NOMBRE: ____

Instrucciones: **1)** Todos los **folios** deben tener el **nombre** y estar **numerados** en la parte superior. **2)** Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. **3)** No se puede usar **corrector ni lápiz**, y el bolígrafo debe ser de **tinta indeleble**. Se aconseja no usar borrador. **4)** Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar** la respuesta a una pregunta con las de otras. **5)** **Desatender las instrucciones puede penalizarse con hasta 1 punto** o la **anulación** en caso de usar tinta corregible.

1) Sea la función

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{a}{t-2} & \text{si } \quad 0 \le t < 1 \\ t^3 - 2t^2 & \text{si } \quad 1 \le t \le 3 \\ \dfrac{t+b}{t-2} & \text{si } \quad t > 3 \end{cases}$$

a) Calcular a y b para que f sea continua en todo su dominio. *(1 punto)*

Para $a = 1$ junto con $b = 6$, se pide:

b) Calcular las asíntotas. *(1 punto)*

c) Calcular las intersecciones de f con los ejes de coordenadas. *(1 punto)*

d) Estudiar la derivabilidad. *(1 punto)*

e) Estudiar la monotonía y calcular los extremos relativos y otros puntos relevantes relacionados con la monotonía. *(1 punto)*

f) Estudiar la curvatura y calcular los puntos de inflexión. *(1,5 puntos)*

g) Si la función representa el balance contable de una empresa, en millones de euros, a lo largo del tiempo t, medido en años, calcular los extremos absolutos (valores que toman y puntos donde se alcanzan), e interpretar los resultados aplicados a la empresa. *(1,5 puntos)*

2) Calcular y simplificar las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{2^x + x^2}{x}$ *(1 punto)*

b) $h(x) = \log(1 - 3x^2)$ *(1 punto)*

SOLUCIONES

1) Sea la función

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{a}{t-2} & \text{si} \quad 0 \le t < 1 \\ t^3 - 2t^2 & \text{si} \quad 1 \le t \le 3 \\ \dfrac{t+b}{t-2} & \text{si} \quad t > 3 \end{cases}$$

a) Calcular a y b para que f sea continua en todo su dominio. *(1 punto)*

Estudiemos la continuidad de la función.

- [0, 1): f está definida mediante una función racional, que es continua salvo en el punto que anula el denominador, es decir, $t = 2 \notin [0, 1)$ $\Rightarrow$ f es continua en [0, 1).
- (1, 3): (excluimos los puntos *frontera*, o sea, que conectan una definición de f con otra) f coincide con una función polinómica, por lo que es continua en (1, 3).
- (3, +∞): por ser racional, es continua salvo en $t = 2$. Como dicho valor no está en este intervalo, f es continua en él.
- $t = 1$: 1) $\exists f(1) = 1^3 - 2\cdot 1^2 = -1$; 2) $\lim\limits_{t\to 1^-} f(t) = \lim\limits_{t\to 1^-} \dfrac{a}{t-2} = -a$; $\lim\limits_{t\to 1^+} f(t) =$ $= \lim\limits_{t\to 1^+}(t^3 - 2t^2) = -1$. Para ser continua, estos tres resultados deben coincidir $\Rightarrow$ $\boxed{a = 1}$.
- $t = 3$: 1) $\exists f(3) = 27 - 2\cdot 9 = 9$; 2) $\lim\limits_{t\to 3^-} f(t) = \lim\limits_{t\to 3^-}(t^3 - 2t^2) = 9$; $\lim\limits_{t\to 3^+} f(t) =$ $= \lim\limits_{t\to 3^+} \dfrac{t+b}{t-2} = 3 + b$. Como queremos que sea continua: $3 + b = 9$ $\Rightarrow$ $\boxed{b = 6}$.

Luego $\boxed{f \text{ es continua en } [0, +\infty) \text{ si, y solo si } a = 1 \text{ con } b = 6}$.

