IES Fernando de Herrera **Curso 2017 / 18**

Segundo trimestre – Observación evaluable escrita nº 1 – 2º Bach CCSS

NOMBRE: ____

Instrucciones: **1)** Todos los **folios** deben tener el **nombre** y estar **numerados** en la parte superior. **2)** Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. **3)** No se puede usar **corrector ni lápiz**, y el bolígrafo debe ser de **tinta indeleble**. Se aconseja no usar borrador. **4)** Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar** la respuesta a una pregunta con las de otras. **5)** **Desatender las instrucciones puede penalizarse con hasta 1 punto** o la **anulación** en caso de usar tinta corregible.

1) Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x-2} & \text{si} \quad x \le 0 \\ \dfrac{2x^2+x}{4} & \text{si} \quad 0 < x < 2 \\ x^2 - 1.5 & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases}$$

a) Estudiar la continuidad, clasificando las discontinuidades si las hay. *(1.5 ptos)*
b) Estudiar la derivabilidad en su dominio. *(1 punto)*
c) Calcular la ecuación de la recta tangente a f en $x = -1$. *(1 punto)*
d) Determinar las asíntotas, caso de tenerlas. *(1 punto)*

2) Estudio completo y gráfica de la función $y = x^3 + 3x^2 + 3x$.
(Dom+Par/Impar+Int. Ejes+Asíntotas: 0.5p; Monotonía/Extr.relat.:0,5p; Curvatura/P. de Infl:0,5p; Gráfica deducida del estudio: 1p)

3) Calcular y simplificar las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{-2x^2+x}{(1-x)^2}$ *(1 punto)*
b) $g(x) = 2^{1-x^3}(1-x^3)^2$ *(1 punto)*
c) $h(x) = \log(1 - x^3)$ *(1 punto)*

SOLUCIONES

1) Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x-2} & \text{si} \quad x \le 0 \\ \dfrac{2x^2+x}{4} & \text{si} \quad 0 < x < 2 \\ x^2 - 1.5 & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases}$$

a) Estudiar la continuidad, clasificando las discontinuidades si las hay. *(1.5 ptos)*

- $(-\infty, 0)$: f coincide con $y = -\dfrac{1}{x-2}$ que, al ser una función elemental, es continua en su dominio. Lo que significa que la única discontinuidad la tiene en $x = 2$, que no está en el intervalo que estamos estudiando. Por tanto, f es continua en todo el intervalo.
- $(0, 2) \cup (2, +\infty)$: f es continua, por coincidir con funciones cuya expresión es polinómica.
- $x = 0$: 1) $\exists f(0) = ½$

  2) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-1}{x-2} = ½$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2x^2+x}{4} = 0$

  Al existir los dos límites laterales, pero sin coincidir, en $x = 0$ presenta una discontinuidad de salto finito.
- $x = 2$: 1) $\exists f(2) = 4 - 1.5 = 2.5$

  2) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{2x^2+x}{4} = \dfrac{10}{4} = 2.5$; $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}(x^2 - 1.5) = 2.5$

  Por tanto, al coincidir los tres resultados, es continua en $x = 2$.

En resumen, f es continua en R – {0}, y tiene una discontinuidad de salto finito en $x = 0$.

b) Estudiar la derivabilidad en su dominio. *(1 punto)*

Podemos aplicar las fórmulas de las tablas de derivadas en intervalos abiertos, por lo que, como:

- $y = -\dfrac{1}{x-2} \Rightarrow y' = -\dfrac{-1}{(x-2)^2}$
- $y = \dfrac{2x^2+x}{4} \Rightarrow y' = \dfrac{4x+1}{4}$

Se tiene que:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x-2)^2} & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{4x+1}{4} & \text{si} \quad 0 < x < 2 \\ 2x & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

a falta de estudiar la derivada en $x = 0$ y en $x = 2$.

- $x = 0$: $\nexists f'(0)$, porque f no es continua en 0.

- $x = 2$: $f\,'(2^-) = \dfrac{8+1}{4} = \dfrac{9}{4}$; $f\,'(2^+) = 2\cdot 2 = 4 \Rightarrow \nexists f\,'(2)$.

Por tanto, $\boxed{\text{la expresión definitiva de } f\,'(x) \text{ es la anterior}}$.

c) Calcular la ecuación de la recta tangente a f en $x = -1$. *(1 punto)*

En un entorno de $x = -1$, $f(x) = -\dfrac{1}{x-2}$, por lo que ignoramos el resto de la función. Sabemos, además, que $f\,'(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$. Por ello:

- Punto de tangencia: $f(-1) = 1/3$: $(-1, 1/3)$.
- Pendiente de la tangente: $m = f\,'(-1) = 1/9$.
- Ecuación de la tangente: $y - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{9}(x+1) \Rightarrow y = \dfrac{1}{9}x + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{3} \Rightarrow$

$$\boxed{y = \frac{1}{9}x + \frac{4}{9}}$$

d) Determinar las asíntotas, caso de tenerlas. *(1 punto)*

- Verticales: Las tendrá en puntos de discontinuidad asintótica que, como ya hemos estudiado la continuidad, sabemos que $\boxed{\text{no tiene}}$.
- Horizontales: Como las funciones polinómicas no tienen asíntotas, $\boxed{\text{cuando } x \to +\infty \text{ no tiene asíntota horizontal}}$. Pero:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{x-2} = \left(\frac{-1}{-\infty}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{\text{La recta de ec. } y = 0 \text{ es A.H. si } x \to -\infty}.$$

- Oblicuas: Si $x \to -\infty$ tiene una horizontal, por lo que si calculamos la oblicua obtendríamos el mismo resultado. Y si $x \to +\infty$ no tiene, porque es polinómica.

