NOMBRE: ____

Instrucciones: **1)** Todos los **folios** deben tener el **nombre** y estar **numerados** en la parte superior. **2)** Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. **3)** No se puede usar **corrector ni lápiz**, y el bolígrafo debe ser de **tinta indeleble**. Se aconseja no usar borrador. **4)** Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar** la respuesta a una pregunta con las de otras. **5)** **Desatender las instrucciones puede penalizarse con hasta 1 punto** o la **anulación** en caso de usar tinta corregible.

1) Lena y Adrián son aficionados al tiro con arco. Lena da en el blanco con probabilidad 7/11 y Adrián, con probabilidad 9/13. Si ambos sucesos son independientes, calcule la probabilidad de los siguientes sucesos:
   a) "Ambos dan en el blanco". *(0,6 puntos)*
   b) "Sólo Lena da en el blanco". *(0,6 puntos)*
   c) "Al menos uno da en el blanco". *(0,8 puntos)*

2) Una enfermedad afecta al 10% de la población. Una prueba de diagnóstico tiene las siguientes características: si se aplica a una persona con la enfermedad, da positivo en el 98% de los casos; si se aplica a una persona que no tiene la enfermedad, da positivo en el 6% de los casos. Se elige una persona, al azar, y se le aplica la prueba.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que dé positivo? *(1 punto)*
   b) Si no da positivo, ¿cuál es la probabilidad de que tenga la enfermedad? *(1 punto)*

3) El peso de los adultos de una determinada población sigue una distribución Normal de media 70 kg y desviación típica 16 kg. Si elegimos, al azar, muestras de tamaño 4,
   a) ¿Cuál es la distribución de la media muestral? *(0,5 puntos)*
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que el peso medio de una de esas muestras esté comprendido entre 65 y 72 kg? *(1 punto)*

4) Se dispone de cuatro tornillos de 1, 2, 3 y 4 gramos de peso, respectivamente.
   a) Mediante muestreo aleatorio simple, exprese todas las muestras posibles de tamaño 2. *(0,5 puntos)*
   b) Determine la media y la varianza de los pesos medios muestrales. *(1 punto)*

5) En una empresa de gas trabajan 150 personas en mantenimiento, 450 en operaciones, 200 en servicios y 100 en cargos directivos. Con objeto de realizar una encuesta laboral, se quiere seleccionar una muestra de 180 trabajadores de esa empresa por muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional. ¿Qué número de trabajadores de debe elegir de cada grupo? *(1 punto)*

6) Se sabe que la estatura de las personas de una población es una variable aleatoria que sigue una distribución Normal cuya desviación típica es de 0.04 m. Para estimar la media de esta variable se ha tomado una muestra aleatoria de 60 personas de esa población y se ha encontrado una estatura media de 1.73 m.
   a) Obtenga un intervalo de confianza, con un nivel del 97%, para la media de la distribución de estaturas. *(1 punto)*
   b) Halle el tamaño mínimo que debe tener una muestra de esta población para que la amplitud de un intervalo de la media con este nivel de confianza sea inferior a 0.08 m. *(1 punto)*

SOLUCIONES

1) Lena y Adrián son aficionados al tiro con arco. Lena da en el blanco con probabilidad 7/11 y Adrián, con probabilidad 9/13. Si ambos sucesos son independientes, calcule la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) "Ambos dan en el blanco". *(0,6 puntos)*

Designemos los sucesos: $L \equiv$ "Lena da en el blanco"; $A \equiv$ "Adrián da en el blanco".

Sabemos: $P(L) = 7/11$; $P(A) = 9/13$.

Nos piden $P(L \cap A)$. Como son independientes:

$$\boxed{P(L \cap A) =} P(L) \cdot P(A) = \frac{7}{11} \cdot \frac{9}{13} = \boxed{\frac{63}{143}}$$

b) "Sólo Lena da en el blanco". *(0,6 puntos)*

Nos piden la probabilidad de que acierte Lena y falle Adrián:

$$P(L \cap A^c) = P(L - A) = P(L) - P(L \cap A) = \frac{7}{11} - \frac{63}{143} = \boxed{\frac{28}{143}}.$$

c) "Al menos uno da en el blanco". *(0,8 puntos)*

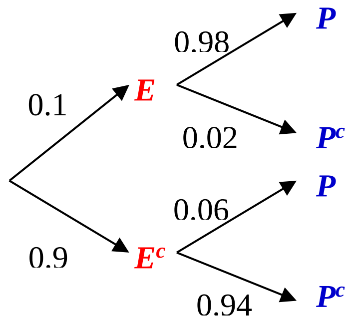
Nos piden que acierte Lena o Adrián:

$$P(L \cup A) = P(L) + P(A) - P(L \cap A) = \frac{7}{11} + \frac{9}{13} - \frac{63}{143} = \boxed{\frac{127}{143}}.$$