Para $a = 1$ junto con $b = 6$, se pide:

b) Calcular las asíntotas. *(1 punto)*

La ecuación de la función queda así:

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t-2} & \text{si} \quad 0 \le t < 1 \\ t^3 - 2t^2 & \text{si} \quad 1 \le t \le 3 \\ \dfrac{t+6}{t-2} & \text{si} \quad t > 3 \end{cases}$$

- Verticales: Como f es continua para estos valores, según lo visto en el apartado anterior, $\boxed{\text{no puede tener asíntotas verticales}}$.
- Horizontales: Como no puede tender t a –∞, dado que el dominio empieza en 0, solo podría tenerla cuando $t \to +\infty$:

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{t+6}{t-2} = 1$$

por lo que la recta de ecuación $\boxed{y = 1}$ es asíntota horizontal.
- Oblicuas: Saldría la asíntota horizontal ya conocida, cuando $t \to +\infty$.

c) Calcular las intersecciones de f con los ejes de coordenadas. *(1 punto)*

- $t = 0 \Rightarrow f(0) = -1/2 \Rightarrow$ Corta a OY en $\boxed{(0, -1/2)}$.
- $f(t) = 0$. Estudiamos cada una de las tres definiciones de f:
  - $\dfrac{1}{t-2} = 0 \Rightarrow 1 = 0$ (porque para que una fracción se anule, debe valer 0 el numerador y las soluciones que ser obtengan no pueden anular el denominador para ser válidas), lo que es imposible $\Rightarrow$ No tiene solución.
  - $t^3 - 2t^2 = 0 \Rightarrow t^2(t-2) = 0 \Rightarrow$ (un producto vale 0 si y sólo si alguno de los factores se anula): $t^2 = 0 \Rightarrow \underline{t = 0}$, ó $t - 2 = 0 \Rightarrow \underline{t = 2}$. Pero cuando $t = 0$ $f(t)$ no está definida por la función $y = t^3 - 2t^2$, por lo que no es válida. Luego obtenemos solo: $\boxed{(2, 0)}$.
  - $\dfrac{t+6}{t-2} = 0 \Rightarrow t + 6 = 0 \Rightarrow t = -6$, válida porque no anula el denominador. Pero debe desecharse, porque para este valor $f(t) \neq \dfrac{t+6}{t-2}$.

Obtenemos dos puntos: $\boxed{(0, -1/2) \text{ y } (2, 0)}$.

d) Estudiar la derivabilidad. *(1 punto)*

Podemos usar las fórmulas de las tablas de derivadas para derivar *en intervalos abiertos*, por lo que:

$$f'(t) = \begin{cases} \dfrac{-1}{(t-2)^2} & \text{si} \quad 0 < t < 1 \\ 3t^2 - 4t & \text{si} \quad 1 < t < 3 \\ \dfrac{t-2-(t+6)}{(t-2)^2} = \dfrac{-8}{(t-2)^2} & \text{si} \quad t > 3 \end{cases}$$

Como f es continua, podría ser derivable en $t = 1$ y en $t = 6$, por lo que los investigamos:

- $f'(1^-) = \dfrac{-1}{(1-2)^2} = -1$; $f'(1^+) = 3 - 4 = -1$. Como coinciden $\Rightarrow \exists f'(1) = -1$.
- $f'(3^-) = 27 - 12 = 15$; $f'(3^+) = -8$. Al diferir, $\nexists f'(3)$.

Por tanto, completamos la definición de f', pasando a ser:

$$\boxed{f'(t) = \begin{cases} \dfrac{-1}{(t-2)^2} & \text{si} \quad 0 < t < 1 \\ 3t^2 - 4t & \text{si} \quad 1 \leq t < 3 \\ \dfrac{-8}{(t-2)^2} & \text{si} \quad t > 3 \end{cases}}$$

e) Estudiar la monotonía y calcular los extremos relativos y otros puntos relevantes relacionados con la monotonía. *(1 punto)*

- <u>Discontinuidades de f</u>: No tiene.
- <u>Discontinuidades de f'</u>: <u>$t = 3$</u>.
- <u>$f'(t) = 0$</u>:
  - $\dfrac{-1}{(t-2)^2} = 0 \Rightarrow -1 = 0$: No solución.

- $3t^2 - 4t = 0 \Rightarrow t(3t-4) = 0 \Rightarrow t = 0$ (no válida, porque $0 \notin [1, 3)$), ó $3t - 4 = 0 \Rightarrow \underline{t = 4/3}$.
- $\dfrac{-8}{(t-2)^2} = 0 \Rightarrow -8 = 0$, sin solución.