2) Estudio completo y gráfica de la función $y = x^3 + 3x^2 + 3x$.
(Dom+Par/Impar+Int. Ejes+Asíntotas: 0.5p; Monotonía/Extr.relat.:0,5p; Curvatura/P. de Infl:0,5p; Gráfica deducida del estudio: 1p)

- Dominio: $\boxed{\mathbb{R}}$ (es polinómica).
- Par / Impar: $f(-x) = (-x)^3 + 3(-x)^2 + 3(-x) = -x^3 + 3x^2 - 3x$, que no coincide con $f(x)$ ni con $-f(x) \Rightarrow \boxed{\text{Ni par, ni impar}}$.
- Intersecciones con los ejes: $x = 0 \Rightarrow y = 0$: $\boxed{(0, 0)}$. $y = 0 \Rightarrow 0 = x^3 + 3x^2 + 3x \Rightarrow x(x^2 + 3x + 3) = 0 \Rightarrow$ (Un producto vale 0 si alguno de los factores vale 0 y todos ellos existen): $\begin{cases} x = 0 \text{ ó:} \\ x^2 + 3x + 3 = 0 \end{cases}$

  La primera posibilidad nos lleva al mismo punto anterior: (0, 0). La segunda es una ecuación de segundo grado, que no tiene solución, pues:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-12}}{2}$$

- Asíntotas: Las funciones polinómicas $\boxed{\text{no tienen}}$ asíntotas.
- Monotonía. Extremos relativos o locales: $\boxed{f\,'(x) = 3x^2 + 6x + 3}$
  - Discontinuidades de f o $f\,'$: No hay (son polinómicas).

- $f'(x) = 0$: $3(x^2 + 2x + 1) = 0 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = -1$

Dividimos el dominio en intervalos mediante el único punto obtenido:

	(0, –1)	–1	(–1, +∞)
f'	+	0	+
f	↗ crec	tg horiz	↗ crec

$\boxed{\text{La función no tiene extremos relativos}}$.

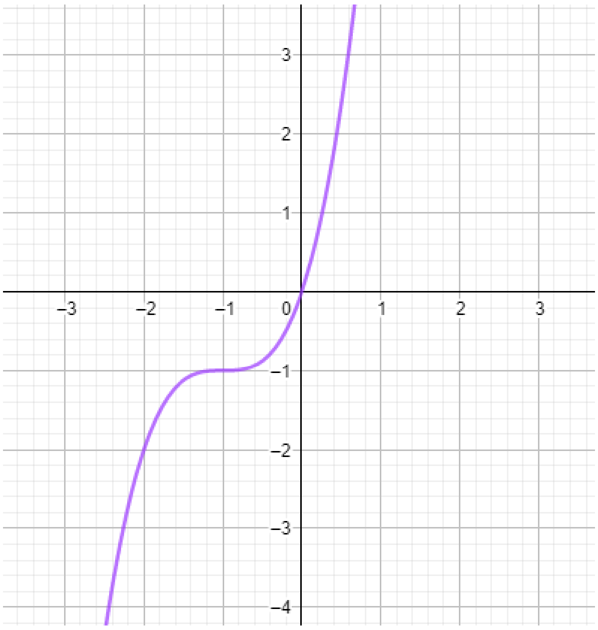
- <u>Curvatura. Puntos de inflexión</u>: $\boxed{f''(x) = 6x + 6}$.
  - Discontinuidades de f, f' o f'': No hay (son polinómicas).
  - $f''(x) = 0$: $6(x + 1) = 0 \Rightarrow x = -1$

  Dividimos el dominio en intervalos mediante el único punto obtenido:

	(0, –1)	–1	(–1, +∞)
f''	–	0	+
f	∩ cóncava	P.I.	∪ convexa

$\boxed{\text{Punto de inflexión en } (-1, -1)}$, pues $f(-1) = -1$. Además, la tangente en este punto es horizontal, como sabemos del apartado anterior.

- <u>Gráfica</u>: La reproducimos junto a estas líneas, fruto de todo el estudio anterior.



