)$; 2) $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{3x^2-3}{x(x-1)} = \left(\dfrac{-3}{0^+}\right) = -\infty$; $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{3x^2-3}{x(x-1)} = \left(\dfrac{-3}{0^-}\right) = +\infty \Rightarrow$ En $x = 0$ hay disc. asintótica de salto infinito.
  - $x = 1$: 1) No existe $f(1)$; 2) $\lim_{x\to 1} \dfrac{3x^2-3}{x(x-1)} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 1} \dfrac{3(x^2-1)}{x(x-1)} = \lim_{x\to 1} \dfrac{3(x-1)(x+1)}{x(x-1)} = \lim_{x\to 1} \dfrac{3(x+1)}{x} = 6 \Rightarrow$ En $x = 1$ hay disc. evitable.
- $x = -1$: 1) $\exists f(-1) = \dfrac{0}{2} = 0$; 2) $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \dfrac{2x-1}{x-1} = \dfrac{-3}{-2} = \dfrac{3}{2}$; $\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \dfrac{3x^2-3}{x(x-1)} = 0 \Rightarrow$ En $x = -1$ hay disc. de salto finito.

En suma, f es continua en $\mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$, con discontinuidades de salto finito en $x = -1$, asintótica de salto infinito en $x = 0$ y evitable en $x = 1$.

4) Calcular y simplificar las derivadas de las siguientes funciones: *(2,5 puntos)*

a) $f(x) = \dfrac{2(3x+1)^2}{3x-1}$

$$f'(x) = \frac{4(3x+1)3(3x-1)-2(3x+1)^2 3}{(3x-1)^2} = \frac{(3x+1)[12(3x-1)-6(3x+1)]}{(3x-1)^2} =$$

$$= \frac{(3x+1)(36x-12-18x-6)}{(3x-1)^2} = \boxed{\frac{(3x+1)(18x-18)}{(3x-1)^2}} = \frac{18(3x+1)(x-1)}{(3x-1)^2} =$$

$$= \frac{18(3x^2-3x+x-1)}{(3x-1)^2} = \boxed{\frac{18(3x^2-2x-1)}{(3x-1)^2}}$$

b) $g(x) = (x^2 - x + 1)\, e^{5x}$

$$g'(x) = (2x-1)\, e^{5x} + 5(x^2 - x + 1)\, e^{5x} = e^{5x}(2x - 1 + 5x^2 - 5x + 5) =$$
$$= \boxed{e^{5x}(5x^2 - 3x + 4)}$$

c) $h(x) = 3\sqrt[3]{2(5x^2-1)^2}$

$$h'(x) = 3\frac{2\cdot 2(5x^2-1)10x}{3\sqrt[3]{[2(5x^2-1)^2]^2}} = \frac{40x(5x^2-1)}{\sqrt[3]{4(5x^2-1)^4}} = \frac{40x(5x^2-1)}{\sqrt[3]{4(5x^2-1)^3(5x^2-1)}} =$$

$$\frac{40x(5x^2-1)}{(5x^2-1)\sqrt[3]{4(5x^2-1)}} = \boxed{\frac{40x}{\sqrt[3]{4(5x^2-1)}}}$$

d) $j(x) = \ln\left(\sqrt[5]{\frac{(5x-3)^3}{2x^4}}\right)$

Simplificamos antes de derivar, aplicando propiedades de logaritmos:

$$j(x) = \ln\left(\sqrt[5]{\frac{(5x-3)^3}{2x^4}}\right) = \frac{1}{5}\ln\left(\frac{(5x-3)^3}{2x^4}\right) = \frac{1}{5}[\ln(5x-3)^3 - \ln(2x^4)] =$$

$$= \frac{1}{5}[3\ln(5x-3) - (\ln(2) + \ln(x^4))] = \frac{1}{5}[3\ln(5x-3) - \ln(2) - 4\ln(x)]$$

Y derivamos:

$$j'(x) = \frac{1}{5}\left[3\frac{5}{5x-3} - 0 - 4\frac{1}{x}\right] = \frac{1}{5}\frac{3\cdot 5}{5x-3} - \frac{1}{5}\frac{4}{x} = \boxed{\frac{3}{5x-3} - \frac{4}{5x}}$$

NOMBRE: ____

Instrucciones: **1)** Todos los **folios** deben tener el **nombre** y estar **numerados** en la parte superior. **2)** Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. **3)** No se puede usar **corrector ni lápiz**, y el bolígrafo debe ser de **tinta permanente**. Se aconseja no usar borrador. **4)** Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar** la respuesta a una pregunta con las de otras. **5)** **Desatender las instrucciones puede penalizarse con hasta 1 punto** o la **anulación** en caso de usar tinta corregible.

EN LA PREGUNTA 4 HAY QUE OBTENER, AL MENOS 1,4 PUNTOS. EN CASO CONTRARIO, LA CALIFICACIÓN MÁXIMA ES DE 4,4

1) Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2+x+2 & \text{si} \quad 0 \le x \le 2 \\ \dfrac{8x^2+ax-6}{x-1} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

   a) Hallar a para que la función sea continua en todo su dominio, si es posible. *(1,5 puntos)*
   b) Calcular las asíntotas para $a = -9$. *(1 punto)*
   c) Estudiar su monotonía y extremos relativos para $a = -9$. *(1,5 puntos)*
   d) Calcular su tangente en $x = 3$ para $a = -9$. *(1 punto)*

2) Calcular los extremos absolutos de $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$, con $0 \le x \le 5$. *(1,5 ptos)*

3) Calcular a y b para que la siguiente función tenga un punto de inflexión en $(1, 2)$: $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 2$ *(1,5 puntos)*

4) Derivar y simplificar: *(2 puntos)*

   a) $f(x) = \dfrac{2(3x+1)}{(3x-1)^2}$
   b) $g(x) = (x^2 - 2x + 1)\, e^{5x^2}$
   c) $h(x) = 3\sqrt[3]{5x^2-1}$
   d) $j(x) = \ln\left(\sqrt[5]{\dfrac{(5x-3)^3}{2x^4}}\right)$

SOLUCIONES

1) Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2+x+2 & \text{si} \quad 0 \le x \le 2 \\ \dfrac{8x^2+ax-6}{x-1} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

a) Hallar a para que la función sea continua en todo su dominio, si es posible. *(1,5 puntos)*