Dividimos el dominio en intervalos mediante los puntos obtenidos, y evaluamos el signo de f':

	(0, 4/3)	4/3	(4/3, 3)	3	(3, +∞)
f'	–	0	+	∄	–
f	↘ decrec	mínimo	↗ crec	Máximo y Pto ang	↘ decrec

- Como $f(4/3) = -32/27 \Rightarrow$ Mínimo relativo en $(4/3, -32/27) \approx (1.33, -1.19)$.
- $f(3) = 9 \Rightarrow$ Máximo relativo y Punto anguloso en (3, 9) (es *punto anguloso* porque f es continua y f' tiene una discontinuidad de salto finito).

f) Estudiar la curvatura y calcular los puntos de inflexión. *(1,5 puntos)*

Necesitamos f'':

$$f''(t) = \begin{cases} \dfrac{2(t-2)}{(t-2)^4} = \dfrac{2}{(t-2)^3} & \text{si} \quad 0 < t < 1 \\ 6t - 4 & \text{si} \quad 1 < t < 3 \\ \dfrac{8\cdot 2(t-2)}{(t-2)^4} = \dfrac{16}{(t-2)^3} & \text{si} \quad t > 3 \end{cases}$$

f' no es derivable en $t = 3$, porque no es continua. Pero podría serlo en $t = 1$, por ser continua. Como $f''(1^-) = \dfrac{2}{(1-2)^2} = -2$ y $f''(1^+) = 6 - 4 = 2 \Rightarrow \nexists f''(1) = 2$, por lo que f'' es la anterior, y no hay que retocarla.

- Discontinuidades de f: No tiene.
- Discontinuidades de f': $t = 3$.
- Discontinuidades de f'': $t = 1$ y $t = 3$.
- $f''(t) = 0$:
  - $\dfrac{2}{(t-2)^3} = 0$: No solución.
  - $6t - 4 = 0 \Rightarrow t = 2/3 \notin [1, 3)$, por lo que no es válida.
  - $\dfrac{16}{(t-2)^3} = 0$: No solución.

Dividimos el dominio entre los puntos obtenidos:

	(0, 1)	1	(1, 3)	3	(3, +∞)
f''	–	∄	+	∄	+
f	∩ cóncava	P.I.	∪ convexa	Nada	∪ convexa

Como $f(1) = -1$, tiene un punto de inflexión en $(1, -1)$, que lo es porque hay un cambio en la curvatura y es un punto de continuidad de f.

g) Si la función representa el balance contable de una empresa, en millones de euros, a lo largo del tiempo t, medido en años, calcular los extremos absolutos (valores que toman y puntos donde se alcanzan), e interpretar los resultados aplicados a la empresa. *(1,5 puntos)*

- Extremos del dominio: 0; +∞.
- Discontinuidades de f: No tiene
- Discontinuidades de f': 3.

- $\underline{f'(t) = 0}$: 4/3 (se obtuvo en el apartado *e*).

Estudiamos imágenes o límites de los puntos obtenidos:

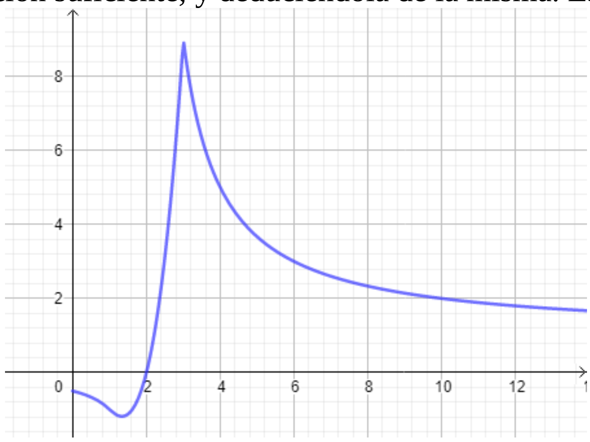
- $t = 0$: $f(0) = -1/2$.
- $t \to +\infty$: $\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{t+6}{t-2} = 1$
- $t = 4/3$: $f(4/3) = -32/27$.
- $t = 3$: $f(3) = 9$.

El menor resultado es $-32/27$, y es imagen de $t = 4/3$ $\Rightarrow$ El mínimo absoluto de la función vale $-32/27$ y se alcanza para $t = 4/3$.

