

NOMBRE _____

- 1) Resolver: $\sqrt{x+1} - \sqrt{7x+4} = -3$ (1 punto)
- 2) Resolver: $1 + 9^x = 3^{x+1} + 3^{x-1}$ (1,5 puntos)
- 3) Resolver: $2\log x + \log x^4 = 6$ (1 punto)
- 4) Resolver: $\frac{x}{x+1} - \frac{3}{x-1} = \frac{-6}{x^2-1}$ (1,5 puntos)
- 5) Resuelva el siguiente sistema de inecuaciones:
$$\begin{cases} 8x-4 < 15x+8 \\ \frac{2x+6}{5} \leq \frac{6-3x}{4} \end{cases}$$
 (1,5 puntos)
- 6) Resolver la inecuación $\frac{x^2-2x}{x+3} \geq 0$ (1,5 puntos)
- 7) Expresar en forma de intervalo y de entorno el conjunto $\{x \in \mathbb{R} / |x+3| < 2\}$ (1 punto)
- 8) Resolver: $|4 - |2x - 1|| = 3$ (1 punto)

SOLUCIONES

1) Resolver: $\sqrt{x+1} - \sqrt{7x+4} = -3$ (1 punto)

El procedimiento pasa por aislar el sumando que contiene a una de las raíces en un miembro, y elevar al cuadrado:

$$\begin{aligned}\sqrt{x+1} - \sqrt{7x+4} = -3 &\Rightarrow \sqrt{x+1} = \sqrt{7x+4} - 3 \Rightarrow (\sqrt{x+1})^2 = (\sqrt{7x+4} - 3)^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x+1 = 7x+4+9 - 6\sqrt{7x+4} \Rightarrow 6\sqrt{7x+4} = 6x+12 \Rightarrow \sqrt{7x+4} = x+2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\sqrt{7x+4})^2 = (x+2)^2 \Rightarrow 7x+4 = x^2 + 4x+4 \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ó} \\ x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \end{cases}\end{aligned}$$

Este último paso es porque un producto vale 0 si, y sólo si alguno de los factores se anula. Cuando elevamos al cuadrado una ecuación, siempre se pueden introducir soluciones falsas. Las comprobamos:

- $x = 0 \Rightarrow \sqrt{0+1} - \sqrt{7 \cdot 0 + 4} = 1 - 2 = -1 \neq -3$. No es válida.
- $x = 3 \Rightarrow \sqrt{3+1} - \sqrt{7 \cdot 3 + 4} = 2 - 5 = -3$. Válida.

Solución única: $\boxed{x=3}$.

2) Resolver: $1 + 9^x = 3^{x+1} + 3^{x-1}$ (1,5 puntos)

$$\begin{aligned}1 + 9^x = 3^{x+1} + 3^{x-1} &\Rightarrow 1 + (3^2)^x = 3 \cdot 3^x + \frac{3^x}{3} \Rightarrow 1 + 3^{2x} = 3 \cdot 3^x + \frac{3^x}{3} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 1 + (3^x)^2 = 3 \cdot 3^x + \frac{3^x}{3} \Rightarrow \text{Con el cambio de incógnita } t = 3^x, \text{ queda:} \\ 1 + t^2 = 3t + \frac{t}{3} &\Rightarrow 3 + 3t^2 = 9t + t \Rightarrow 3t^2 - 10t + 3 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow t = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{6} = \frac{10 \pm 8}{6} = \left\langle \begin{matrix} 1/3 \\ 3 \end{matrix} \right.\end{aligned}$$

Deshacemos el cambio:

- Si $t = 1/3 \Rightarrow 3^x = 1/3 \Rightarrow 3^x = 3^{-1} \Rightarrow \boxed{x=-1}$
- Si $t = 3 \Rightarrow 3^x = 3 \Rightarrow 3^x = 3^1 \Rightarrow \boxed{x=1}$

3) Resolver: $2\log x + \log x^4 = 6$ (1 punto)

$$\begin{aligned}2\log x + \log x^4 = 6 &\Rightarrow \log x^2 + \log x^4 = \log 10^6 \Rightarrow \log x^2 \cdot x^4 = \log 10^6 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \log x^6 = \log 10^6 \Rightarrow x^6 = 10^6 \Rightarrow x = \pm \sqrt[6]{10^6} = \pm 10.\end{aligned}$$

que $\boxed{x=10}$ es válida, porque no hace 0 ni negativo ningún argumento de logaritmo. Pero no ocurre lo mismo con $x = -10$, puesto que en el primer sumando de la ecuación original habría que tomarle logaritmos, y no existe el logaritmo de un número negativo: esta otra solución *no es válida*.