3) Calcular y simplificar las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{-2x^2 + x}{(1-x)^2}$ *(1 punto)*

$$f'(x) = \frac{(-4x+1)(1-x)^2 - (-2x^2+x)2(1-x)(-1)}{(1-x)^4} =$$

$$= \frac{(1-x)[(-4x+1)(1-x)+2(-2x^2+x)]}{(1-x)^4} = \frac{-4x+4x^2+1-x-4x^2+2x}{(1-x)^3} = \boxed{\frac{-3x+1}{(1-x)^3}}$$

b) $g(x) = 2^{1-x^3}(1-x^3)^2$ *(1 punto)*

$$g'(x) = 2^{1-x^3}(-3x^2)(\ln 2)(1-x^3)^2 + 2^{1-x^3}2(1-x^3)(-3x^2) =$$

$$= 2^{1-x^3}(-3x^2)(1-x^3)[(\ln 2)(1-x^3)+2] = \boxed{2^{1-x^3}(3x^5-3x^2)[(1-x^3)\ln 2+2]}$$

Hay otras posibilidades de simplificación, procedentes de sacar factor común, pero nos conformaremos con ésta.

c) $h(x) = \log(1 - x^3)$ *(1 punto)*

$$h'(x) = \boxed{\frac{-3x^2}{1-x^3}\,\frac{1}{\ln 10}}$$

NOMBRE: ____

Instrucciones: **1)** Todos los **folios** deben tener el **nombre** y estar **numerados** en la parte superior. **2)** Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. **3)** No se puede usar **corrector ni lápiz**, y el bolígrafo debe ser de **tinta indeleble**. Se aconseja no usar borrador. **4)** Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar** la respuesta a una pregunta con las de otras. **5)** **Desatender las instrucciones puede penalizarse con hasta 1 punto** o la **anulación** en caso de usar tinta corregible.

1) En una empresa han hecho un estudio sobre la rentabilidad de su inversión en publicidad, y han llegado a la conclusión de que el beneficio obtenido, en miles de euros, viene dado por la expresión $B(x) = 0.5x^2 - 4x + 6$, siendo x la inversión en publicidad, en miles de euros, con x en el intervalo [0, 10]. ¿Cuánto tiene que invertir la empresa en publicidad para obtener el mayor beneficio posible, y cuál es ese beneficio? *(1,5 puntos)*

2) Hallar los valores de a y b para que la función $g(x) = ax + \dfrac{b}{x}$ tenga un extremo relativo en el punto (1, 2). *(1,5 puntos)*

3) Derivar y simplificar: *(2 puntos)*
   a) $f(x) = (x^3 + 1)\, e^{7x}$
   b) $g(x) = 3^x \ln(2x + 5)$
   c) $h(x) = \dfrac{x^2 - 2}{(x+1)^2}$

4) Sea la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-4} & \text{si} \quad x \le 0 \\ x+3 & \text{si} \quad 0 < x < 2 \\ x^2+1 & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases}$.
   a) Estudiar la continuidad, clasificando las discontinuidades, si tiene alguna. *(1 pto)*
   b) Estudiar la derivabilidad. *(1 punto)*
   c) Estudiar la monotonía, indicando extremos relativos y puntos angulosos, si los tiene. *(1 punto)*
   d) Calcular sus asíntotas. *(1 punto)*
   e) Hallar la ecuación de la recta tangente en $x = -2$. *(1 punto)*

SOLUCIONES

1) En una empresa han hecho un estudio sobre la rentabilidad de su inversión en publicidad, y han llegado a la conclusión de que el beneficio obtenido, en miles de euros, viene dado por la expresión $B(x) = 0.5x^2 - 4x + 6$, siendo x la inversión en publicidad, en miles de euros, con x en el intervalo [0, 10]. ¿Cuánto tiene que invertir la empresa en publicidad para obtener el mayor beneficio posible, y cuál es ese beneficio? *(1,5 puntos)*

El método estándar es el siguiente. Primero, averiguamos los puntos a estudiar:

- Extremos del dominio: 0 y 10.
- Discontinuidades de B: No tiene (es polinómica).
- Discontinuidades de B': $B'(x) = x - 4$, por lo que tampoco tiene.
- $B'(x) = 0$: $x = 4$.

Ahora, comparamos sus imágenes (o límite, si no hubiese imagen o si fuese un punto de discontinuidad de B donde hay que comprobar ambos, límite e imagen si la hay; pero no es el caso). El mayor valor de todos será el máximo absoluto si es imagen, o el supremo (que significa que no es alcanzado y no tendrá máximo absoluto) si es límite. O no habrá ni uno ni otro si el mayor resultado es $+\infty$:

- $B(0) = 6$
- $B(10) = 50 - 40 + 6 = 16$
- $B(4) = 8 - 16 + 6 = -2$

Por tanto, el mayor beneficio posible está en $x = 10$, o sea, con una inversión de 10000 euros, y asciende a 16000 euros.

2) Hallar los valores de a y b para que la función $g(x) = ax + \frac{b}{x}$ tenga un extremo relativo en el punto (1, 2). *(1,5 puntos)*

- Debe pasar por (1, 2) $\Rightarrow g(1) = 2 \Rightarrow \boxed{a + b = 2}$ (1)
- Para que sea extremo relativo, es suficiente exigir que $g'(1) = 0$ y $g''(1) \neq 0$.

  Ya que $g'(x) = a - \frac{b}{x^2}$, lo primero se traduce en: $\boxed{a - b = 0}$ (2)

Resolvemos el sistema formado por estas dos ecuaciones. De (2): $a = b$, que nos lleva, al sustituir en (1): $b + b = 2 \Rightarrow 2b = 2 \Rightarrow b = 1$. Y como $a = b$, la solución es: $\boxed{a = b = 1}$. Como $g''(x) = \frac{2bx}{x^4} = \frac{2b}{x^3} = \frac{2}{x^3}$ $(b = 1) \Rightarrow g''(1) = 2 \neq 0$, por lo que se cumple la otra condición que teníamos pendiente para que hubiera extremo relativo.