2) Una enfermedad afecta al 10% de la población. Una prueba de diagnóstico tiene las siguientes características: si se aplica a una persona con la enfermedad, da positivo en el 98% de los casos; si se aplica a una persona que no tiene la enfermedad, da positivo en el 6% de los casos. Se elige una persona, al azar, y se le aplica la prueba.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que dé positivo? *(1 punto)*

Como se trata de dos sucesos dependientes, podemos estructurar el problema en un diagrama de árbol, para resolverlo: es el adjunto ($E \equiv$ La persona está enferma; $P \equiv$ El test da positivo).



Por el *Teorema de la Probabilidad Total*:

$$\boxed{P(P) =} P(E)P(P/E) + P(E^c)P(P/E^c) =$$
$$= 0.1 \cdot 0.98 + 0.9 \cdot 0.06 = \boxed{0.152}$$

b) Si no da positivo, ¿cuál es la probabilidad de que tenga la enfermedad? *(1 punto)*

Por el *Axioma de la Probabilidad Condicionada*, del que se deduce la *Fórmula de Bayes*, y teniendo en cuenta que en el apartado anterior hemos calculado $P(P)$:

$$\boxed{P(E/P^c) =} \frac{P(E \cap P^c)}{P(P^c)} = \frac{0.1 \cdot 0.02}{1 - 0.152} = \boxed{0.002358}$$

3) El peso de los adultos de una determinada población sigue una distribución Normal de media 70 kg y desviación típica 16 kg. Si elegimos, al azar, muestras de tamaño 4,

a) ¿Cuál es la distribución de la media muestral? *(0,5 puntos)*

El experimento aleatorio principal consiste en elegir una persona adulta de la población, al azar, y medir su peso, en kg. Su resultado lo recoge la variable aleatoria:

$$X \equiv \textit{peso de un adulto (en kg)}$$

Como $X \sim N(70; 16)$, es decir, $\mu = 70$ kg, $\sigma = 16$ kg, $\boxed{\text{dado que } X \text{ es Normal}}$:

$$\bar{x} \sim N\left(\mu; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(70; \frac{16}{\sqrt{4}}\right) = \boxed{N(70; 8)}$$

Es decir, $\mu_{\bar{x}} = 70$ y $\sigma_{\bar{x}} = 8$.

Si X no hubiese sido Normal, podría haber sido cierto por aproximación, según lo que afirma el *Teorema Central del Límite*, si las muestras fuesen de tamaño mayor o igual que 30. Pero esto no es cierto, con lo cual no tendríamos la distribución de la media muestral.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el peso medio de una de esas muestras esté comprendido entre 65 y 72 kg? *(1 punto)*

Según el resultado anterior, tipificando la Normal:

$$P(65 \le \bar{x} \le 72) = P\left(\frac{65-70}{8} \le \frac{\bar{x}-70}{8} \le \frac{72-70}{8}\right) = P(-0.625 \le Z \le 0.25) =$$

$$= P(Z \le 0.25) - P(Z \le -0.625) = P(Z \le 0.25) - P(Z \ge 0.625) =$$

$$= P(Z \le 0.25) - (1 - P(Z \le 0.625) =$$

todo ello en virtud de la simetría de la función de densidad de la Normal. Las tablas sólo admiten dos decimales como valores de Z, por lo que 0.625 lo redondeamos a 0.63, resultando:

$$= 0.5987 - 1 + 0.7357 = \boxed{0.3344}$$

4) Se dispone de cuatro tornillos de 1, 2, 3 y 4 gramos de peso, respectivamente.

a) Mediante muestreo aleatorio simple, exprese todas las muestras posibles de tamaño 2. *(0,5 puntos)*

Según los criterios comunes, en muestreo aleatorio simple las muestras de diferencian unas de otras por el orden, y se permite la repetición. Por tanto, dichas muestras son:

(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4) (2, 1), (2, 2), (2, 3) (2, 4),
(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)

b) Determine la media y la varianza de los pesos medios muestrales. *(1 punto)*

Los pesos medios muestrales son las medias de cada una de las muestras. Hay que calcular media y varianza de la secuencia de dichas medias. Hay dos formas de hacerlo.