Este tipo de inconvenientes no se suele presentar si se opta por averiguar el valor de $\log x$ en lugar de quitar logaritmos, como hemos hecho antes. Además, las ecuaciones suelen ser más sencillas. Volvamos a resolver la ecuación de esta otra forma:

$$\begin{aligned}2\log x + \log x^4 = 6 &\Rightarrow 2\log x + 4\log x = 6 \Rightarrow 6\log x = 6 \Rightarrow \log x = 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \boxed{x=10}\end{aligned}$$

que es válida puesto que no anula argumentos de log en la ecuación original.

4) Resolver: $\frac{x}{x+1} - \frac{3}{x-1} = \frac{-6}{x^2-1}$ (1,5 puntos)

$$\frac{x}{x+1} - \frac{3}{x-1} = \frac{-6}{x^2-1} \Rightarrow \frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)} - \frac{3(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{-6}{(x-1)(x+1)}$$

Esta igualdad será cierta cuando los numeradores coincidan. Pero para valores que no anulen el denominador, como veremos más adelante:

$$x^2 - x - 3(x+1) = -6 \Rightarrow x^2 - x - 3x - 3 + 6 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{2}{2} = 1 \\ \frac{6}{2} = 3 \end{cases}$$

Pero en las ecuaciones donde la x está en el denominador hay que validar las soluciones obtenidas, comprobando que no anulan ningún denominador en la ecuación original. En este caso, $x = 1$ no es válida por tal motivo. Luego la única solución es: $\boxed{x = 3}$.

5) Resuelva el siguiente sistema de inecuaciones: $\begin{cases} 8x - 4 < 15x + 8 \\ \frac{2x+6}{5} \leq \frac{6-3x}{4} \end{cases}$ (1,5 puntos)

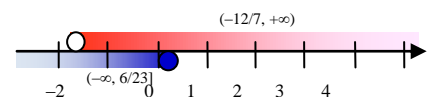
Resolvemos cada inecuación por separado.

- $8x - 4 < 15x + 8 \Rightarrow -4 - 8 < 15x - 8x \Rightarrow -12 < 7x \Rightarrow -\frac{12}{7} < x \Rightarrow x > -\frac{12}{7}$

Hemos pasado las x al segundo miembro para que se simplifiquen en un sumando con coeficiente positivo. Además, la penúltima desigualdad leída de derecha a izquierda es exactamente igual a la última desigualdad leída en la forma habitual. Más adelante, representaremos gráficamente la solución obtenida, junto con la de la otra inecuación, para obtener la solución del sistema.

- $\frac{2x+6}{5} \leq \frac{6-3x}{4} \Rightarrow$ Pasamos los divisores multiplicando a los miembros contrarios; como ambos son positivos, no cambia el sentido de la desigualdad:
 $4(2x+6) \leq 5(6-3x) \Rightarrow 8x+24 \leq 30-15x \Rightarrow 8x+15x \leq 30-24 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 23x \leq 6 \Rightarrow x \leq \frac{6}{23}$

Llevamos a un mismo gráfico ambas soluciones:



Y observamos que los valores de x que son soluciones de ambas inecuaciones, es decir, los que verifican ambas condiciones, o sea, los que están en las dos zonas coloreadas a la vez, son los valores de x del intervalo $(-12/7, 6/23]$, que está abierto en $-12/7$, ya que este punto es solución de la segunda inecuación (zona inferior, azul), pero no de la primera (zona superior, rosa), y cerrado en $6/23$, pues dicho valor está en ambas zonas. Por tanto, la solución del sistema son los valores del intervalo:

$$\boxed{(-12/7, 6/23]}$$

6) Resolver la inecuación $\frac{x^2 - 2x}{x + 3} \geq 0$ (1,5 puntos)

- Descomponemos factorialmente y calculamos las raíces de los polinomios del numerador y del denominador:

$$x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{ó} \\ x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

porque un producto vale 0 si, y sólo si alguno de los factores es 0. Tenemos la descomposición factorial y las raíces, en los dos últimos pasos.