El mayor resultado es 9, y es imagen de $t = 3$ $\Rightarrow$ El máximo absoluto de la función vale 9 y se alcanza para $t = 3$.

Por tanto, la empresa dispone, como máximo, de 9 millones de euros en el tercer año, y, como mínimo, 32/27 millones de euros de deuda (1.185.185.19€), cuando transcurren 4/3 años de vida.

Otra forma de obtener este resultado hubiera sido trazando su gráfica, de la que tenemos información suficiente, y deduciéndola de la misma. Es la siguiente:



2) Calcular y simplificar las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{2^x + x^2}{x}$ *(1 punto)*

$$f'(x) = \frac{(2^x \ln 2 + 2x)x - (2^x + x^2)}{x^2} = \frac{2^x x \ln 2 + 2x^2 - 2^x - x^2}{x^2} = \boxed{\frac{2^x x \ln 2 + x^2 - 2^x}{x^2}}$$

b) $h(x) = \log(1 - 3x^2)$ *(1 punto)*

$$h'(x) = \boxed{\frac{-6x}{1-3x^2} \frac{1}{\ln 10}}$$

NOMBRE: ____

Instrucciones: **1)** Todos los **folios** deben tener el **nombre** y estar **numerados** en la parte superior. **2)** Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. **3)** No se puede usar **corrector ni lápiz**, y el bolígrafo debe ser de **tinta indeleble**. Se aconseja no usar borrador. **4)** Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar** la respuesta a una pregunta con las de otras. **5)** **Desatender las instrucciones puede penalizarse con hasta 1 punto** o la **anulación** en caso de usar tinta corregible.

1) La velocidad que lleva un móvil, en función del tiempo t, viene dada por la siguiente función:

$$v(t) = \begin{cases} 7t^2 & \text{si} \quad 0 \le t < 1 \\ 2t + a & \text{si} \quad 1 \le t \le 5 \\ -t^2 + 12t + b & \text{si} \quad 5 < t \le 10 \end{cases}$$

a) Determine a y b para que la función sea continua en su dominio. *(1 punto)*

b) Para $a = 5$ y $b = -20$, estudie la derivabilidad. ¿En qué momento el móvil alcanza la velocidad máxima? *(1,5 puntos)*

c) Para los valores anteriores, calcule la recta tangente en $t = 2$. *(1 punto)*

d) Para dichos valores, estudie su monotonía, calculando los extremos relativos. *(1 punto)*

2) Se considera la función $f(x) = \dfrac{ax}{bx+1}$, con a y b números reales.

a) Calcule los valores de a y b, sabiendo que $f(-1) = 1$ y que en el punto de abscisa $x = 0$ la recta tangente a la gráfica de f es paralela a la recta $y = 2x + 1$. *(1 punto)*

b) Para $a = b = 1$, halle la ecuación de sus asíntotas. *(1 punto)*

3) Calcule y simplifique las derivadas de las funciones: *(1,5 puntos)*

$$f(x) = x \cdot \ln(x) \qquad g(x) = \frac{e^{3x}}{x^4 + 1}$$

4) Calcular $f(x)$ sabiendo que $f'(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}-1}}{\sqrt{x}}$ y que $f(1) = 3$ *(2 puntos)*

SOLUCIONES

1) La velocidad que lleva un móvil, en función del tiempo t, viene dada por la siguiente función:

$$v(t) = \begin{cases} 7t^2 & \text{si} \quad 0 \le t < 1 \\ 2t + a & \text{si} \quad 1 \le t \le 5 \\ -t^2 + 12t + b & \text{si} \quad 5 < t \le 10 \end{cases}$$

a) Determine a y b para que la función sea continua en su dominio. *(1 punto)*

- [0, 1): es continua, por ser polinómica.
- (1, 5): lo mismo, independientemente de lo que valga a.
- (5, 10]: igual, independientemente de lo que valga b.
- $t = 1$: 1) $\exists v(1) = 7$

  2) $\lim\limits_{t\to 1^-}(7t^2) = 7$

  $\lim\limits_{t\to 1^+}(2t + a) = 2 + a$

  con lo que para se continua debemos exigir: $2 + a = 7 \Leftrightarrow a = 5$.
- $t = 5$: 1) $\exists v(5) = 10 + a = 10 + 5 = 15$

  2) $\lim\limits_{t\to 5^-}(2t + a) = 10 + 5 = 15$

  $\lim\limits_{t\to 5^+}(-t^2 + 12t + b) = -25 + 60 + b = 35 + b$

  con lo que para ser continua requiere: $35 + b = 15 \Leftrightarrow b = -20$.