<u>Forma 1 (larga)</u>

Calculamos las medias de las muestras anteriores, resultando, respectivamente (sumamos los datos de cada muestra y dividimos entre 2):

1, 1.5, 2, 2.5, 1.5, 2, 2.5, 3, 2, 2.5, 3, 3.5, 2.5, 3, 3.5, 4

Entonces:

$$\boxed{\mu_{\bar{x}} =} \frac{1 + 1.5 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + 3.5 \cdot 2 + 4}{16} = \boxed{2.5}$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1^2 + 1.5^2 \cdot 2 + 2^2 \cdot 3 + \ldots + 3.5^2 \cdot 2 + 4^2}{16} - \mu_{\bar{x}}^{\ 2}} = 0.7906 \Rightarrow \boxed{\sigma_{\bar{x}}^{\ 2} = 0.625}$$

aunque los cálculos no los hacemos así, sino introduciendo los datos en la calculadora en *modo estadística de 1 variable* (no olvidar ponerla en *modo comp* al finalizar).

Forma 2 (corta y recomendada)

Calculamos la media y desviación típica poblacional. Para ello, usamos la calculadora, como antes, si bien explicitamos los cálculos que producen tales resultados (es obligatorio hacerlo):

$$\mu = \frac{1+2+3+4}{4} = 2.5 \qquad \sigma = \sqrt{\frac{1^2+2^2+3^2+4^2}{4} - \mu^2} = 1.1180$$

Y empleamos los siguientes resultados:

$$\boxed{\mu_{\bar{x}}} = \mu = \boxed{2.5} \text{ y } \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1.1180}{\sqrt{2}} = 0.7906 \Rightarrow \boxed{\sigma_{\bar{x}}{}^2} = 0.7906^2 = \boxed{0.625}$$

5) En una empresa de gas trabajan 150 personas en mantenimiento, 450 en operaciones, 200 en servicios y 100 en cargos directivos. Con objeto de realizar una encuesta laboral, se quiere seleccionar una muestra de 180 trabajadores de esa empresa por muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional. ¿Qué número de trabajadores de debe elegir de cada grupo? *(1 punto)*

El muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional funciona como un reparto proporcional, y la regla de tres es herramienta suficiente para su resolución. Así:

	Población	*Muestra*
Mantenimiento	150	x
Operaciones	450	y
Servicios	200	z
Directivos	100	w
Total	900	180

- Mantenimiento $\left.\begin{array}{ccc} \textit{Población} & & \textit{Muestra} \\ 150 & \rightarrow & x \\ 900 & \rightarrow & 180 \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{180}{900}150 = 30$ trabajadores
- Operaciones: $\left.\begin{array}{ccc} \textit{Población} & & \textit{Muestra} \\ 450 & \rightarrow & x \\ 900 & \rightarrow & 180 \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{180}{900}450 = 90$ trabajadores
- Servicios: $\left.\begin{array}{ccc} \textit{Población} & & \textit{Muestra} \\ 200 & \rightarrow & x \\ 900 & \rightarrow & 180 \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{180}{900}200 = 40$ trabajadores
- Directivos: $\left.\begin{array}{ccc} \textit{Población} & & \textit{Muestra} \\ 100 & \rightarrow & x \\ 900 & \rightarrow & 180 \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{180}{900}100 = 20$ trabajadores

Así, en la muestra hay 30 trabajadores de Mantenimiento, 90 de Operaciones, 40 de Servicios y 20 Directivos. Observar que 30 + 90 + 40 + 20 = 180, que es el tamaño de la muestra.