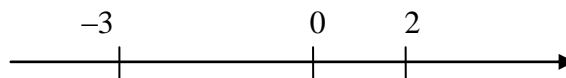
$$x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$$

Por consiguiente, la inecuación se transforma en:

$$\frac{x(x - 2)}{x + 3} \geq 0$$

lo que nos lleva a evaluar el signo de esa expresión.

- Dividimos \mathbb{R} en intervalos mediante las raíces obtenidas:



Evaluamos el signo de la expresión en cada uno de los intervalos resultantes. Para ello, basta con elegir un valor cualquiera de x en cada intervalo, porque el signo será el mismo, en ese intervalo, para cualquier valor de x que elijamos:

	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$x + 3$	-	0	+	...	+	...	+
x	-	...	-	0	+	...	+
$x - 2$	-	...	-	...	-	0	+
$\frac{x(x - 2)}{x + 3}$	-	\nexists	+	0	-	0	+
¿Sirven? \rightarrow	No	No	Si	Si	No	Si	Si

Luego la solución de la inecuación es:

$$x \in (-3, 0] \cup [2, +\infty)$$

7) Expresar en forma de intervalo y de entorno el conjunto $\{x \in \mathbb{R} / |x + 3| < 2\}$ (1 punto)
Según una de las definiciones de entorno, ese conjunto es:

$$E(-3, 2) = (-3 - 2, -3 + 2) = (-5, -1)$$

8) Resolver: $|4 - |2x - 1|| = 3$ (1 punto)
Según las propiedades del valor absoluto:

$$|4 - |2x - 1|| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - |2x - 1| = 3 \Leftrightarrow 1 = |2x - 1| \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 1 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1 \\ \text{ó} \\ 2x - 1 = -1 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \end{cases} \\ 4 - |2x - 1| = -3 \Leftrightarrow 7 = |2x - 1| \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 7 \Leftrightarrow 2x = 8 \Leftrightarrow x = 4 \\ \text{ó} \\ 2x - 1 = -7 \Leftrightarrow 2x = -6 \Leftrightarrow x = -3 \end{cases} \end{cases}$$

Hay cuatro soluciones posibles: $\{-3, 0, 1, 4\}$.

NOMBRE: _____

1ª EVALUACIÓN: APROBADA SUSPENDIDA (Marcar lo correcto)

1) (No para quienes tengan suspendida la 1ª evaluación) Resolver la ecuación siguiente: $2x + \sqrt{x^2 - 6x + 2} = 1$

2) (No para quienes tengan suspendida la 1ª evaluación) Resolver la ecuación siguiente: $3^{x-4} + 5 \cdot 3^x - 3^{x+1} = 163$

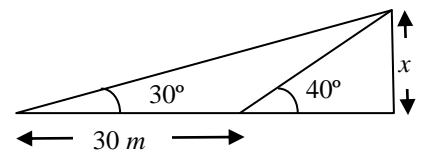
3) (No para quienes tengan suspendida la 1ª evaluación) Resolver la ecuación siguiente: $\frac{x}{x+1} + \frac{2}{x-1} = \frac{8}{x^2-1}$

4) Resolver: $\log x^2 - \log 3 = \log x + \log 5$

5) Resolver la inecuación $\frac{x^2 - 3x}{x + 2} \geq 0$ (1,5 puntos)

6) Hallar x en base al gráfico adjunto.

7) Sin calculadora, siendo $\cotg \alpha = -2$, $90^\circ < \alpha < 270^\circ$, hallar el resto de razones trigonométricas de α . A continuación, con ayuda de la calculadora, decir el valor de α en grados, minutos, segundos.



8) Expresar en función de un ángulo del primer cuadrante: $\operatorname{tg}(-275^\circ)$ y $\cos 7770^\circ$

9) Demostrar la veracidad de la siguiente identidad: $\frac{\operatorname{cosec} \alpha}{1 + \cotg^2 \alpha} = \operatorname{sen} \alpha$ (1,5 puntos)

1 bis) (Sólo para quienes tienen suspendida la 1ª evaluación) a) Simplificar al máximo:

$$\frac{\sqrt[4]{a^9}}{a\sqrt{a^3}}$$

b) Racionalizar: $\frac{3}{4 - 3\sqrt{3}}$

2 bis) (Sólo para quienes tienen suspendida la 1ª evaluación) Hallar la suma de 10 términos de $1, x, x^2, \dots$