3) Derivar y simplificar: *(2 puntos)*

a) $f(x) = (x^3 + 1)\, e^{7x}$

$$\boxed{f'(x) =}\, 3x^2 e^{7x} + (x^3 + 1)\, 7\, e^{7x} = \boxed{e^{7x}\,(7x^3 + 3x^2 + 7)}$$

b) $g(x) = 3^x \ln(2x + 5)$

$$\boxed{g'(x) =}\, 3^x \ln 3 \ln(2x + 5) + 3^x \frac{2}{2x+5} = \boxed{3^x\left(\ln 3 \ln(2x+5) + \frac{2}{2x+5}\right)}$$

c) $h(x) = \dfrac{x^2-2}{(x+1)^2}$

$$\boxed{h'(x) =} \frac{2x(x+1)^2-(x^2-2)2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{(x+1)[2x(x+1)-2(x^2-2)]}{(x+1)^4} =$$
$$= \frac{2x^2+2x-2x^2+4}{(x+1)^3} = \boxed{\frac{2x+4}{(x+1)^3}}$$

4) Sea la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-4} & \text{si} \quad x \le 0 \\ x+3 & \text{si} \quad 0 < x < 2 \\ x^2+1 & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases}$.

a) Estudiar la continuidad, clasificando las discontinuidades, si tiene alguna. *(1 pto)*

- $(-\infty, 0)$: f coincide con la función elemental $y = 1 / (x - 4)$, que es, por ello, continua en su dominio. O sea, que su única discontinuidad está en $x = 4$ (que anula el denominador). Como $4 \notin (-\infty, 0)$, f es continua en este intervalo.
- $(0, 2) \cup (2, +\infty)$: f es continua por coincidir con funciones cuya expresión es polinómica.
- $x = 0$: 1) $\exists f(0) = 1 / (0 - 4) = - 1/4$; 2) $\exists \lim_{x\to 0^-} f(x) = \exists \lim_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x-4} = -\dfrac{1}{4}$; $\exists \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x+3) = 3$. Como los límites laterales son finitos pero no coinciden, presenta una discontinuidad de salto finito.
- $x = 2$: 1) $\exists f(2) = 2^2 + 1 = 5$; 2) $\exists \lim_{x\to 2^-} f(x) = \exists \lim_{x\to 2^-} (x+3) = 5$; $\exists \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (x^2+1) = 5$. Como los tres resultados coinciden, es continua.

Así, $\boxed{f \text{ es continua en } \mathbb{R} - \{0\}, \text{ con una discontinuidad de salto finito en } x = 0}$.

b) Estudiar la derivabilidad. *(1 punto)*

Podemos aplicar los teoremas de cálculo de derivadas en intervalos abiertos, por lo que:

$$\boxed{f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{(x-4)^2} & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad 0 < x < 2 \\ 2x & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}}$$

Y nos falta conocer qué sucede en los puntos de conexión de definiciones de f, esto es, en 0 y en 2. Como en $x = 0$ f no es continua, no puede ser derivable en él. Y en $x = 2$: $f'(2^-) = 1$; $f'(2^+) = 2\cdot 2 = 4$, por lo que no es derivable en 2, puesto que no coinciden las derivadas laterales. Así que, definitivamente, la función derivada es la anterior, que recuadramos.

c) Estudiar la monotonía, indicando extremos relativos y puntos angulosos, si los tiene. *(1 punto)*

- Discontinuidades de f: $x = 0$.

- Discontinuidades de f': $x = 0$; $x = 2$.
- $f'(x) = 0$:
  - Si $x < 0$: $\frac{-1}{(x-4)^2} = 0$, que exige que $-1 = 0$, lo que no es posible para ningún x.
  - Si $0 < x < 2$: $1 = 0$, que tampoco es posible.
  - Si $x > 2$: $2x = 0 \Rightarrow x = 0$, que no sirve, porque no es mayor que 2.

Por tanto:

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
f'	–	$\nexists$	+	$\nexists$	+
f	↘ decrec	Salto fto	↗ crec	Pto ang	↗ crec

Sólo tiene un punto anguloso en $(2, 5)$, puesto que f' no es continua, si bien existen las derivadas laterales, pero f sí lo es.

d) Calcular sus asíntotas. *(1 punto)*

- Verticales: La única discontinuidad está en 0 y es de salto finito (no es asintótica), por lo que no tiene asíntotas verticales.
- Horizontales: Si $x \to +\infty$, f no tiene asíntotas, porque coincide con una parábola. Pero $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x-4} = \left(\frac{1}{\infty}\right) = 0 \Rightarrow$ $\boxed{y = 0 \text{ es asíntota si } x \to -\infty}$.
- Oblicuas: No las tiene, porque por un lado es una parábola y por el otro ya tiene una horizontal.

e) Hallar la ecuación de la recta tangente en $x = -2$. *(1 punto)*

- Punto de tangencia: $f(-2) = -1/6 \Rightarrow \boxed{(-2, -1/6)}$.
- Pendiente de la tangente: $f'(-2) = \frac{-1}{(-2-4)^2} = \frac{-1}{36}$
- Ecuación: $y + \frac{1}{6} = -\frac{1}{36}(x+2) \Rightarrow \frac{36y+6}{36} = \frac{-x-2}{36} \Rightarrow \boxed{x + 36y + 8 = 0}$.