6) Se sabe que la estatura de las personas de una población es una variable aleatoria que sigue una distribución Normal cuya desviación típica es de 0.04 m. Para estimar la media de esta variable se ha tomado una muestra aleatoria de 60 personas de esa población y se ha encontrado una estatura media de 1.73 m.

a) Obtenga un intervalo de confianza, con un nivel del 97%, para la media de la distribución de estaturas. *(1 punto)*

En la población, la variable aleatoria es $X \equiv$ *estatura de una persona*. Y sabemos que $X \sim N(\mu; 0.04)$, es decir, $\sigma = 0.04$ *m*.

La muestra tiene las siguientes características: $\overline{x} = 1.73$ m y $n = 60$.

Nos piden un intervalo de confianza al 97% $\Rightarrow$ $1 - \alpha = 0.97$ $\Rightarrow$ $\alpha = 0.03$ $\Rightarrow$ $1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0.985$ $\Rightarrow$ según las tablas de la $N(0;1)$: $z_{\alpha/2} = 2.17$

Por tanto, el intervalo de confianza pedido es:

$$\left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(1.73 - 2.17\frac{0.04}{\sqrt{60}},\ 1.73 + 2.17\frac{0.04}{\sqrt{60}}\right) =$$
$$= \boxed{(1.7188,\ 1.7412)}$$

El intervalo de confianza puede construirse porque X sigue una distribución Normal (si no la hubiese seguido, podría construirse, aunque de forma aproximada, porque el tamaño de la muestra es mayor o igual que 30, y entonces puede aceptarse la aproximación que demuestra el *Teorema Central del Límite*).

Esto último es obligatorio decirlo.

b) Halle el tamaño mínimo que debe tener una muestra de esta población para que la amplitud de un intervalo de la media con este nivel de confianza sea inferior a 0.08 m. *(1 punto)*

La amplitud es el doble del error:

$$A = 2E = 2\,z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2\cdot 2.17\frac{0.04}{\sqrt{n}} < 0.08 \ \Rightarrow\ \frac{2\cdot 2.17\cdot 0.04}{0.08} < \sqrt{n} \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ \sqrt{n} > \frac{2\cdot 2.17\cdot 0.04}{0.08} \ \Rightarrow\ n > \left(\frac{2\cdot 2.17\cdot 0.04}{0.08}\right)^2 = 4.7089 \ \Rightarrow\ \boxed{n = 5}.$$

puesto que tiene que ser un número natural el tamaño de la muestra, y debe ser mayor que el valor obtenido. Observar que el tamaño muestral necesario es muy pequeño, pero es lo que nos piden.

NOMBRE: ____

Instrucciones: **1)** Todos los **folios** deben tener el **nombre** y estar **numerados** en la parte superior. **2)** Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. **3)** No se puede usar **corrector ni lápiz**, y el bolígrafo debe ser de **tinta indeleble**. Se aconseja no usar borrador. **4)** Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar** la respuesta a una pregunta con las de otras. **5)** **Desatender las instrucciones puede penalizarse con hasta 1 punto** o la **anulación** en caso de usar tinta corregible.

1) **(2.5 puntos)** La capacidad máxima de trabajo de un taller que se dedica a la confección de pañuelos y corbatas es de 60 horas semanales. Cada pañuelo que confecciona le supone 2 horas de trabajo y le reporta un beneficio de 4 euros. En el caso de las corbatas son 3 horas y 6 euros respectivamente por unidad. Contrae el compromiso de que el número de corbatas confeccionadas más el doble del número de pañuelos debe ser, como mínimo, 28. Con estas condiciones, ¿cuántas unidades de cada tipo de prenda debe confeccionar para obtener un beneficio económico máximo?

2) Sean A, B, C, D, E y F sucesos de un experimento aleatorio.
   a) **(0.5 puntos)** Se sabe que $P(A) = 0.5$, $P(A \cup B) = 0.7$ y $P(A \cap B) = 0.4$. Halle la probabilidad de que ocurra B.
   b) **(1 punto)** Se sabe que $P(C) = 0.4$, $P(D) = 0.3$ *y* $P(C \cup D) = 0.5$. Halle la probabilidad de que ocurra C sabiendo que no ocurre D.
   c) **(1 punto)** Se sabe que los sucesos E y F son independientes, que $P(E) = 0.6$ y que $P(F) = 0.8$. Calcule la probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos sucesos.