Luego $\boxed{v \text{ es continua en } [0, 10] \text{ si, y sólo si } a = 5 \text{ y } b = -20}$.

b) Para $a = 5$ y $b = -20$, estudie la derivabilidad. ¿En qué momento el móvil alcanza la velocidad máxima? *(1,5 puntos)*

La función es:

$$v(t) = \begin{cases} 7t^2 & \text{si} \quad 0 \le t < 1 \\ 2t + 5 & \text{si} \quad 1 \le t \le 5 \\ -t^2 + 12t - 20 & \text{si} \quad 5 < t \le 10 \end{cases}$$

Como hemos visto que es continua, derivamos (en intervalos abiertos):

$$v'(t) = \begin{cases} 14t & \text{si} \quad 0 < t < 1 \\ 2 & \text{si} \quad 1 < t < 5 \\ -2t + 12 & \text{si} \quad 5 < t < 10 \end{cases}$$

Como es continua en $t = 1$, podría ser derivable. Dado que $v'(1^-) = 14\cdot 1 = 14$; $v'(1^+) = 2$, no es derivable en $t = 1$ (no coinciden).

Lo mismo para $t = 5$: $v'(5^-) = 2$; $v'(5^+) = -2\cdot 5 + 12 = 2 \Rightarrow \exists v'(5) = 2$. Luego la expresión final de v' es:

$$\boxed{v'(t) = \begin{cases} 14t & \text{si} \quad 0 < t < 1 \\ 2 & \text{si} \quad 1 < t \le 5 \\ -2t + 12 & \text{si} \quad 5 < t < 10 \end{cases}}$$

Calculemos el máximo absoluto. Como no tenemos gráfica ni monotonía, usamos el procedimiento general (la gráfica sería fácil, pues son dos parábolas y una recta, pero será más corto el procedimiento general). Los puntos a estudiar son:

- Principio y fin del dominio: 0; 10.
- Discontinuidades de v: No tiene.
- Discontinuidades de v': 1.
- $v'(t) = 0$:
  - $14t = 0 \Rightarrow t = 0$, que no sirve, pues no verifica $0 < t < 1$.
  - $2 = 0$, sin solución.
  - $-2t + 12 = 0 \Rightarrow t = 6$, válida, porque verifica $5 < t < 10$.

  Comparamos sus imágenes (o límites, si no las tuviera o en puntos de discontinuidad de la función):
  $v(0) = 0$
  $v(10) = -100 + 120 - 20 = 0$
  $v(6) = -36 + 72 - 20 = 16$

Luego la máxima velocidad es de 16 unidades de velocidad (no nos han dicho cuáles usan) y se alcanza en $t = 6$ unidades de tiempo (que tampoco nos han dado).

El mínimo absoluto es 0 en $t = 0$ y $t = 10$, aunque no nos lo piden.

c) Para los valores anteriores, calcule la recta tangente en $t = 2$. *(1 punto)*

- Punto de tangencia: Como $v(2) = 4 + 5 = 9$, es $(2, 9)$.
- Pendiente de la tangente: $m = v'(2) = 2$
- Ecuación de la tangente: $y - 9 = 2(t - 2) \Rightarrow y = 2t - 4 + 9 \Rightarrow \boxed{y = 2t + 5}$.

d) Para dichos valores, estudie su monotonía, calculando los extremos relativos. *(1 punto)*

- Discontinuidades de v: No hay
- Discontinuidades de v': $t = 1$
- $v'(t) = 0$:
  - $14t = 0 \Rightarrow t = 0$, que no sirve, pues no verifica $0 < t < 1$.
  - $2 = 0$, sin solución.
  - $-2t + 12 = 0 \Rightarrow t = 6$, válida, porque verifica $5 < t < 10$.

	(0, 1)	1	(1, 6)	6	(6, 10)
v'	+	∄	+	0	–
v	↗ crec	Pto anguloso	↗ crec	Máximo	↘ decrec

Como $v(6) = 16 \Rightarrow$ Tiene un $\boxed{\text{máximo relativo en } (6, 16)}$. Por otra parte, como $v(1) = 7$, en (1, 7) tiene un punto anguloso, que no es extremo relativo.