3 bis) (Sólo para quienes tienen suspendida la 1ª evaluación) a) Factorizar el polinomio siguiente (sin usar calculadora): $9x^2 - 102x + 331x - 238$. b) Resolver la ecuación: $9x^2 - 102x + 331x - 238 = 0$ (utilizar los cálculos del apartado anterior)

SOLUCIONES

- 1) (No para quienes tengan suspendida la 1ª evaluación) Resolver la ecuación siguiente: $2x + \sqrt{x^2 - 6x + 2} = 1$

Aislamos el sumando que contiene la raíz cuadrada y elevamos al cuadrado ambos miembros de la ecuación:

$$\begin{aligned} 2x + \sqrt{x^2 - 6x + 2} = 1 &\Rightarrow \sqrt{x^2 - 6x + 2} = 1 - 2x \Rightarrow (\sqrt{x^2 - 6x + 2})^2 = (1 - 2x)^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x^2 - 6x + 2 = 1 - 4x + 4x^2 \Rightarrow 0 = 4x^2 - 4x + 1 - x^2 + 6x - 2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 0 = 3x^2 + 2x - 1 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{6} = \frac{-2 \pm 4}{6} = \left\langle \begin{array}{l} \frac{-6}{6} = -1 \\ \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Como siempre que elevamos al cuadrado, hay que comprobar la validez de las soluciones, sustituyendo en la ecuación original:

- $x = -1$: $-2 + \sqrt{1 + 6 + 2} = -2 + 3 = 1$: válida
- $x = 1/3$: Sustituimos y realizamos la operación con la calculadora, y resulta ser igualmente válida.

- 2) (No para quienes tengan suspendida la 1ª evaluación) Resolver la ecuación siguiente: $3^{x-4} + 5 \cdot 3^x - 3^{x+1} = 163$

Buscamos que aparezca repetidamente la misma base con el mismo exponente, conteniendo a la incógnita:

$$3^{x-4} + 5 \cdot 3^x - 3^{x+1} = 163 \Rightarrow \frac{3^x}{3^4} + 5 \cdot 3^x - 3^x \cdot 3 = 163$$

Hacemos el cambio de incógnita $t = 3^x$:

$$\frac{t}{81} + 5t - 3t = 163 \Rightarrow \frac{t + 405t - 243t}{81} = 163 \Rightarrow 163t = 163 \cdot 81 \Rightarrow t = 81$$

Deshacemos el cambio:

$$3^x = 81 \Rightarrow 3^x = 3^4 \Rightarrow \boxed{x = 4}$$

- 3) (No para quienes tengan suspendida la 1ª evaluación) Resolver la ecuación siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{x}{x+1} + \frac{2}{x-1} &= \frac{8}{x^2-1} \\ \frac{x}{x+1} + \frac{2}{x-1} &= \frac{8}{x^2-1} \Rightarrow \frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)} + \frac{2(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{8}{x^2-1} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{x(x-1) + 2(x+1)}{x^2-1} &= \frac{8}{x^2-1} \Rightarrow x^2 - x + 2x + 2 = 8 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \left\langle \begin{array}{l} \frac{-6}{2} = -3 \\ \frac{4}{2} = 2 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Como ninguna de las dos anula ningún denominador en la ecuación original, ambas son válidas: $\boxed{x = -3 \text{ ó } x = 2}$.

- 4) Resolver: $\log x^2 - \log 3 = \log x + \log 5$

Sabemos que suelen ser más fáciles las ecuaciones si, en lugar de quitar logaritmos y calculamos el valor de x , averiguamos directamente el valor de $\log x$. Así:

$$\begin{aligned} \log x^2 - \log 3 = \log x + \log 5 &\Rightarrow 2\log x - \log x = \log 3 + \log 5 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \log x = \log 3 \cdot 5 \Rightarrow \log x = \log 15 \Rightarrow \boxed{x = 15}. \end{aligned}$$

La solución obtenida es válida porque no hace negativo ni cero ningún argumento de logaritmos en la ecuación original.

5) Resolver la inecuación $\frac{x^2 - 3x}{x + 2} \geq 0$ (1,5 puntos)

Factorizamos y hallamos las raíces de numerador y denominador por separado:

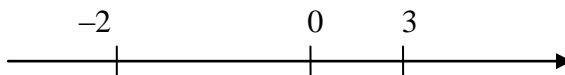
- $x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 0$ ó $x = 3$. La factorización es $x(x - 3)$.
- $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$. La factorización es $x + 2$.