3) Se desea estimar el porcentaje de jóvenes que utilizan una determinada red social. Para ello se escoge una muestra aleatoria simple de 500 jóvenes y de ellos 410 afirman utilizarla.
   a) **(1.5 puntos)** Calcule el intervalo de confianza para la proporción de jóvenes que usa esa red social con un nivel de confianza del 95%.
   b) **(1 punto**) Manteniendo la proporción muestral, determine el tamaño mínimo de la muestra necesario para que, con un nivel de confianza del 97%, el error máximo que se cometa al estimar la proporción de esa población sea inferior a 0.04.

4) El gasto que tienen los jóvenes durante un fin de semana es una variable aleatoria que sigue una distribución Normal de media μ desconocida y desviación típica igual a 6 euros.
   a) **(0.5 puntos)** ¿Qué distribución de probabilidad sigue la media muestral para muestras de tamaño 16?
   b) **(1 puntos)** Se toma una muestra aleatoria simple y se obtiene que el intervalo de confianza al 95% para la media μ es $(24.47, 26.43)$. Calcule el valor de la media muestral y el tamaño de la muestra elegida.
   c) **(1 punto)** Escogida otra muestra de tamaño 49 para estimar μ, calcule el error máximo cometido para esa estimación con un nivel de confianza del 97%.

SOLUCIONES

1) **(2.5 puntos)** La capacidad máxima de trabajo de un taller que se dedica a la confección de pañuelos y corbatas es de 60 horas semanales. Cada pañuelo que confecciona le supone 2 horas de trabajo y le reporta un beneficio de 4 euros. En el caso de las corbatas son 3 horas y 6 euros respectivamente por unidad. Contrae el compromiso de que el número de corbatas confeccionadas más el doble del número de pañuelos debe ser, como mínimo, 28. Con estas condiciones, ¿cuántas unidades de cada tipo de prenda debe confeccionar para obtener un beneficio económico máximo?

Distribuimos los datos en un cuadro para plantear el problema:

Productos	Unidades a confeccionar	Tiempo (h)	Beneficio (€)
Pañuelos	x	$2x$	$4x$
Corbatas	y	$3y$	$6y$
Restricciones:	$x \geq 0;\ y \geq 0$ $2x + y \geq 28$	$2x + 3y \leq 60$	$f(x, y) = 4x + 6y$

O sea, que hay que maximizar $f(x, y) = 4x + 6y$ sujeta a: $x \geq 0;\ y \geq 0;\ 2x + y \geq 28;\ 2x + 3y \leq 60$.

Estudiamos las restricciones con objeto de dibujar la *región factible*:

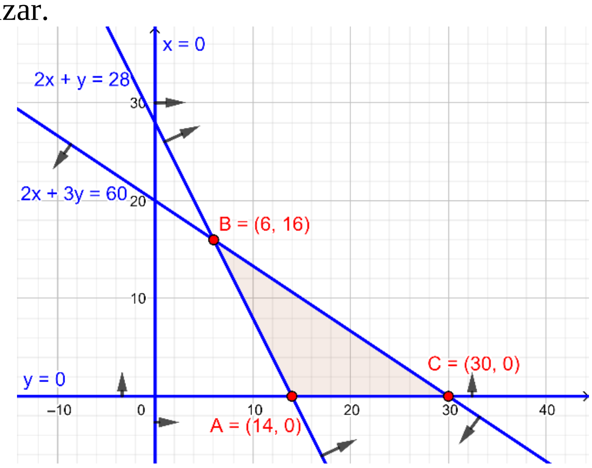
- $x \geq 0,\ y \geq 0$ nos restringen al *primer cuadrante*.
- $2x + y \geq 28 \Leftrightarrow y \geq -2x + 28$, que es el *semiplano superior* a la recta $y=-2x+28$, cuya tabla de valores es:

x	0	14
y	28	0

- $2x + 3y \leq 60 \Leftrightarrow y \leq \dfrac{-2x+60}{3}$, que es el *semiplano inferior* a la recta $y = \dfrac{-2x+60}{3}$, cuya tabla de valores es:

x	0	30
y	20	0

Las llevamos a un gráfico, del que ya sabemos que la x debe llegar hasta 30, al menos, y la y hasta 28. Marcamos los semiplanos que nos interesan y, de ahí, concluimos cuál es la *región factible*. Señalamos los *vértices* y procedemos a calcularlos analíticamente, porque <u>de un gráfico nunca se pueden extraer resultados de cálculos</u>. En el gráfico ya hemos señalado los resultados de estos cálculos, que procedemos a realizar.