2) Se considera la función $f(x) = \dfrac{ax}{bx+1}$, con a y b números reales.

a) Calcule los valores de a y b, sabiendo que $f(-1) = 1$ y que en el punto de abscisa $x = 0$ la recta tangente a la gráfica de f es paralela a la recta $y = 2x + 1$. *(1 punto)*

- $f(-1) = 1 \Rightarrow \dfrac{-a}{-b+1} = 1 \Rightarrow -a = -b + 1 \Rightarrow \boxed{a - b = -1}$ (1)
- La tangente en $x = 0$ es paralela a $y = 2x + 1 \Rightarrow$ su pendiente es $m = 2$. Pero la pendiente de dicha tangente debe valer $m = f'(0)$. Y dado que $f'(x) = \dfrac{a(bx+1) - axb}{(bx+1)^2} = \dfrac{abx + a - abx}{(bx+1)^2} = \dfrac{a}{(bx+1)^2} \Rightarrow f'(0) = a$. Por tanto, $\boxed{a = 2}$.

Sustituyendo en (1): $2 - b = -1 \Rightarrow 2 + 1 = b \Rightarrow \boxed{b = 3}$.

Luego $\boxed{a = 2,\ b = 3}$.

b) Para $a = b = 1$, halle la ecuación de sus asíntotas. *(1 punto)*

Tenemos que $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$.

- Asíntotas verticales: Como la única discontinuidad está en $x = -1$, evaluamos: $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x}{x+1} = \left(\dfrac{-1}{0}\right) = \infty \Rightarrow$ $\boxed{\text{la recta } x = -1 \text{ es asíntota vertical}}$.
- Asíntota horizontal: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x+1} = 1 \Rightarrow$ $\boxed{\text{la recta } y = 1 \text{ es asínt. horizontal}}$.
- Asíntota oblicua: Saldría la horizontal que ya tenemos.

3) Calcule y simplifique las derivadas de las funciones: *(1,5 puntos)*

$$f(x) = x \cdot \ln(x) \qquad g(x) = \frac{e^{3x}}{x^4+1}$$

- $\boxed{f'(x) =}\ 1\cdot\ln(x) + x\,\dfrac{1}{x} = \boxed{\ln(x) + 1}$.
- $\boxed{g'(x) =}\ \dfrac{3e^{3x}(x^4+1) - e^{3x}4x^3}{(x^4+1)^2} = \dfrac{3e^{3x}x^4 + 3e^{3x} - 4e^{3x}x^3}{(x^4+1)^2} = \boxed{\dfrac{e^{3x}(3x^4 - 4x^3 + 3)}{(x^4+1)^2}}$.

4) Calcular $f(x)$ sabiendo que $f'(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}-1}}{\sqrt{x}}$ y que $f(1) = 3$ *(2 puntos)*

$$f(x) = \int \frac{e^{\sqrt{x}-1}}{\sqrt{x}}dx = 2\int e^{\sqrt{x}-1}\frac{1}{2\sqrt{x}}dx = 2e^{\sqrt{x}-1} + k$$

Como $f(1) = 3 \Rightarrow 2e^0 + k = 3 \Rightarrow 2 + k = 3 \Rightarrow k = 1$.

Por tanto: $\boxed{f(x) = 2e^{\sqrt{x}-1} + 1}$.

NOMBRE: ____

Instrucciones: **1)** Todos los **folios** deben tener el **nombre** y estar **numerados** en la parte superior. **2)** Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. **3)** No se puede usar **corrector ni lápiz**, y el bolígrafo debe ser de **tinta indeleble**. Se aconseja no usar borrador. **4)** Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar** la respuesta a una pregunta con las de otras. **5)** **Desatender las instrucciones puede penalizarse con hasta 1 punto** o la **anulación** en caso de usar tinta corregible.