- [0, 2): f es continua porque está definida mediante una función polinómica: $y = x^2 + x + 2$, que son continuas en todos los puntos de R.
- (2, +∞): f está definida en este intervalo mediante una función racional. Como las funciones elementales son continuas en su dominio, y el de ésta está constituido por todos los números reales salvo $x = 1$, dado que este valor no está en el intervalo que estudiamos, f es continua en todo él.
- $x = 2$: Estudiamos este valor por separado porque los puntos de conexión de definiciones en una función definida a trozos hay que estudiarlos siempre aparte.

$$1)\ \exists f(2) = 4 + 2 + 2 = 8; \quad 2)\ \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (x^2+x+2) = 8;$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}\left(\frac{8x^2+ax-6}{x-1}\right) = \frac{32+2a-6}{2-1} = 26 + 2a$$

Para ser continua también aquí, estos resultados deben coincidir. Luego:

$$26 + 2a = 8 \Rightarrow 2a = -18 \Rightarrow a = -9$$

Por tanto, $\boxed{f \text{ es continua en } [0, +\infty) \text{ si y sólo si } a = -9}$.

b) Calcular las asíntotas para $a = -9$. *(1 punto)*

La función queda así:

$$f(x) = \begin{cases} x^2+x+2 & \text{si} \quad 0 \le x \le 2 \\ \dfrac{8x^2-9x-6}{x-1} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

- Verticales: Sólo puede tenerla en puntos de discontinuidad o en los extremos del dominio. Como no tiene discontinuidades y en $x = 0$, extremo donde se inicia el dominio, la función tiene expresión polinómica, $\boxed{\text{no tiene asíntotas verticales}}$.
- Horizontales: La variable x no puede tender a $-\infty$. Por tanto, sólo estudiamos:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{8x^2-9x-6}{x-1} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{8x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} 8x = +\infty$$

Por tanto, $\boxed{\text{no tiene asíntotas horizontales}}$.

- Oblicuas: Igualmente, sólo puede tenerlas si $x \to +\infty$:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{8x^2-9x-6}{x-1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{8x^2-9x-6}{x(x-1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{8x^2-9x-6}{x^2-x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{8x^2}{x^2} = 8$$

$$n = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{8x^2-9x-6}{x-1} - 8x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{8x^2-9x-6-8x(x-1)}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{8x^2-9x-6-8x^2+8x}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x-6}{x-1} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{x} = -1$$

Por tanto, $\boxed{\text{la recta } y = 8x - 1 \text{ es asíntota horizontal}}$ si $x \to +\infty$.

c) Estudiar su monotonía y extremos relativos para $a = -9$. *(1,5 puntos)*

Derivamos la función, de la que ya sabemos que no tiene discontinuidades en su dominio. Teniendo en cuenta que en intervalos abiertos puede derivarse directamente:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } 0<x<2 \\ \dfrac{(16x-9)(x-1)-(8x^2-9x-6)}{(x-1)^2} & \text{si } x>2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } 0<x<2 \\ \dfrac{16x^2-16x-9x+9-8x^2+9x+6}{(x-1)^2} & \text{si } x>2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } 0<x<2 \\ \dfrac{8x^2-16x+15}{(x-1)^2} & \text{si } x>2 \end{cases}$$

Y como $f'(2^-) = 4 + 1 = 5$ y $f'(2^+) = \dfrac{32-32+15}{1} = 15 \Rightarrow$ No es derivable en $x = 2$, porque no coinciden las derivadas laterales. Por tanto:

$$\boxed{f'(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } 0<x<2 \\ \dfrac{8x^2-16x+15}{(x-1)^2} & \text{si } x>2 \end{cases}}$$

Monotonía y extremos relativos

- Discontinuidades de f: No tiene.
- Discontinuidades de f': $x = 1$ no es discontinuidad, porque no es mayor que 2. Sólo lo es $x = 2$, donde no existe f'.
- $f'(x) = 0$:
  - $0 < x < 2$: $2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1/2$. Pero este valor no es válido, puesto que no está entre 0 y 2.
  - $x > 2$: $\dfrac{8x^2-16x+15}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow 8x^2 - 16x + 15 = 0$, siendo $x \neq 1$, para no anular el denominador $\Rightarrow x = \dfrac{16 \pm \sqrt{256-480}}{16}$, que no tiene solución.

Por tanto, el cuadro de monotonía es:

	(0, 2)	2	(2, +∞)
f'	+	∄	+
f	↗	P.A.	↗

No tiene extremos relativos, pero $\boxed{x = 2 \text{ es un punto anguloso}}$, porque la función es continua en él pero las derivadas laterales no coinciden.

d) Calcular su tangente en $x = 3$ para $a = -9$. *(1 punto)*

Alrededor de $x = 3$, $f(x) = \dfrac{8x^2-9x-6}{x-1}$. Trabajamos sólo con esta fórmula.

- Punto de tangencia: Como $f(3) = \dfrac{72-27-6}{2} = \dfrac{39}{2}$, es: $\boxed{(3, 39/2)}$.

- Pendiente de la tangente: $f'(x) = \dfrac{8x^2-16x+15}{(x-1)^2} \Rightarrow m = f'(3) = \dfrac{39}{4}$
- Ecuación de la recta tangente:

$$y - \frac{39}{2} = \frac{39}{4}(x-3) \Rightarrow y = \frac{39}{4}x - \frac{117}{4} + \frac{39}{2} \Rightarrow \boxed{y = \frac{39}{4}x - \frac{39}{4}}$$

2) Calcular los extremos absolutos de $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$, con $0 \le x \le 5$. *(1,5 ptos)*

Comenzamos con $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$.

- Extremos del dominio: $x = 0$; $x = 5$.
- Discontinuidades de f: No hay (es polinómica).
- Discontinuidades de f': No hay (es polinómica).
- $f'(x) = 0$: $3x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} =$

$= \dfrac{4 \pm 2}{2} = \langle\begin{smallmatrix} =1 \\ =3 \end{smallmatrix}$, ambas válidas (están entre 0 y 5).