En www.geogebra.org (opción *Geogebra Clásico*) puede verse la gráfica de la función, escribiendo: ***f*(*x*) = si(*x*<=0,1/(*x*–4),si(*x*<2,*x*+3,*x*^2+1))**

NOMBRE: ____

Instrucciones: **1)** Todos los **folios** deben tener el **nombre** y estar **numerados** en la parte superior. **2)** Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. **3)** No se puede usar **corrector ni lápiz**, y el bolígrafo debe ser de **tinta indeleble**. Se aconseja no usar borrador. **4)** Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar** la respuesta a una pregunta con las de otras. **5)** **Desatender las instrucciones puede penalizarse con hasta 1 punto** o la **anulación** en caso de usar tinta corregible.

1) Sea $P(t)$ el porcentaje de células, de un determinado tejido, afectadas por un cierto tipo de enfermedad transcurrido un tiempo t, medido en meses:

$$P(t) = \begin{cases} t^2 & \text{si} \quad 0 \le t \le 5 \\ \dfrac{100t - 250}{t + 5} & \text{si} \quad t > 5 \end{cases}$$

Calcule las asíntotas de la función. *(1 punto)*

2) El beneficio, en miles de euros, alcanzado en una tienda de ropa el pasado año, viene dado por la función $B(t)$ expresada a continuación:

$$B(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{8}t^2 - t + 5 & \text{si} \quad 0 \le t \le 6 \\ \dfrac{t + 1}{2} & \text{si} \quad 6 < t \le 12 \end{cases}$$

a) Estudie la derivabilidad de la función al cabo de 6 meses. *(1,5 puntos)*
b) ¿Cuándo fue mínimo el beneficio? ¿Cuál fue dicho beneficio? ¿Cuándo fue máximo el beneficio? ¿A cuánto ascendió? *(2 puntos)*

3) Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - bx + 1 & \text{si} \quad x \le 2 \\ 2x + a & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

a) Determine los valores de a y b para que dicha función sea continua en $x = 2$ y, además, tenga un mínimo en $x = 1$. *(2 puntos)*
b) Para $a = 2$ y $b = 6$, determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = -2$. *(1 punto)*

4) Calcule las siguientes derivadas, simplificando los resultados:

a) $g'(3)$, siendo $g(x) = 2xe^{3x-1}$. *(1 punto)*
b) $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{(x^3 - 1)^2}$ *(1 punto)*
c) $h(x) = \log(x^2 + x + 1)$ *(0,5 puntos)*

SOLUCIONES

1) Sea $P(t)$ el porcentaje de células, de un determinado tejido, afectadas por un cierto tipo de enfermedad transcurrido un tiempo t, medido en meses:

$$P(t) = \begin{cases} t^2 & \text{si} \quad 0 \le t \le 5 \\ \dfrac{100t - 250}{t+5} & \text{si} \quad t > 5 \end{cases}$$

Calcule las asíntotas de la función. *(1 punto)*

- Verticales: Puede tenerlas únicamente en discontinuidades asintóticas. La única posibilidad de una discontinuidad de este tipo la encontramos cuando se anula el denominador de la segunda de las expresiones que definen a P, esto es, cuando $t + 5 = 0 \Leftrightarrow t = -5$. Pero dicho valor está fuera de la zona en la que $P(t)$ coincide con la expresión $y = \dfrac{100t-250}{t+5}$. Por tanto, $\boxed{\text{no tiene asíntotas verticales}}$.
- Horizontales: t no puede tender a $-\infty$. Calculamos, pues:
$$\lim_{t\to+\infty} P(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{100t-250}{t+5} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{t\to+\infty} \frac{100t}{t} = 100$$
De donde $\boxed{\text{la recta } y = 100 \text{ es asíntota horizontal si } t \to +\infty}$.
- Oblicuas: No puede tender a $-\infty$, y cuando $t \to +\infty$ ya tiene una horizontal, por lo que si calculamos la oblicuas la obtendríamos de nuevo.

2) El beneficio, en miles de euros, alcanzado en una tienda de ropa el pasado año, viene dado por la función $B(t)$ expresada a continuación:

$$B(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{8}t^2 - t + 5 & \text{si} \quad 0 \le t \le 6 \\ \dfrac{t+1}{2} & \text{si} \quad 6 < t \le 12 \end{cases}$$

a) Estudie la derivabilidad de la función al cabo de 6 meses. *(1.5 puntos)*

Para derivar una función definida a trozos hay que estudiar previamente la continuidad. Y a ello vamos.