La inecuación queda así:

$$\frac{x(x-3)}{x+2} \geq 0$$

Eso significa que hay que encontrar los valores de x que hacen que la expresión del primer miembro sea positiva o nula.

Dividimos \mathbb{R} en intervalos mediante las raíces obtenidas y creamos el siguiente cuadro. En cada uno de los intervalos resultantes, cualquier valor de x que elijamos producirá el mismo signo para cada uno de los factores que participan en la inecuación y, por tanto, en la expresión cuyo signo evaluamos:

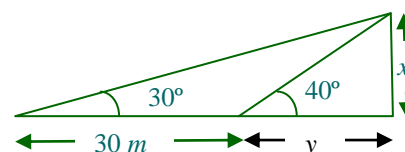


	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 0)$	0	$(0, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$x + 2$	-	0	+	...	+	...	+
x	-	...	-	0	+	...	+
$x - 3$	-	...	-	...	-	0	+
$\frac{x(x-3)}{x+2}$	-	\neq	+	0	-	0	+
¿Sirven? →	No	No	Si	Si	No	Si	Si

Por tanto, la solución son los elementos de: $\boxed{(-2, 0] \cup [3, +\infty)}$

6) Hallar x en base al gráfico adjunto.

Llamando y a la base del triángulo rectángulo más pequeño de la derecha, se tiene, si nos fijamos en dicho triángulo y en el triángulo total (ambos son rectángulos):



$$\begin{cases} \operatorname{tg} 40^\circ = \frac{x}{y} \\ \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{x}{30 + y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \operatorname{tg} 40^\circ \\ x = (30 + y) \operatorname{tg} 30^\circ \end{cases} \Rightarrow \text{Igualamos:}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y \operatorname{tg} 40^\circ &= (30 + y) \operatorname{tg} 30^\circ \Rightarrow y \operatorname{tg} 40^\circ = 30 \operatorname{tg} 30^\circ + y \operatorname{tg} 30^\circ \Rightarrow \\ \Rightarrow y \operatorname{tg} 40^\circ - y \operatorname{tg} 30^\circ &= 30 \operatorname{tg} 30^\circ \Rightarrow y(\operatorname{tg} 40^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ) = 30 \operatorname{tg} 30^\circ \Rightarrow \\ \Rightarrow y &= \frac{30 \operatorname{tg} 30^\circ}{\operatorname{tg} 40^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ} \end{aligned}$$

$$\text{De donde: } x = y \operatorname{tg} 40^\circ = \frac{30 \operatorname{tg} 30^\circ}{\operatorname{tg} 40^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ} \operatorname{tg} 40^\circ = \boxed{\frac{30 \operatorname{tg} 30^\circ \operatorname{tg} 40^\circ}{\operatorname{tg} 40^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ} \approx 55,52 \text{ m}}$$

- 7) Sin calculadora, siendo $\cotg \alpha = -2$, $90^\circ < \alpha < 270^\circ$, hallar el resto de razones trigonométricas de α . A continuación, con ayuda de la calculadora, decir el valor de α en grados, minutos, segundos.

Como la cotangente es negativa en el segundo cuadrante y positiva en el tercero, el ángulo está en el segundo cuadrante.

$$\bullet \quad \boxed{\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\cotg \alpha} = -\frac{1}{2}}$$

$$\bullet \quad 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos \alpha = -\sqrt{\frac{4}{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}}, \text{ negativo por ser del segundo cuadrante.}$$

$$\bullet \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \boxed{\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{tg} \alpha \cos \alpha = \frac{-1}{2} \cdot \frac{-2\sqrt{5}}{5} = \frac{\sqrt{5}}{5}}$$

$$\bullet \quad \boxed{\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{1}{-2/\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{2}}$$

$$\bullet \quad \boxed{\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{1}{\sqrt{5}/5} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}}$$

Con la calculadora, obtenemos (partiendo de que $\operatorname{tg} \alpha = -1/2$), que $\alpha = -26,57^\circ$. Como es del II cuadrante: $\boxed{\alpha = -26,57^\circ + 180^\circ = 153,43^\circ = 153^\circ 26' 5,82''}$