Estudiamos las imágenes (no límites, en este caso) en los puntos resultantes:

- $x = 0$: $f(0) = 0$.
- $x = 1$: $f(1) = 1 - 6 + 9 = 4$.
- $x = 3$: $f(3) = 27 - 54 + 27 = 0$.
- $x = 5$: $f(5) = 125 - 6 \cdot 25 + 45 = 20$.

Máximo absoluto: 20, que se alcanza para $x = 5$.
Mínimo absoluto: 0, que se alcanza para $x = 0$ y para $x = 3$.

3) Calcular a y b para que la siguiente función tenga un punto de inflexión en $(1, 2)$:
$f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 2$ *(1,5 puntos)*

Como:

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b;\quad f''(x) = 6x + 2a;\quad f'''(x) = 6$$

Para que f tenga un punto de inflexión en $x = 1$, bastará con que:

$$f''(1) = 0 \text{ y que } f'''(1) \neq 0$$

Es decir:

$$6 + 2a = 0 \Leftrightarrow \boxed{a = -3} \text{ y que } \boxed{6 \neq 0}\text{, que se cumple.}$$

Además, las coordenadas del punto de inflexión son $(1, 2) \Rightarrow f(1) = 2$:

$$1 + a + b - 2 = 2 \Leftrightarrow \boxed{a + b = 3}$$

Sustituyendo el valor de a: $-3 + b = 3 \Rightarrow \boxed{b = 6}$.

Por tanto: $\boxed{a = -3 \text{ y } b = 6}$.

4) Derivar y simplificar: *(2 puntos)*

a) $f(x) = \dfrac{2(3x+1)}{(3x-1)^2}$

$$f(x) = 2\frac{3x+1}{(3x-1)^2} \Rightarrow f'(x) = 2\frac{3(3x-1)^2 - 2(3x-1)3(3x+1)}{(3x-1)^4} =$$

$$= 2\frac{(3x-1)[3(3x-1) - 6(3x+1)]}{(3x-1)^4} = 2\frac{9x-3-18x-6}{(3x-1)^3} = \boxed{2\frac{-9x-9}{(3x-1)^3}}$$

b) $g(x) = (x^2 - 2x + 1)\, e^{5x^2}$

$$g'(x) = (2x-2)\, e^{5x^2} + (x^2 - 2x + 1)10x\, e^{5x^2} = e^{5x^2}\,(2x - 2 + 10x^3 - 20x^2 + 10x) =$$
$$= \boxed{e^{5x^2}\,(10x^3 - 20x^2 + 12x - 2)}$$

c) $h(x) = 3\sqrt[3]{5x^2-1}$

$$h'(x) = 3\frac{10x}{3\sqrt[3]{(5x^2-1)^2}} = \boxed{\frac{10x}{\sqrt[3]{(5x^2-1)^2}}} = \frac{10x}{\sqrt[3]{(5x^2-1)^2}}\frac{\sqrt[3]{5x^2-1}}{\sqrt[3]{5x^2-1}} = \frac{10x\sqrt[3]{5x^2-1}}{\sqrt[3]{(5x^2-1)^3}} =$$
$$= \boxed{\frac{10x\sqrt[3]{5x^2-1}}{5x^2-1}}$$

d) $j(x) = \ln\left(\sqrt[5]{\dfrac{(5x-3)^3}{2x^4}}\right)$

Simplificamos antes de derivar, aplicando propiedades de logaritmos:

$$j(x) = \ln\left(\sqrt[5]{\frac{(5x-3)^3}{2x^4}}\right) = \frac{1}{5}\ln\left(\frac{(5x-3)^3}{2x^4}\right) = \frac{1}{5}[\ln(5x-3)^3 - \ln(2x^4)] =$$
$$= \frac{1}{5}[3\ln(5x-3) - (\ln(2) + \ln(x^4))] = \frac{1}{5}[3\ln(5x-3) - \ln(2) - 4\ln(x)]$$

Y derivamos:

$$j\,'(x) = \frac{1}{5}\left[3\frac{5}{5x-3} - 0 - 4\frac{1}{x}\right] = \frac{1}{5}\frac{3\cdot 5}{5x-3} - \frac{1}{5}\frac{4}{x} = \boxed{\frac{3}{5x-3} - \frac{4}{5x}}$$

IES Fernando de Herrera **Curso 2015 / 16**

Segundo trimestre - Prueba de observación continua – 2º Bach CCSS

Recuperación y subida de nota de la 2ª evaluación

NOMBRE: ____

Instrucciones: **1)** Todos los **folios** deben tener el **nombre** y estar **numerados** en la parte superior. **2)** Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. **3)** No se puede usar **corrector ni lápiz**, y el bolígrafo debe ser de **tinta permanente**. Se aconseja no usar borrador. **4)** Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar** la respuesta a una pregunta con las de otras. **5)** **Desatender las instrucciones puede penalizarse con hasta 1 punto** o la **anulación** en caso de usar tinta corregible.

EN LA PREGUNTA 4 HAY QUE OBTENER, AL MENOS 1,4 PUNTOS. EN CASO CONTRARIO, LA CALIFICACIÓN MÁXIMA ES DE 4,4

1) Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(ax^2-7) & \text{si} \quad x \le -1 \\ -x^3+b(x^2-1) & \text{si} \quad -1 < x \le 3 \end{cases}$

   a) Hallar a y b para que f sea derivable en $(-\infty, 3)$. *(2 puntos)*

   b) Para $a = 9$ y $b = 3$, estudiar su monotonía y calcular sus extremos relativos. *(1,5 puntos)*

   c) Para $a = 9$ y $b = 3$, calcular la ecuación de la recta tangente a la función en $x = -1$. *(1,5 puntos)*

2) Dada la función $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 3$ definida en $[-1, 3]$, calcular sus extremos absolutos (puntos en los que se obtienen y valores que alcanzan). *(1,5 puntos)*

3) Hallar las asíntotas de la siguiente función: *(1,5 puntos)*

$$f(x) = \begin{cases} x^2+2 & \text{si} \quad 0 \le x \le 2 \\ \dfrac{8x^2-10}{x-1} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

4) Derivar y simplificar: *(2 puntos)*

   a) $f(x) = \dfrac{1-x^2}{(x^3-1)^2}$

   b) $g(x) = (4x^2 - 3)e^{-3x^2}$

   c) $h(x) = 3\sqrt[3]{5x^2-1}$

   d) $j(x) = \log(x^2 + x + 1)$

SOLUCIONES

1) Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(ax^2 - 7) & \text{si} \quad x \le -1 \\ -x^3 + b(x^2 - 1) & \text{si} \quad -1 < x \le 3 \end{cases}$

a) Hallar a y b para que f sea derivable en $(-\infty, 3)$. *(2 puntos)*

Para ser derivable, debe ser continua. Estudiamos, entonces, la continuidad, y la exigimos.