- [0, 6): B es continua, por coincidir con una función polinómica (el 6, al ser un punto que conecta diferentes definiciones de B, hay que estudiarlo aparte).
- (6, 12]: B es continua (polinómica).
- $t = 6$: 1) $\exists B(6) = \dfrac{1}{8}36 - 6 + 5 = \dfrac{7}{2}$; 2) $\exists \lim\limits_{t\to 6^-} B(t) = \lim\limits_{t\to 6^-}\left(\dfrac{1}{8}t^2 - t + 5\right) = \dfrac{7}{2}$; $\exists \lim\limits_{t\to 6^+} B(t) = \lim\limits_{t\to 6^-} \dfrac{t+1}{2} = \dfrac{7}{2}$. Al coincidir los tres resultados, B es continua en $t = 6$.

Por tanto, $\boxed{B \text{ es continua en su dominio } [0, 12]}$. No hay, pues, problemas para abordar la derivada. Aplicando los teoremas de derivación en intervalos abiertos:

$$B'(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}t - 1 & \text{si} \quad 0 < t < 6 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si} \quad 6 < t < 12 \end{cases}$$

De donde $B'(6^-) = \frac{1}{4}6-1 = \frac{1}{2}$; $B'(6^+) = \frac{1}{2}$. Como coinciden, $\exists B'(6) = \frac{1}{2}$. Por tanto, la expresión definitiva es:

$$\boxed{B'(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}t-1 & \text{si} \quad 0<t\leq 6 \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad 6<t<12 \end{cases}}$$

De aquí hemos calculado que $\boxed{B'(6) = \frac{1}{2}}$, que es lo que pedían.

b) ¿Cuándo fue mínimo el beneficio? ¿Cuál fue dicho beneficio? ¿Cuándo fue máximo el beneficio? ¿A cuánto ascendió? *(2 puntos)*

El método estándar de cálculo de extremos absolutos es el siguiente. Primero, averiguamos los puntos a estudiar:

- <u>Extremos del dominio</u>: 0 y 12.
- <u>Discontinuidades de B</u>: No tiene, según el estudio anterior.
- <u>Discontinuidades de B'</u>: Tampoco tiene, como se ha visto.
- <u>$B'(t) = 0$</u>:
  - $0 < t \leq 6$: $\frac{1}{4}t-1 = 0 \Rightarrow t-4=0 \Rightarrow t = 4$, válida, porque está en $(0, 6]$.
  - $6 < t < 12$: $\frac{1}{2} = 0$, que no tiene solución.

Ahora, comparamos sus imágenes (o límite, si no hubiese imagen o si fuese un punto de discontinuidad de B donde hay que comprobar ambos, límite e imagen si la hay; pero no es el caso). El mayor valor de todos será el máximo absoluto si es imagen, o el supremo (que significa que no es alcanzado y no tendrá máximo absoluto) si es límite. O no habrá ni uno ni otro si el mayor resultado es $+\infty$:

- $B(0) = 5$
- $B(12) = \frac{13}{2}$
- $B(4) = \frac{1}{8}16-4+5 = 3$

El mayor de estos resultados es $\frac{13}{2}$ y es imagen (no es resultado de un límite). Por tanto, $\boxed{\text{el máximo absoluto vale } \frac{13}{2} \text{ y se alcanza en } t = 12\text{. O sea, 6500€ al cabo de 12 meses.}}$.

El menor es 3. Luego $\boxed{\text{el mínimo absoluto vale 3 y se alcanza en } t = 4\text{. Es decir, 3000€ al cabo de 4 meses}}$.

3) Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2-bx+1 & \text{si} \quad x\leq 2 \\ 2x+a & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$

a) Determine los valores de a y b para que dicha función sea continua en $x = 2$ y, además, tenga un mínimo en $x = 1$. *(2 puntos)*

Las expresiones de f son polinómicas en sus dos zonas de definición. Por tanto, es continua en ellas y sólo podría serlo en el punto que las conecta: $x = 2$. Exigimos la continuidad en él, también:

1) $f(2) = 4 - 2b + 1 = 5 - 2b$. 2) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}(x^2 - bx + 1) = 4 - 2b + 1 = 5 - 2b$; $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}(2x + a) = 4 + a$.

Por consiguiente, ser continua requiere que $5 - 2b = 4 + a \Rightarrow \boxed{1 = a + 2b}$

Para tener un mínimo en $x = 1$, como dicho punto está en $(-\infty, 2)$ podemos trabajar únicamente con la expresión $f(x) = x^2 - bx + 1$. Exigiendo $f'(1) = 0$ y $f''(1) > 0$ (con lo que tendrá tangente horizontal y será convexa, suficiente para que haya un mínimo relativo). Exigimos ambas cosas:

- $f'(x) = 2x - b \Rightarrow f'(1) = 2 - b = 0 \Rightarrow \boxed{b = 2}$. Sustituyendo en la expresión anterior: $a + 2\cdot 2 = 1 \Rightarrow \boxed{a = -3}$.
- $f''(x) = 2 \Rightarrow f''(1) = 2 > 0$, que verifica lo que se necesita. Si esto no se cumpliese, el problema no tendría solución, porque estaríamos ante un máximo relativo, en lugar de un mínimo relativo.

Luego la solución es $\boxed{a = -3,\ b = 2}$.

b) Para $a = 2$ y $b = 6$, determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = -2$. *(1 punto)*

Igualmente, en un entorno de $x = -2$ tenemos que $f(x) = x^2 - 6x + 1$. No sirve para nada el valor de a.