1) Dada la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+1}{1-2x} & \text{si } -2 \le x < 0 \\ x^2 - x - a & \text{si } 0 \le x \le 1 \end{cases}$

   a) Obtenga el valor de a para que la función sea continua. Para ese valor de a, calcule la derivada de f. *(1 punto)*
   b) Calcule sus intersecciones con los ejes de coordenadas para $a = -1$. *(1 punto)*
   c) Para $a = -1$, estudie su monotonía y extremos relativos. *(1,5 puntos)*
   d) Para el mismo valor de a, calcule sus extremos absolutos. *(1,5 puntos)*

2) Calcule y simplifique las derivadas de las funciones: *(2 puntos)*

$$f(x) = e^{5x}(x^2 - 5)^3 \qquad g(x) = \frac{(x^3+1)^2}{\ln(x^2+2)}$$

3) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $h(x) = \dfrac{x+10}{x+5}$ en el punto de abscisa $x = 0$. *(1 punto)*

4) Calcule $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{9-4x^2}}\,dx$ *(2 puntos)*

SOLUCIONES

1) Dada la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+1}{1-2x} & \text{si} \quad -2 \le x < 0 \\ x^2 - x - a & \text{si} \quad 0 \le x \le 1 \end{cases}$

a) Obtenga el valor de a para que la función sea continua en su dominio. Para ese valor de a, calcule la derivada de f. *(1 punto)*

Continuidad

- [–2, 0): Las funciones elementales con continuas en su dominio. Por tanto, en este intervalo, f será continua salvo en $1 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = ½$, pero al no estar ese valor en el intervalo, es un punto de discontinuidad de $y = \dfrac{2x+1}{1-2x}$, pero no de $f \Rightarrow$ f es continua en [–2, 0).
- (0, 1]: f es continua, por ser polinómica.
- $x = 0$: Los puntos que conectan zonas de definición de f tienen que ser estudiados aparte. Como 1) $\exists f(0) = 0^2 - 0 - a = -a$; 2) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{2x+1}{1-2x} = 1$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x^2 - x - a) = -a$, para ser continua en $x = 0$ precisa la coincidencia de estos resultados: $-a = 1 \Leftrightarrow a = -1$.

Por tanto, $\boxed{f \text{ es continua en } [-2, 1] \Leftrightarrow a = -1}$.

Derivada

La función queda así:

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+1}{1-2x} & \text{si} \quad -2 \le x < 0 \\ x^2 - x + 1 & \text{si} \quad 0 \le x \le 1 \end{cases}}$$

Por tanto:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2(1-2x)-(2x+1)(-2)}{(1-2x)^2} = \dfrac{2-4x+4x+2}{(1-2x)^2} = \dfrac{4}{(1-2x)^2} & \text{si} \quad -2 < x < 0 \\ 2x - 1 & \text{si} \quad 0 < x < 1 \end{cases}$$

Hay que investigar si existe $f'(0)$. Si no hubiese sido continua en $x = 0$, no podría ser derivable en ese punto, pero es continua:

$$f'(0^-) = \frac{4}{(1-0)^2} = 4 \qquad f'(0^+) = 2\cdot 0 - 1 = -1$$

Como no coinciden, no existe la derivada de f en $x = 0$, por lo que la expresión final de f es la anterior, que ponemos ya simplificada porque se va a usar:

$$\boxed{f'(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{(1-2x)^2} & \text{si} \quad -2 < x < 0 \\ 2x - 1 & \text{si} \quad 0 < x < 1 \end{cases}}$$

b) Calcule sus intersecciones con los ejes de coordenadas para $a = -1$. *(1 punto)*

Si $y = 0$:

- [–2, 0): $\dfrac{2x+1}{1-2x} = 0 \Leftrightarrow 2x + 1 = 0$ y las soluciones no anulan el denominador. La solución es $x = -½ \in [-2, 0)$ y no anula el denominador, luego es una solución válida.
- [0, 1]: $x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$, que no tiene solución.

Luego $\boxed{\text{corta en } (-½ , 0)}$.

Si $x = 0$: $f(0) = 1$. Luego $\boxed{\text{corta en } (0, 1)}$.

c) Para $a = -1$, estudie su monotonía y extremos relativos. *(1,5 puntos)*

- Discontinuidades de f: No tiene.
- Discontinuidades de f': $x = 0$.
- $f'(x) = 0$:
  - $\dfrac{4}{(1-2x)^2} = 0 \Rightarrow 4 = 0$, que no tiene solución.
  - $2x - 1 = 0 \Rightarrow x = ½$.