Las dos funciones que componen f son continuas, por lo que f es continua en $(-\infty, -1) \cup (-1, 3]$. Falta estudiar el punto de conexión:

1) $\exists f(-1) = \frac{1}{2}(a - 7)$

2) $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} \frac{1}{2}(ax^2 - 7) = \frac{1}{2}(a - 7)$

$\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} \left(-x^3 + b(x^2 - 1)\right) = 1 + b \cdot 0 = 1$

Será continua en $x = -1$ cuando estos tres resultados coincidan. Lo exigimos:

$$\frac{1}{2}(a - 7) = 1 \iff a - 7 = 2 \iff \boxed{a = 9}.$$

Veamos, ahora, la derivada, que debe existir. Podemos derivar en intervalos abiertos, por lo que (sustituida ya $a = 9$):

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} 2 \cdot 9x = 9x & \text{si} \quad x < -1 \\ -3x^2 + 2bx & \text{si} \quad -1 < x < 3 \end{cases}$$

de donde: $f'(-1^-) = -9$; $f'(-1^+) = -3 - 2b$. Como la función tiene que ser derivable, estos valores coinciden:

$$-9 = -3 - 2b \iff 2b = 6 \iff \boxed{b = 3}.$$

$\boxed{\text{La función es derivable en } (-\infty, 3) \text{ si, y sólo si } a = 9 \text{ y } b = 3}$.

b) Para $a = 9$ y $b = 3$, estudiar su monotonía y calcular sus extremos relativos. *(1,5 puntos)*

Según el apartado anterior:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(9x^2 - 7) & \text{si} \quad x \le -1 \\ -x^3 + 3x^2 - 3 & \text{si} \quad -1 < x \le 3 \end{cases} \qquad f'(x) = \begin{cases} 9x & \text{si} \quad x \le -1 \\ -3x^2 + 6x & \text{si} \quad -1 < x < 3 \end{cases}$$

donde ya hemos sustituido el valor de $f'(-1)$, que sabemos cuánto vale.

- Discontinuidades de f o de f': No hay, según lo estudiado.
- $f'(x) = 0$:
  - Si $x \le -1$: $9x = 0 \iff x = 0$, que no sirve, pues no está en la zona $x \le -1$.
  - Si $-1 < x < 3$: $-3x^2 + 6x = 0 \iff -3x(x - 2) = 0 \iff x = 0$ ó $x = 2$

	$(-\infty, 0)$	0	(0, 2)	2	(2, 3)
f'	–	0	+	0	–
f	↘	m	↗	Mx	↘

$\boxed{\text{Tiene un mínimo relativo en } (0, -3) \text{ y un máximo relativo en } (2, 1)}$.

c) Para $a = 9$ y $b = 3$, calcular la ecuación de la recta tangente a la función en $x = -1$. *(1,5 puntos)*

- Punto de tangencia: $f(-1) = 1 \Rightarrow (-1, 1)$.

- Pendiente de la tangente: $m = f'(-1) = 9(-1) = -9$
- Ecuación de la tangente: $y - 1 = -9(x + 1) \Rightarrow y = -9x - 9 + 1 \Rightarrow \boxed{y = -9x - 8}$

2) Dada la función $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 3$ definida en $[-1, 3]$, calcular sus extremos absolutos (puntos en los que se obtienen y valores que alcanzan). *(1,5 puntos)*

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 - 3 \Rightarrow f'(x) = -3x^2 + 6x$$

Para hallar los extremos absolutos de una función, comparamos imágenes, o límites si no existen o si es una discontinuidad, de los siguientes puntos:

- Extremos del dominio: $x = -1$; $x = 3$.
- Discontinuidades de f: No tiene (es polinómica).
- Discontinuidades de f': No tiene, por la misma razón.
- $f'(x) = 0$: $-3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow -3x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0$ ó $x = 2$.

Como:

- $f(-1) = 1$
- $f(0) = -3$
- $f(2) = 1$
- $f(3) = -3$

Por tanto:

El máximo absoluto vale 1 y se alcanza en $x = -1$ y en $x = 2$. El mínimo absoluto vale -3 y se alcanza en $x = 0$ y en $x = 3$.

3) Hallar las asíntotas de la siguiente función: *(1,5 puntos)*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ \dfrac{8x^2 - 10}{x - 1} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- Asíntotas verticales: Puede haberlas en puntos de discontinuidad o en los extremos del dominio. Como $y = x^2 + 2$ es una función polinómica, no presenta discontinuidades. Luego en $[0, 2)$ no tiene discontinuidades. La función $y = \dfrac{8x^2 - 10}{x - 1}$ es racional y tiene una discontinuidad en $x = 1$. Pero ese punto está fuera de la zona donde coincide con $f(x)$, que es $x > 2$, por lo que no es discontinuidad de f. Aunque en $x = 2$ tuviera una discontinuidad, sería de salto finito, por lo que en ella no tendría asíntota vertical (que requiere discontinuidad asintótica). $\boxed{\text{No tiene asíntotas verticales}}$.
- Asíntotas horizontales: Sólo podría tenerlas si $x \to +\infty$, pues la función no llega hasta $-\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{8x^2 - 10}{x - 1} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{8x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} 8x = +\infty \Rightarrow \boxed{\text{No tiene A.H.}}$$

- Asíntotas oblicuas: Nuevamente, sólo estudiamos el caso $x \to +\infty$:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{8x^2 - 10}{x - 1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{8x^2 - 10}{x^2 - x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{8x^2}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} 8 = 8$$

$$n = \lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - mx\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{8x^2 - 10}{x - 1} - 8x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{8x^2 - 10 - 8x^2 + 8x}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-10+8x}{x-1} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{8x}{x} = \lim_{x\to+\infty} 8 = 8$$

Luego $\boxed{y = 8x + 8 \text{ es asíntota oblicua}}$.