- Punto de tangencia: como $f(-2) = 4 + 12 + 1 = 17$, se trata de $(-2, 17)$.
- Pendiente de la tangente: $f'(x) = 2x - 6 \Rightarrow m = f'(-2) = -4 - 6 = -10$
- Ecuación: $y - 17 = -10(x + 2) \Rightarrow y = -10x - 20 + 17 \Rightarrow \boxed{y = -10x - 3}$.

4) Calcule las siguientes derivadas, simplificando los resultados:

a) $g'(3)$, siendo $g(x) = 2xe^{3x-1}$. *(1 punto)*

$$g'(x) = 2e^{3x-1} + 2x3e^{3x-1} = e^{3x-1}(2 + 6x) \Rightarrow \boxed{g'(3) = 20e^8}$$

b) $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{(x^3 - 1)^2}$ *(1 punto)*

$$\boxed{f'(x) =} \frac{-2x(x^3-1)^2 - (1-x^2)2(x^3-1)3x^2}{(x^3-1)^4} =$$

$$= \frac{(x^3-1)[-2x(x^3-1) - (1-x^2)6x^2]}{(x^3-1)^4} = \frac{-2x^4 + 2x - 6x^2 + 6x^4}{(x^3-1)^3} = \boxed{\frac{4x^4 - 6x^2 + 2x}{(x^3-1)^3}}$$

c) $h(x) = \log(x^2 + x + 1)$ *(0,5 puntos)*

$$\boxed{h'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}\frac{1}{\ln 10}}$$

IES Fernando de Herrera **Curso 2017 / 18**

Segundo trimestre – Subida de nota – 2º Bach CCSS

NOMBRE: ____

Instrucciones: **1)** Todos los **folios** deben tener el **nombre** y estar **numerados** en la parte superior. **2)** Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. **3)** No se puede usar **corrector ni lápiz**, y el bolígrafo debe ser de **tinta indeleble**. Se aconseja no usar borrador. **4)** Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar** la respuesta a una pregunta con las de otras. **5)** **Desatender las instrucciones puede penalizarse con hasta 1 punto** o la **anulación** en caso de usar tinta corregible.

1) Sea el siguiente sistema de inecuaciones:

$$x + 2y \leq 11 \quad x \geq 2y - 5 \quad 3x + y \leq 18 \quad x \geq 0 \quad y \geq 0$$

a) Dibuje la región que definen y calcule sus vértices. *(0.5 puntos)*
b) ¿Pertenece el punto (5.5, 2) a la región anterior. *(0.5 puntos)*
c) Calcule los puntos de esa región en los que la función $F(x, y) = 2x + 3y$ alcanza los valores máximo y mínimo y determine dichos valores. *(1 punto)*

2) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Efectúe, si se puede: $A \cdot D + B \cdot C$; $D^t \cdot B - A^2$ *(1 punto)*
b) Halle la matriz X que verifica: $A \cdot X = B - C$, calculando A^{-1}. *(1 punto)*

3) El beneficio, en miles de euros, alcanzado en una tienda de ropa el pasado año, viene dado por la función $B(t)$ expresada a continuación:

$$B(t) = \begin{cases} \frac{1}{8}t^2 - t + 5 & \text{si} \quad 0 \leq t \leq 6 \\ \frac{t+1}{2} & \text{si} \quad 6 < t \leq 12 \end{cases}$$

a) Estudie la derivabilidad de la función al cabo de 6 meses. *(1 punto)*
b) ¿Cuándo fue mínimo el beneficio? ¿Cuál fue dicho beneficio? ¿Cuándo fue máximo el beneficio? ¿A cuánto ascendió? *(1 punto)*

4) Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - bx + 1 & \text{si} \quad x \leq 2 \\ 2x + a & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

a) Determine los valores de a y b para que dicha función sea continua en $x = 2$ y, además, tenga un mínimo en $x = 1$. *(1 punto)*
b) Para $a = 2$ y $b = 6$, determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = -2$. *(1 punto)*

5) Calcule las siguientes derivadas, simplificando los resultados:

a) $g'(3)$, siendo $g(x) = 2xe^{3x-1}$. *(0.8 puntos)*
b) $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{(x^3 - 1)^2}$ *0.7 puntos)*
c) $h(x) = \log(x^2 + x + 1)$ *(0,5 puntos)*

SOLUCIONES

1) Sea el siguiente sistema de inecuaciones:

$$x + 2y \le 11 \quad x \ge 2y - 5 \quad 3x + y \le 18 \quad x \ge 0 \quad y \ge 0$$

a) Dibuje la región que definen y calcule sus vértices. *(0.5 puntos)*

- $x + 2y \le 11 \iff y \le \dfrac{-x+11}{2}$ luego la solución es el *semiplano inferior a la recta* $x + 2y = 11$, cuya tabla de valores es:

x	0	11
y	11/2	0

- $x \ge 2y - 5 \iff y \le \dfrac{x+5}{2}$: *semiplano inferior*.