- $\boxed{A(14, 0)}$, y se obtiene de la primera de las tablas de valores usadas.
- $\boxed{C(30, 0)}$, de la segunda de las tablas.
- B es la intersección de las dos rectas oblicuas:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+y=28 \\ 2x+3y=60 \end{array}\right\} \Rightarrow \cdot(-1): \begin{array}{r} 2x+y=28 \\ \underline{-2x-3y=-60} \\ -2y=-32 \end{array} \Rightarrow y=16 \quad \Rightarrow \begin{array}{l} 2x+y=28 \Rightarrow \\ 2x=28-y \Rightarrow \\ x=\dfrac{28-16}{2}=6 \end{array}$$

Por tanto, $\boxed{B(6, 16)}$.

Evaluamos la función objetivo en cada vértice:

- $f(A) = f(14, 0) = 4\cdot 14 + 6\cdot 0 = 56$
- $f(B) = f(6, 16) = 4\cdot 6 + 6\cdot 16 = 120$
- $f(C) = f(30, 0) = 4\cdot 30 + 6\cdot 0 = 120$

Por tanto, el beneficio máximo es de 120€, que se obtiene en todos los puntos del segmento BC, esto es, los puntos que verifican $2x + 3y = 60$ (la recta que contiene a ambos), con $6 \le x \le 30$. Lo que pasa es que no son infinitas, porque solo sirven soluciones que sean números naturales. Con la calculadora podemos especificar todas las soluciones en las siguientes parejas, donde el primer valor es el número de pañuelos y el segundo, el de corbatas: (6, 16), (9, 14), (12, 12), (15, 10), (18, 8), (21, 6), (24, 4), (27, 2), (30, 0).

2) Sean A, B, C, D, E y F sucesos de un experimento aleatorio.

a) **(0.5 puntos)** Se sabe que $P(A) = 0.5$, $P(A\cup B) = 0.7$ y $P(A\cap B) = 0.4$. Halle la probabilidad de que ocurra B.

La única fórmula en la que intervienen unión e intersección es:

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \boxed{P(B) =} P(A\cup B) - P(A) + P(A\cap B) = 0.7 - 0.5 + 0.4 = \boxed{0.6}$$

b) **(1 punto)** Se sabe que $P(C) = 0.4$, $P(D) = 0.3$ y $P(C\cup D) = 0.5$. Halle la probabilidad de que ocurra C sabiendo que no ocurre D.

Nos piden:

$$P(C/D^c) = \frac{P(C\cap D^c)}{P(D^c)} = \frac{P(C-D)}{1-P(D)} = \frac{P(C)-P(C\cap D)}{1-P(D)}$$

Para calcular la probabilidad de la intersección, empleamos la misma fórmula que antes:

$$P(C\cup D) = P(C) + P(D) - P(C\cap D) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P(C\cap D) = P(C) + P(D) - P(C\cup D) = 0.4 + 0.3 - 0.5 = 0.2$$

Sustituyendo:

$$\boxed{P(C/D^c) =} \frac{0.4-0.2}{1-0.3} = \boxed{\frac{2}{7} \approx 0.2857}$$

c) **(1 punto)** Se sabe que los sucesos E y F son independientes, que $P(E) = 0.6$ y que $P(F) = 0.8$. Calcule la probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos sucesos.

Si E y F son independientes, también lo son ellos con sus contrarios y sus contrarios entre si. Por tanto,

$$\boxed{P(E^c\cap F^c) =} P(E^c)\cdot P(F^c) = (1-0.6)(1-0.8) = \boxed{0.08}$$

3) Se desea estimar el porcentaje de jóvenes que utilizan una determinada red social. Para ello se escoge una muestra aleatoria simple de 500 jóvenes y de ellos 410 afirman utilizarla.

a) **(1.5 puntos)** Calcule el intervalo de confianza para la proporción de jóvenes que usa esa red social con un nivel de confianza del 95%.
Estamos construyendo un intervalo de confianza para estimar la *proporción poblacional*.