4) Derivar y simplificar: *(2 puntos)*

a) $f(x) = \dfrac{1-x^2}{(x^3-1)^2}$

$$f'(x) = \frac{-2x(x^3-1)^2-(1-x^2)2(x^3-1)3x^2}{(x^3-1)^4} = \frac{(x^3-1)[-2x(x^3-1)-(1-x^2)6x^2]}{(x^3-1)^4} =$$

$$= \frac{-2x^4+2x-6x^2+6x^4}{(x^3-1)^3} = \boxed{\frac{4x^4-6x^2+2x}{(x^3-1)^3}}$$

b) $g(x) = (4x^2 - 3)e^{-3x^2}$

$$g'(x) = 8x\,e^{-3x^2} - 6x\,e^{-3x^2}(4x^2 - 3) = e^{-3x^2}(8x - 24x^3 + 18x) = \boxed{e^{-3x^2}(-24x^3 + 26x)}$$

c) $h(x) = 3\sqrt[3]{5x^2-1}$

$$h'(x) = 3\frac{10x}{3\sqrt[3]{(5x^2-1)^2}} = \boxed{\frac{10x}{\sqrt[3]{(5x^2-1)^2}}} = \frac{10x}{\sqrt[3]{(5x^2-1)^2}}\frac{\sqrt[3]{5x^2-1}}{\sqrt[3]{5x^2-1}} = \frac{10x\sqrt[3]{5x^2-1}}{\sqrt[3]{(5x^2-1)^3}} =$$

$$= \boxed{\frac{10x\sqrt[3]{5x^2-1}}{5x^2-1}}$$

d) $j(x) = \log(x^2 + x + 1)$

$$\boxed{j'(x) = \frac{1}{\ln 10}\frac{2x+1}{x^2+x+1}}$$

IES Fernando de Herrera **Curso 2015 / 16**
Segundo trimestre - Prueba de observación continua – 2º Bach CCSS
Subida de nota de las evaluaciones 1ª y 2ª
NOMBRE: ____

Instrucciones: **1)** Todos los **folios** deben tener el **nombre** y estar **numerados** en la parte superior. **2)** Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. **3)** No se puede usar **corrector ni lápiz**, y el bolígrafo debe ser de **tinta permanente**. Se aconseja no usar borrador. **4)** Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar** la respuesta a una pregunta con las de otras. **5)** **Desatender las instrucciones puede penalizarse con hasta 1 punto** o la **anulación** en caso de usar tinta corregible.

EN LA PREGUNTA 5 HAY QUE OBTENER, AL MENOS 1,4 PUNTOS. EN CASO CONTRARIO, LA CALIFICACIÓN MÁXIMA ES DE 4,4

1) Siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, razone si posee solución la ecuación matricial $A \cdot X = B$ y, en caso afirmativo, resuélvala. *(1,5 puntos)*

2) Una fábrica de muebles dispone de 600 kg de madera para fabricar librerías de 1 y de 3 estantes. Se sabe que son necesarios 4 kg de madera para fabricar una librería de 1 estante, siendo su precio de venta 20€. Para fabricar una librería de 3 estantes se necesitan 8 kg de madera y el precio de venta de ésta es 35€. Calcule el número de librerías de cada tipo que se deben fabricar para obtener el máximo ingreso, sabiendo que, por falta de otros materiales, no se pueden fabricar más de 120 librerías de 1 estante, ni tampoco más de 70 de 3 estantes. *(1,5 puntos)*

3) Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(ax^2 - 7) & \text{si } x \le -1 \\ -x^3 + b(x^2 - 1) & \text{si } -1 < x \le 3 \end{cases}$

   a) Hallar a y b para que f sea derivable en $(-\infty, 3)$. *(2 puntos)*
   b) Para $a = 9$ y $b = 3$, estudiar su monotonía y calcular sus extremos relativos. *(1,5 puntos)*

4) Dada la función $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 3$ definida en $[-1, 3]$, calcular sus extremos absolutos (puntos en los que se obtienen y valores que alcanzan). *(1,5 puntos)*

5) Derivar y simplificar: *(2 puntos)*

   a) $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{(x^3 - 1)^2}$
   b) $g(x) = (4x^2 - 3)e^{-3x^2}$
   c) $h(x) = 3\sqrt[3]{5x^2 - 1}$
   d) $j(x) = \log(x^2 + x + 1)$

SOLUCIONES

1) Siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, razone si posee solución la ecuación matricial $A \cdot X = B$ y, en caso afirmativo, resuélvala. *(1,5 puntos)*

Para poder despejar X, hemos de aislarla en el primer miembro, multiplicando a la izquierda (recordar que el producto de matrices no es conmutativo, en general) por la *inversa* de A:

$$A \cdot X = B \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow I_3 \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow \boxed{X = A^{-1} \cdot B}$$

donde I_3 es la *matriz unidad*, de orden 3 en este caso. Este despeje sólo es posible si existe A^{-1}, lo que ocurre si, y sólo si $|A| \neq 0$. De modo que hemos de calcular dicho determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 1 \neq 0 \Rightarrow \boxed{\exists\, A^{-1}}$$

Procedemos a calcularla:

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{Adj}(A^t) = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Ya podemos hallar X:

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

2) Una fábrica de muebles dispone de 600 kg de madera para fabricar librerías de 1 y de 3 estantes. Se sabe que son necesarios 4 kg de madera para fabricar una librería de 1 estante, siendo su precio de venta 20€. Para fabricar una librería de 3 estantes se necesitan 8 kg de madera y el precio de venta de ésta es 35€. Calcule el número de librerías de cada tipo que se deben fabricar para obtener el máximo ingreso, sabiendo que, por falta de otros materiales, no se pueden fabricar más de 120 librerías de 1 estante, ni tampoco más de 70 de 3 estantes. *(1,5 puntos)*

Llevamos los datos del problema a una tabla, que nos ayudará a plantearlo:

Tipos de librerías	Nº de unidades a fabricar	kg de madera	PVP
A (1 estante)	x	$4x$	$20x$
B (3 estantes)	y	$8y$	$35y$
Restricciones:	$x \geq 0;\ y \geq 0$ $x \leq 120;\ y \leq 70$	$4x + 8y \leq 600$	$F(x, y) = 20x + 35y$

Expliquemos detalladamente qué hemos hecho.