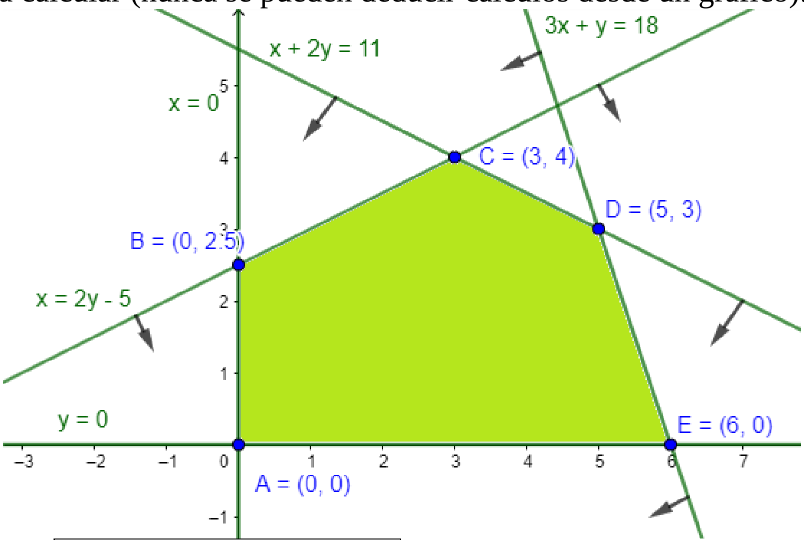
x	0	–5
y	5/2	0

- $3x + y \le 18 \iff y \le -3x + 18$: *semiplano inferior*

x	0	6
y	18	0

- $x \ge 0;\ y \ge 0$ nos restringen al I cuadrante.

Por tanto, el recinto es el del gráfico, donde ya hemos señalado los vértices, que pasamos a calcular (nunca se pueden deducir cálculos desde un gráfico):



Los vértices $\boxed{A(0, 0),\ B(0, 5/2),\ E(6, 0)}$ los conocemos por las tablas de valores usadas para construir el recinto. Los otros dos son:

$$\left.\begin{array}{l} x+2y=11 \\ x-2y=-5 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} x+2y=11 \\ x-2y=-5 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{C(3, 4)}$$

$$2x = 6 \Rightarrow x = 3 \qquad \text{Restando: } 4y = 16 \Rightarrow y = 4$$

$$\left.\begin{array}{l} x+2y=11 \\ 3x+y=18 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2y=11 \\ -6x-2y=-36 \end{array}\right\} \qquad \text{Sust. en 1ª: } 5 + 2y = 11 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow$$

$$-5x = -25 \Rightarrow x = 5$$

$$\boxed{D(5, 3)}$$

b) ¿Pertenece el punto (5.5, 2) a la región anterior. *(0.5 puntos)*

Lo hará si verifica todas las inecuaciones. No se debe deducir dibujándolo en el gráfico, porque las imperfecciones de éste nos pueden llevar a una conclusión errónea:

- $x + 2y \le 11$: $5.5 + 2\cdot 2 = 9.5 \le 11$. Se verifica.
- $x \ge 2y - 5$: $5.5 \ge 2\cdot 2 - 5 = -1$. Se verifica.
- $3x + y \le 18$: $3\cdot 5.5 + 2 = 18.5 \le 18$. No se verifica.

Por tanto, el punto no está en el recinto, pues hay una de las inecuaciones que no se verifica.

c) Calcule los puntos de esa región en los que la función $F(x, y) = 2x + 3y$ alcanza los valores máximo y mínimo y determine dichos valores. *(1 punto)*

- $F(A) = F(0, 0) = 2\cdot 0 + 3\cdot 0 = 0$
- $F(B) = F(0, 5/2) = 2\cdot 0 + 3\cdot 2.5 = 7.5$
- $F(C) = F(3, 4) = 2\cdot 3 + 3\cdot 4 = 18$
- $F(D) = F(5, 3) = 2\cdot 5 + 3\cdot 3 = 19$
- $F(E) = F(6, 0) = 2\cdot 6 + 3\cdot 0 = 12$

De donde el máximo valor es 19 y se alcanza en $D(5, 3)$, mientras que el mínimo es 0, que se alcanza en $A(0, 0)$.

2) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Efectúe, si se puede: $A\cdot D + B\cdot C$; $D^t\cdot B - A^2$ *(1 punto)*

- $A\cdot D + B\cdot C$ no puede efectuarse, puesto que $\dim(A\cdot D) = 2 \times 3$, mientras que $\dim(B\cdot C) = 2 \times 2$, y no podrán sumarse.
- $D^t\cdot B - A^2$ no puede efectuarse tampoco, porque $\dim(D^t\cdot B) = 3 \times 2$, mientras que $\dim(A^2) = 2 \times 2$, y no podrán sumarse.

b) Halle la matriz X que verifica: $A\cdot X = B - C$, calculando A^{-1}. *(1 punto)*

Despejando: $A\cdot X = B - C \Rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot(B - C) \Rightarrow \boxed{X = A^{-1}\cdot(B - C)}$.

Como $|A| = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -2$, existe su inversa.

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{A^{-1} =} \frac{1}{|A|}\text{Adj}(A^t) = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

Por otra parte:

$$B - C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$\boxed{X =} A^{-1}\cdot(B - C) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}$$

3, 4 y 5: Ver examen anterior