- 8) Expresar en función de un ángulo del primer cuadrante: $\operatorname{tg}(-275^\circ)$ y $\cos 7770^\circ$

- $\bullet \quad \operatorname{tg}(-275^\circ) = \operatorname{tg}(-275^\circ + 360^\circ) = \operatorname{tg} 85^\circ$, pues al dar una vuelta completa estamos en la misma posición inicial sobre la circunferencia.
- $\bullet \quad \cos 7770^\circ = \cos 210^\circ = -\cos(210^\circ - 180^\circ) = \boxed{-\cos 30^\circ}$ ya que es la relación entre el coseno de ángulos del tercer y primer cuadrante. El valor de 210° es el resto de dividir 7770° entre 360° (son 21 vueltas completas más dicho resto).

- 9) Demostrar la veracidad de la siguiente identidad: $\frac{\operatorname{cosec} \alpha}{1 + \cotg^2 \alpha} = \operatorname{sen} \alpha$ (1,5 puntos)

$$\boxed{\frac{\operatorname{cosec} \alpha}{1 + \cotg^2 \alpha} = \frac{\frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}}{\frac{1}{\operatorname{sen}^2 \alpha}} = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = \operatorname{sen} \alpha}$$

- 1 bis) (Sólo para quienes tienen suspendida la 1ª evaluación) a) Simplificar al máximo:

$$\frac{\sqrt[4]{a^9}}{a\sqrt{a^3}}$$

$$\frac{\sqrt[4]{a^9}}{a\sqrt{a^3}} = \frac{\sqrt[4]{a^8 a}}{a\sqrt{a^2 a}} = \frac{a^2 \sqrt[4]{a}}{a \cdot a \sqrt{a}} = \frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt[4]{a} \sqrt[4]{a^2}}{a} = \boxed{\frac{\sqrt[4]{a^3}}{a}}$$

- b) Racionalizar: $\frac{3}{4 - 3\sqrt{3}}$

$$\frac{3}{4-3\sqrt{3}} = \frac{3}{4-3\sqrt{3}} \frac{4+3\sqrt{3}}{4+3\sqrt{3}} = \frac{3(4+3\sqrt{3})}{4^2 - (3\sqrt{3})^2} = \frac{12+9\sqrt{3}}{16-3^2(\sqrt{3})^2} = \frac{12+9\sqrt{3}}{16-27} =$$

$$= \boxed{\frac{12+9\sqrt{3}}{11}}$$

2 bis) (Sólo para quienes tienen suspendida la 1ª evaluación) Hallar la suma de 10 términos de $1, x, x^2, \dots$

Se trata de una progresión geométrica con $a_1 = 1, r = x$. Por tanto:

$$s_{10} = \frac{a_1(r^{10} - 1)}{r - 1} = \boxed{\frac{x^{10} - 1}{x - 1}}$$

Aunque damos este resultado final, se podría dividir por Ruffini, resultando una expresión polinómica.

3 bis) (Sólo para quienes tienen suspendida la 1ª evaluación) a) Factorizar el polinomio siguiente (sin usar calculadora): $9x^2 - 102x + 331x - 238$. b) Resolver la ecuación: $9x^2 - 102x + 331x - 238 = 0$ (utilizar los cálculos del apartado anterior)

Mediante Ruffini:

1	9	-102	331	-238	
		9	-93	238	
	9	-93	238	0	

Como no encontramos más valores, hallamos las posibles raíces restantes resolviendo la ecuación de segundo grado:

$$9x^2 - 93x + 238 = 0 \Rightarrow x = \frac{93 \pm \sqrt{8649 - 8568}}{18} = \frac{93 \pm 9}{18} = \left\langle \begin{array}{l} = \frac{84}{18} = \frac{14}{3} \\ = \frac{102}{18} = \frac{17}{3} \end{array} \right.$$

Luego: $\boxed{9x^3 - 102x^2 + 331x - 238 = 9(x - 1)(x - 14/3)(x - 17/3)}$

Según lo anterior, las raíces son: $\boxed{1, 14/3, 17/3}$.