Si se fabrican x librerías tipo A y cada una consume 4 kg de madera, la madera consumida por el total de librerías fabricadas de ese tipo es $4x$. Análogo para B. Como el total de madera disponible es de 600 kg, que no puede, pues, sobrepasarse, llegamos a la restricción $4x + 8y \leq 600$.

De igual forma, si el precio de cada una del tipo A son 20€, se ingresarán en total $20x$ por todas las fabricadas de tal tipo. Análogo para B. De donde el total de ingresos es $F(x, y) = 20x + 35y$, que constituye la *función objetivo*, que hay que maximizar.

Por otra parte, no se puede fabricar un número negativo de estanterías de ninguno de los dos tipos, de donde surgen que exijamos que $x \geq 0$; $y \geq 0$.

Como no pueden fabricarse más de 120 unidades de A, concluimos que $x \leq 120$. Análogo para $y \leq 70$.

Y, así, el problema es maximizar $F(x, y) = 20x + 35y$ sujeto a que: $x \geq 0$; $y \geq 0$; $x \leq 120$; $y \leq 70$; $4x + 8y \leq 600$.

Dibujamos el recinto delimitado por las restricciones (*región factible*).

Pasemos a dibujar la región factible. Cambiando en cada una de las inecuaciones de las restricciones el signo de desigualdad por un igual, se obtiene la ecuación de una recta, que pasamos a dibujar mediante una tabla de valores. Despejando y en la inecuación correspondiente, tendremos que $y \leq$ (ecuación de la recta) o que $y \geq$ (ec. de la recta), con lo que los puntos que resuelven la inecuación serán los que quedan debajo o encima (respectivamente) de la recta. Dibujaremos la recta y señalaremos con flechitas el semiplano que nos interesa.

Para $x \geq 0$ resulta la zona que queda a la derecha del eje OY, ya que $x = 0$ es la ecuación de la recta vertical que, precisamente, coincide con OY. Similar ocurre con $x \leq 120$, que es el semiplano que queda a la izquierda de la recta vertical $x = 120$, y con $y \leq 70$, que nos da el semiplano inferior a la recta horizontal $y = 70$.

Así:

- $x \geq 0$: A la derecha del eje OY.
- $y \geq 0$: Por encima del eje OX.
- $x \leq 120$: A la derecha de $x = 120$.
- $y \leq 70$: Por debajo de $y = 70$.
- $4x + 8y = 600$:

x	0	150
y	75	0

$4x + 8y \leq 600 \Rightarrow y \leq \dfrac{-4x+600}{8}$ Semiplano inferior

Resulta así el recinto del gráfico. Hemos de calcular los vértices del mismo (ya figuran sus coordenadas en el gráfico, pero han sido calculadas antes de llevarlas al mismo).

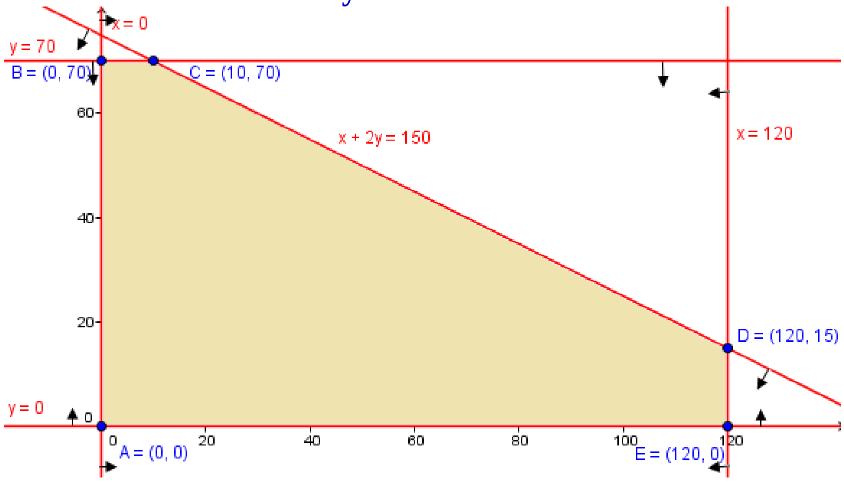
Los vértices $\boxed{A(0, 0),\ B(0, 70)\ \text{ y }\ E(120, 0)}$ son triviales. Calculemos el resto de ellos (nunca se pueden deducir del gráfico), para lo cual hemos simplificado la ecuación $4x + 8y = 600$ entre 4: $x + 2y = 150$:

C: $\left.\begin{aligned} x+2y&=150 \\ y&=70 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$ Sustituyendo la 2ª ec. en la 1ª: $x + 140 = 150 \Rightarrow x = 10$

Por tanto: $\boxed{C(10, 70)}$.

D: $\left.\begin{aligned} x+2y&=150 \\ x\quad&=120 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$ Sustituyendo la 2ª ec. en la 1ª: $120 + 2y = 150 \Rightarrow y = 15$

Por tanto: $\boxed{D(120, 15)}$.



Por último, evaluamos la *función objetivo* en cada vértice del recinto, obteniendo así dónde se alcanza su máximo y mínimo restringida a la *región factible*. Si alguno de ellos estuviese en dos vértices consecutivos, el máximo o mínimo correspondiente estaría en dichos vértices y en los infinitos puntos del segmento que los une:

$F(A) = F(0, 0) = 20\cdot 0 + 35\cdot 0 = 0$

$F(B) = F(0, 70) = 20\cdot 0 + 35\cdot 70 = 2450$

$F(C) = F(10, 70) = 20\cdot 10 + 35\cdot 70 = 2650$

$F(D) = F(120, 15) = 20\cdot 120 + 35\cdot 15 = 2925$

$F(E) = F(120, 0) = 20\cdot 120 + 35\cdot 0 = 2400$

Concluimos, pues, que:

Los ingresos máximos posibles son de 2925€, que se obtienen con 120 librerías de 1 estante y 15 de 3 estantes.

3) Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(ax^2 - 7) & \text{si} \quad x \le -1 \\ -x^3 + b(x^2 - 1) & \text{si} \quad -1 < x \le 3 \end{cases}$

a) Hallar a y b para que f sea derivable en $(-\infty, 3)$. *(2 puntos)*

b) Para $a = 9$ y $b = 3$, estudiar su monotonía y calcular sus extremos relativos. *(1,5 puntos)*

Está resuelto en la prueba anterior.

4) Dada la función $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 3$ definida en $[-1, 3]$, calcular sus extremos absolutos (puntos en los que se obtienen y valores que alcanzan). *(1,5 puntos)*
Está resuelto en la prueba anterior.

5) Derivar y simplificar: *(2 puntos)*

a) $f(x) = \dfrac{1-x^2}{(x^3-1)^2}$

b) $g(x) = (4x^2 - 3)e^{-3x^2}$

c) $h(x) = 3\sqrt[3]{5x^2 - 1}$

d) $j(x) = \log(x^2 + x + 1)$

Está resuelto en la prueba anterior.

IES Fernando de Herrera **Curso 2015 / 16**

Segundo trimestre - Prueba de observación continua – 2º Bach CCSS

Recuperación extraordinaria de la evaluación 2ª

NOMBRE: ____

Instrucciones: **1)** Todos los **folios** deben tener el **nombre** y estar **numerados** en la parte superior. **2)** Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. **3)** No se puede usar **corrector ni lápiz**, y el bolígrafo debe ser de **tinta permanente**. Se aconseja no usar borrador. **4)** Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar** la respuesta a una pregunta con las de otras. **5)** **Desatender las instrucciones puede penalizarse con hasta 1 punto** o la **anulación** en caso de usar tinta corregible.

EN LA PREGUNTA 3 HAY QUE OBTENER, AL MENOS 1,4 PUNTOS. EN CASO CONTRARIO, LA CALIFICACIÓN MÁXIMA ES DE 4,4

1) Considerar la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2+ax}{x-2} & \text{si} \quad x \le 1 \\ \dfrac{1}{3}(bx^3-5)+4x^2 & \text{si} \quad 1 < x \le 3.5 \end{cases}$$

a) Comprobar que existen a y b para que la función sea derivable en todo $(-\infty, 3.5)$, y hallarlos. *(1 punto)*

Sabiendo que para $a = -3$ y $b = -4$ la función es derivable en $(-\infty, 3.5)$, se pide:

b) Calcular sus asíntotas. *(1 punto)*

c) Hallar la tangente en $x = 0$. *(1 punto)*

d) Estudiar su monotonía y calcular sus máximos y mínimos relativos. *(1,5 puntos)*

e) Calcular sus extremos absolutos. *(1,5 puntos)*

2) Dada la función $g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$, se pide:

a) Intervalos de monotonía y extremos relativos. *(1 punto)*

b) Intervalos de curvatura y puntos de inflexión. *(1 punto)*

3) Derivar y simplificar: *(2 puntos)*

a) $y = \dfrac{4-2x}{(3-x)^2}$

b) $g(x) = (3 - 7x^2)e^{-3x^2}$

c) $h(x) = 2^{5x} + \dfrac{1}{x^2}$

d) $j(x) = \log(x^2 + 2x - 1)$

SOLUCIONES

1) Considerar la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2+ax}{x-2} & \text{si} \quad x \le 1 \\ \dfrac{1}{3}(bx^3-5)+4x^2 & \text{si} \quad 1 < x \le 3.5 \end{cases}$$

a) Comprobar que existen a y b para que la función sea derivable en todo $(-\infty, 3.5)$, y hallarlos. *(1 punto)*

Para ser derivable, debe ser continua. Comprobamos que puede serlo para algún valor de los parámetros a y b.

- En $(-\infty, 1)$, f está definida mediante una función racional, continua salvo en $x = 2$, valor que anula el denominador. Como dicho valor no está en el intervalo que estudiamos, f es continua en $(-\infty, 1)$.
- En $(1, 3.5]$, f está definida por una función polinómica, luego es continua.
- En $x = 1$, punto de conexión de las distintas definiciones de f y que, por tanto, hemos de estudiar aparte, tenemos:

1) $\exists f(1) = \dfrac{2+a}{-1} = -2-a$

2) $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{2+ax}{x-2} = -2-a$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} \left(\dfrac{1}{3}(bx^3-5)+4x^2\right) = \dfrac{1}{3}(b-5)+4$

Si estos valores coinciden, será continua en todo su dominio, porque lo será en el único punto que quedaba: $x = 1$. Exigimos, pues:

$$-2-a = \frac{1}{3}(b-5)+4 \Rightarrow -6-3a = b-5+12 \Rightarrow -6+5-12 = 3a+b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3a+b = -13 \quad (1)$$

Derivamos. Sólo podemos hacerlo en intervalos abiertos, por lo que:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{a(x-2)-(2+ax)}{(x-2)^2} = \dfrac{ax-2a-2-ax}{(x-2)^2} = \dfrac{-2a-2}{(x-2)^2} & \text{si} \quad x < 1 \\ \dfrac{1}{3}3bx^2+8x = bx^2+8x & \text{si} \quad 1 < x < 3.5 \end{cases}$$

de donde:

$$f'(1^-) = \frac{-2a-2}{(-1)^2} = -2a-2; \quad f'(1^+) = b+8$$

Exigimos que sea, también, derivable en $x = 1$:

$$-2a-2 = b+8 \Rightarrow -10 = 2a+b \quad (2)$$

Las condiciones obtenidas (1) y (2) nos llevan a que:

$$\left.\begin{array}{l} 3a+b=-13 \\ 2a+b=-10 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} 3a+b=-13 \\ \underline{-2a-b=10} \\ a \quad =-3 \end{array}$$

Y como $2a+b = -10 \Rightarrow -6+b = -10 \Rightarrow b = -4$

Luego $\boxed{a = -3,\ b = -4}$.

Sabiendo que para $a = -3$ y $b = -4$ la función es derivable en $(-\infty, 3.5)$, se pide:

b) Calcular sus asíntotas.