El intervalo puede construirse porque el tamaño de la muestra es $n = 500 \geq 30$, y entonces es válida la aproximación que de la Ley Binomial hace la Ley Normal en virtud del Teorema Central del Límite.

Tenemos:
$n = 500$ (*tamaño muestral*)
$\hat{p} = \dfrac{410}{500} = 0.82$ es la *proporción muestral*. $\Rightarrow$ $\hat{q} = 1 - \hat{p} = 0.18$

Como $1 - \alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 1 - 0.95 = 0.05 \Rightarrow 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0.975$. De donde $P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 0.975 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$, según las tablas de la N(0;1).

Por tanto, el intervalo para p al 95% es:
$$\left(\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}},\ \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right) =$$
$$= \left(0.82 - 1.96\sqrt{\frac{0.82 \cdot 0.18}{500}},\ 0.82 + 1.96\sqrt{\frac{0.82 \cdot 0.18}{500}}\right) = \boxed{(0.7863,\ 0.8537)}$$

El significado (que no se pide) es que de cada 100 intervalos construidos a partir de muestras como ésta, 95 de ellos contendrán el verdadero valor de la p poblacional.

b) **(1 punto)** Manteniendo la proporción muestral, determine el tamaño mínimo de la muestra necesario para que, con un nivel de confianza del 97%, el error máximo que se cometa al estimar la proporción de esa población sea inferior a 0.04.
Con el nuevo nivel de confianza:

$1 - \alpha = 0.97 \Rightarrow \alpha = 1 - 0.97 = 0.03 \Rightarrow 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0.985$. De donde $P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 0.985 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2.17$.

Queremos $E < 0.04 \Rightarrow z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}} < 0.04 \Rightarrow z^2_{\alpha/2}\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n} < 0.04^2 \Rightarrow z^2_{\alpha/2}\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{0.04^2} < n$

$\Rightarrow n > z^2_{\alpha/2}\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{0.04^2} = 2.17^2\dfrac{0.82 \cdot 0.18}{0.04^2} = 434.396$.

Dado que el tamaño muestral debe ser un número natural, el primer valor válido es $\boxed{n = 435}$.

4) El gasto que tienen los jóvenes durante un fin de semana es una variable aleatoria que sigue una distribución Normal de media μ desconocida y desviación típica igual a 6 euros.

a) **(0.5 puntos)** ¿Qué distribución de probabilidad sigue la media muestral para muestras de tamaño 16?

Como la variable aleatoria poblacional $X \equiv$ *gasto de un joven* sigue una Ley Normal: $X \sim N(\mu, 6) \Rightarrow \boxed{\bar{x} \sim} N(\mu, \frac{6}{\sqrt{16}}) = N(\mu, 6/4) = \boxed{N(\mu, 3/2)}$

b) **(1 puntos)** Se toma una muestra aleatoria simple y se obtiene que el intervalo de confianza al 95% para la media μ es $(24.47, 26.43)$. Calcule el valor de la media muestral y el tamaño de la muestra elegida.

La media muestral es el centro del intervalo de confianza:

$$\boxed{\bar{x} =} \frac{24.47 + 26.43}{2} = \boxed{25.45}$$

El error es la mitad de la amplitud:

$$E = \frac{26.43 - 24.47}{2} = 0.98 \Rightarrow z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0.98$$

Tenemos $\sigma = 6$. Y como $1 - \alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0.025 = 0.975$, de donde $P(Z \le z_{\alpha/2}) = 0.975 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$. Por tanto:

$$1.96\frac{6}{\sqrt{n}} = 0.98 \Rightarrow \boxed{n =} \left(\frac{1.96 \cdot 6}{0.98}\right)^2 = \boxed{144} \text{ jóvenes.}$$

c) **(1 punto)** Escogida otra muestra de tamaño 49 para estimar μ, calcule el error máximo cometido para esa estimación con un nivel de confianza del 97%.

Tenemos $n = 49$. Con el nuevo nivel de confianza:

$1 - \alpha = 0.97 \Rightarrow \alpha = 1 - 0.97 = 0.03 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.985$. De donde $P(Z \le z_{\alpha/2}) = 0.985 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2.17$.

Entonces: $\boxed{E \le} 2.17\frac{6}{\sqrt{49}} = \boxed{1.86}$, que está medido <u>en euros</u>, al igual que la variable aleatoria poblacional.