NOMBRE: _____

- 1) Simplificar las siguientes expresiones, racionalizando el denominador, en su caso:
- a) $\frac{\sqrt[4]{x^{10}}}{x^2 \sqrt[3]{x^4}}$ (0,5 puntos)
- b) $\frac{\sqrt{3} - 2\sqrt{5}}{\sqrt{3} + 2\sqrt{5}}$ (0,5 puntos)
- 2) Los primeros términos de una sucesión son: $a_1 = 7$; $a_2 = 14$; $a_3 = 28$; y así sucesivamente, multiplicando el término anterior por 2 para obtener el que le sigue. Se pide:
- a) ¿Qué tipo de sucesión es? (0,1 punto)
- b) Empleando alguna fórmula adecuada al tipo de sucesión que es, sumar sus 12 primeros términos. (0,9 puntos)
- 3) Calcular 37^2 . (0 puntos)
- a) Hallar el valor de m para que el resto de dividir $P(x)$ entre $x - 2$ sea -45 , siendo $P(x) = mx^3 - 13x^2 - 48x + 55$ (0,5 puntos)
- b) Sin usar la calculadora, factorizar $Q(x) = 6x^3 - 13x^2 - 48x + 55$ (0,5 puntos)
- 4) Resolver las ecuaciones:
- a) $\frac{x-3}{x+3} - \frac{x+3}{x-3} = \frac{x-2}{x+3}$ (1 punto)
- b) $5 \log x = 3 + \log \frac{x^3}{10}$ (1 punto)
- c) $5^{2x} - 30 \cdot 5^x + 125 = 0$ (1 punto)
- d) $2\sqrt{2x+3} = 3 + \sqrt{3x}$ (1 punto)
- 5) Resolver la inecuación $\frac{x+3}{x^2-4x} \geq 0$ (1 punto)
- 6) Contestar las siguientes cuestiones:
- a) Sin calculadora, siendo $\operatorname{tg} \alpha = -2$, $90^\circ < \alpha < 270^\circ$, hallar el resto de razones trigonométricas de α . A continuación, con ayuda de la calculadora, decir el valor de α en grados, minutos, segundos. (1 punto)
- b) Hallar sin calculadora el valor exacto de $\operatorname{sen} 1650^\circ$. (0,5 puntos)
- c) Convertir a radianes 150° , expresándolo mediante una expresión simplificada que en la que aparezca π . (0,5 puntos)

SOLUCIONES

1) Simplificar las siguientes expresiones, racionalizando el denominador, en su caso:

a) $\frac{\sqrt[4]{x^{10}}}{x^2 \sqrt[3]{x^4}}$ (0,5 puntos)

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[4]{x^{10}}}{x^2 \sqrt[3]{x^4}} &= \frac{\sqrt{x^5}}{x^2 \sqrt[3]{x^3 x}} = \frac{\sqrt{x^4 x}}{x^2 x \sqrt[3]{x}} = \frac{x^2 \sqrt{x}}{x^3 \sqrt[3]{x}} = \frac{\sqrt{x} \sqrt[3]{x^2}}{x \sqrt[3]{x} \sqrt[3]{x^2}} = \frac{\sqrt{x} \sqrt[3]{x^2}}{x \sqrt[3]{x^3}} = \\ &= \frac{\sqrt[6]{x^3} \sqrt[6]{x^4}}{x x} = \frac{\sqrt[6]{x^7}}{x^2} = \frac{x \sqrt[6]{x}}{x^2} = \boxed{\frac{\sqrt[6]{x}}{x}} \end{aligned}$$

b) $\frac{\sqrt{3}-2\sqrt{5}}{\sqrt{3}+2\sqrt{5}}$ (0,5 puntos)

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}-2\sqrt{5}}{\sqrt{3}+2\sqrt{5}} &= \frac{\sqrt{3}-2\sqrt{5}}{\sqrt{3}+2\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{3}-2\sqrt{5}}{\sqrt{3}-2\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{3}-2\sqrt{5})^2}{(\sqrt{3})^2 - (2\sqrt{5})^2} = \frac{3-4\sqrt{15}+4\cdot 5}{3-4\cdot 5} = \\ &= \frac{23-4\sqrt{15}}{-17} = \boxed{\frac{4\sqrt{15}-23}{17}} \end{aligned}$$

2) Los primeros términos de una sucesión son: $a_1 = 7$; $a_2 = 14$; $a_3 = 28$; y así sucesivamente, multiplicando el término anterior por 2 para obtener el que le sigue. Se pide:

a) ¿Qué tipo de sucesión es? (0,1 punto)

Es una progresión geométrica, con $a_1 = 7$ y $r = 2$.