Dividimos el dominio en intervalos mediante los dos puntos obtenidos:

	(–2, 0)	0	(0, ½)	½	(½, 1)
f'	+	∄	–	0	+
f	↗ crec	Máximo y Pto anguloso	↘ decrec	mínimo	↗ crec

Como $f(0) = 1$ y $f(½) = ¾$, tiene un $\boxed{\text{máximo relativo en } (0, 1)}$, que es punto anguloso porque f es continua en él pero f' tiene una discontinuidad de salto finito, y tiene un $\boxed{\text{mínimo relativo en } (½, ¾)}$.

d) Para el mismo valor de a, calcule sus extremos absolutos. *(1,5 puntos)*

Podríamos dibujar la gráfica con la información que tenemos y algo más para deducir de ella los extremos absolutos, pero vamos a usar el método general, del que tenemos hechos muchos cálculos:

- Principio y fin del dominio: –2; 1.
- Discontinuidades de f: No tiene.
- Discontinuidades de f': $x = 0$.
- $f'(x) = 0$: ½.

Evaluamos la función en esos puntos:

- $f(-2) = -3/5 = -0.6$
- $f(1) = 1 - 1 + 1 = 1$
- $f(0) = 1$
- $f(1/2) = ¾ = 0.75$

Luego la máxima imagen y, por tanto, $\boxed{\text{el máximo absoluto vale } 1 \text{ y se alcanza en } x = 0 \text{ y en } x = 1}$, y la mínima imagen y, por tanto, $\boxed{\text{el mínimo absoluto vale } -0.6 = -3/5 \text{ y se alcanza en } x = -2}$.

2) Calcule y simplifique las derivadas de las funciones: *(2 puntos)*

$$f(x) = e^{5x}(x^2-5)^3 \qquad g(x) = \frac{(x^3+1)^2}{\ln(x^2+2)}$$

- $f(x) = e^{5x}(x^2-5)^3 \Rightarrow f'(x) = 5e^{5x}(x^2-5)^3 + e^{5x}\,3(x^2-5)^2\,2x =$
  $= e^{5x}(x^2-5)^2[5(x^2-5)+6x] =$
  $= \boxed{e^{5x}(x^2-5)^2[5x^2+6x-25]}$.

- $g(x) = \dfrac{(x^3+1)^2}{\ln(x^2+2)} \Rightarrow g'(x) = \dfrac{2(x^3+1)3x^2\ln(x^2+2) - (x^3+1)^2\dfrac{2x}{x^2+2}}{\ln^2(x^2+2)} =$
  $= \boxed{\dfrac{6x^2(x^3+1)\ln(x^2+2) - \dfrac{2x(x^3+1)^2}{x^2+2}}{\ln^2(x^2+2)}}$

3) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $h(x) = \dfrac{x+10}{x+5}$ en el punto de abscisa $x = 0$. *(1 punto)*

- Punto de tangencia: $h(0) = \dfrac{10}{5} = 2 \Rightarrow \boxed{(0,\,2)}$.
- Pendiente de la tangente: $h'(x) = \dfrac{(x+5)-(x+10)}{(x+5)^2} = \dfrac{x+5-x-10}{(x+5)^2} =$
  $= \dfrac{-5}{(x+5)^2} \Rightarrow \boxed{m =} h'(0) = \dfrac{-5}{25} = \boxed{-\dfrac{1}{5}}$
- Ecuación de la tangente: $y - 2 = -\dfrac{1}{5}(x-0) \Rightarrow \boxed{y = -\dfrac{1}{5}x + 2}$.

4) Calcule $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{9-4x^2}}dx$ *(2 puntos)*

$$\int \frac{x}{\sqrt{9-4x^2}}dx = \int \frac{x}{(9-4x^2)^{1/2}}dx = \int x(9-4x^2)^{-1/2}dx =$$

$$= \left[\begin{array}{c} t = 9-4x^2 \\ dt = -8xdx \Rightarrow dx = -\dfrac{dt}{8x} \end{array}\right] = \left(\int xt^{-1/2}\frac{-dt}{8x}\right) = -\frac{1}{8}\int t^{-1/2}dt = -\frac{1}{8}\frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + k =$$

$$= -\frac{1}{8}\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + k = -\frac{2}{8}\sqrt{t} + k = \boxed{-\frac{1}{4}\sqrt{9-4x^2} + k}.$$