La función es:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2-3x}{x-2} & \text{si} \quad x \le 1 \\ \dfrac{1}{3}(-4x^3-5)+4x^2 & \text{si} \quad 1 < x \le 3.5 \end{cases}$$

Y su derivada, incluyendo, ya $f'(1)$:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{(x-2)^2} & \text{si} \quad x \le 1 \\ -4x^2+8x & \text{si} \quad 1 < x < 3.5 \end{cases}$$

- Verticales: Hemos de estudiar los puntos de discontinuidad y los extremos finitos del dominio. Discontinuidades no tiene. Y en el extremo $x = 3.5$ f tiene expresión polinómica, por lo que $\boxed{\text{no tiene asíntotas verticales}}$.
- Horizontales: Sólo puede tender a $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2-3x}{x-2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-3x}{x} = -3$$

Luego $\boxed{\text{la recta } y = -3 \text{ es asíntota horizontal cuando } x \to -\infty}$.

- Oblicuas: Saldría la horizontal que ya tenemos.

c) Hallar la tangente en $x = 0$. *(1 punto)*

En algún entorno de $x = 0$, $f(x) = \dfrac{2-3x}{x-2}$.

- Punto de tangencia: Como $f(0) = \dfrac{2}{-2} = -1$, es $(0, -1)$.
- Pendiente de la tangente: $m = f'(0) = \dfrac{4}{(-2)^2} = \dfrac{4}{4} = 1$
- Ecuación de la tangente: $y + 1 = 1(x - 0) \Rightarrow \boxed{y = x - 1}$.

d) Estudiar su monotonía y calcular sus máximos y mínimos relativos. *(1,5 puntos)*

- Discontinuidades de f o de f': No hay, según el estudio realizado anteriormente.
- $f'(x) = 0$:
  - Si $x \le 1$: $\dfrac{4}{(x-2)^2} = 0$, que no es posible, pues $4 \ne 0, \forall x$.
  - Si $1 < x < 3.5$: $-4x^2 + 8x = 0 \Rightarrow -4x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0$ ó $x = 2$. Pero descartamos $x = 0$, porque no está en $(1, 3.5)$.

El único punto obtenido es, entonces, $x = 2$. Dividimos, mediante él, el dominio:

	$(-\infty, 2)$	2	$(2, 3.5)$
f'	+	0	–
f	↗	Mx	↘

Luego hay un $\boxed{\text{máximo relativo en } (2, 11/3)}$, porque $f(2) = 11/3$.

e) Calcular sus extremos absolutos. *(1,5 puntos)*

Los puntos de los que tenemos que comparar sus respectivas imágenes (o límites, en caso de no haber imagen o ser un punto de discontinuidad) son:

- Extremos del dominio: $-\infty$; 3.5
- Discontinuidades de f: No tiene, según lo estudiado.
- Discontinuidades de $f\,'$: Tampoco tiene.
- $f\,'(x) = 0$: 2 (se calculó en el apartado anterior).

Comparamos el comportamiento de la función en cada uno de los puntos anteriores:

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -3$ (se calculó en el apartado *b*).
- $f(3.5) = \frac{1}{3}(-4\cdot 3.5^3 - 5) + 4\cdot 3.5^2 = -\frac{59}{6} \cong -9.833$
- $f(2) = \frac{11}{3} \cong 3.67$

Por tanto, como la imagen máxima es 11/3, el máximo absoluto vale 11/3 y se alcanza en $x = 2$. Del mismo modo, el mínimo absoluto es $-59/6$ y se alcanza en $x = 3.5$.

Si el menor valor (imagen o, en este caso, límite) de todos los anteriores se hubiese obtenido en $-\infty$, la función no tendría mínimo absoluto, sino *ínfimo* igual a dicho valor, al que se aproximaría la función al tender a $-\infty$. Y si allí se encontrase el mayor valor, la función no tendría máximo absoluto, sino *supremo*.

2) Dada la función $g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$, se pide:

a) Intervalos de monotonía y extremos relativos. *(1 punto)*

Se tiene que:

$$g'(x) = 3x^2 + 6x + 3 \qquad g''(x) = 6x + 6$$

Entonces:

- Discontinuidades de g: No tiene (es polinómica).
- Discontinuidades de g': No tiene (también es polinómica).
- $g'(x) = 0$: $3x^2 + 6x + 3 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

	$(-\infty, -2)$	-1	$(-2, +\infty)$
$g\,'$	+	0	+
g	↗	tg h.	↗

No tiene extremos relativos, porque la función siempre es creciente, pero en el punto $(-1, -1)$ (pues $g(-1) = -1$) la tangente es horizontal, puesto que $g'(-1) = 0$.

b) Intervalos de curvatura y puntos de inflexión. *(1 punto)*

- Discontinuidades de g, g' ó g'': No hay, porque todas esas funciones son polinómicas, y las funciones polinómicas son continuas en todo R.
- $g''(x) = 0$: $6x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1$

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, +\infty)$
g''	–	0	+
g	∩ cóncava	P.I.	∪ convexa

La función tiene un punto de inflexión en $(-1, -1)$, porque $g(-1) = -1$.

3) Derivar y simplificar: *(2 puntos)*

a) $y = \frac{4-2x}{(3-x)^2}$

$$y\,' = \frac{-2(3-x)^2 - (4-2x)(-2(3-x))}{(3-x)^4} = \frac{(3-x)[-2(3-x)+(4-2x)2]}{(3-x)^4} =$$

$$= \frac{-6+2x+8-4x}{(3-x)^3} = \boxed{\frac{2-2x}{(3-x)^3}}$$

b) $g(x) = (3 - 7x^2)e^{-3x^2}$

$$g'(x) = -14x\, e^{-3x^2} - 6x\, e^{-3x^2}(3 - 7x^2) = e^{-3x^2}(-14x - 18x + 42x^3) =$$
$$= \boxed{e^{-3x^2}(42x^3 - 32x)}$$

c) $h(x) = 2^{5x} + \dfrac{1}{x^2}$

$$\boxed{h'(x) = 5 \cdot 2^{5x}\ln(2) - \frac{2}{x^3}}$$

d) $j(x) = \log(x^2 + 2x - 1)$

$$\boxed{j'(x) = \frac{1}{\ln 10}\,\frac{2x+2}{x^2+2x-1}}$$