b) Empleando alguna fórmula adecuada al tipo de sucesión que es, sumar sus 12 primeros términos. (0,9 puntos)

$$s_{12} = \frac{a_1(r^{12}-1)}{r-1} = \frac{7(2^{12}-1)}{2-1} = \boxed{28665}$$

3) Calcular 37^2 . (0 puntos)

$$\boxed{37^2 = 1369}$$

a) Hallar el valor de m para que el resto de dividir $P(x)$ entre $x - 2$ sea -45 , siendo $P(x) = mx^3 - 13x^2 - 48x + 55$ (0,5 puntos)

Según el Teorema del Resto, el resto de la citada división es:

$$P(2) = -45 \Leftrightarrow 8m - 13 \cdot 4 - 48 \cdot 2 + 55 = -45 \Leftrightarrow 8m - 93 = -45 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8m = 93 - 45 \Leftrightarrow m = \frac{48}{8} \Leftrightarrow \boxed{m = 6}$$

b) Sin usar la calculadora, factorizar $Q(x) = 6x^3 - 13x^2 - 48x + 55$ (0,5 puntos)
Intentamos, inicialmente, Ruffini:

	6	-13	-48	55
1		6	-7	-55
	6	-7	-55	0

Como no encontramos cómo continuar, resolvemos la correspondiente ecuación de segundo grado para averiguar si tiene más raíces:

$$6x^2 - 7x - 55 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 1320}}{12} = \frac{7 \pm 37}{12} = \left\langle \begin{aligned} &= \frac{-30}{12} = -\frac{5}{2} \\ &= \frac{44}{12} = \frac{11}{3} \end{aligned} \right.$$

Luego $P(x) = 6(x-1)(x+5/2)(x-11/3)$

4) Resolver las ecuaciones:

a) $\frac{x-3}{x+3} - \frac{x+3}{x-3} = \frac{x-2}{x+3}$ (1 punto)

$$\frac{x-3}{x+3} - \frac{x+3}{x-3} = \frac{x-2}{x+3} \Leftrightarrow \frac{(x-3)^2 - (x+3)^2}{(x+3)(x-3)} = \frac{(x-2)(x-3)}{(x+3)(x-3)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 - (x^2 + 6x + 9) = x^2 - 3x - 2x + 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 - x^2 - 6x - 9 = x^2 - 5x + 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -12x = x^2 - 5x + 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 = x^2 - 5x + 6 + 12x \Leftrightarrow x^2 + 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 24}}{2} = \frac{-7 \pm 5}{2} = \begin{cases} = \frac{-2}{2} = -1 \\ = \frac{-12}{2} = -6 \end{cases}$$

Ambas soluciones son válidas, puesto que no anulan los denominadores iniciales: $x = -1$ ó $x = -6$.

b) $5 \log x = 3 + \log \frac{x^3}{10}$ (1 punto)

$$5 \log x = 2 + \log \frac{x^3}{10} \Leftrightarrow 5 \log x = 2 + \log x^3 - \log 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5 \log x = 2 + 3 \log x - 1 \Leftrightarrow 5 \log x - 3 \log x = 1 \Leftrightarrow 2 \log x = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log x = 1/2 \Leftrightarrow x = 10^{1/2} \Leftrightarrow \boxed{x = \sqrt{10}}$$

La solución hallada es válida porque no anula los argumentos de los logaritmos de la ecuación inicial. En realidad, habría dos soluciones: $x = \pm\sqrt{10}$, pero $-\sqrt{10}$ no es válida, porque haría negativo el argumento del logaritmo del primer miembro de la ecuación original, lo que no es posible.

c) $5^{2x} - 30 \cdot 5^x + 125 = 0$ (1 punto)

$$5^{2x} - 30 \cdot 5^x + 125 = 0 \Leftrightarrow (5^x)^2 - 30 \cdot 5^x + 125 = 0$$

Llamando $t = 5^x$:

$$t^2 - 30t + 125 = 0 \Rightarrow t = \frac{30 \pm \sqrt{900 - 500}}{2} = \frac{30 \pm 20}{2} = \begin{cases} = \frac{10}{2} = 5 \\ = \frac{50}{2} = 25 \end{cases}$$

• Si $t = 5 \Rightarrow$ Como $t = 5^x$, $5^x = 5 \Rightarrow \boxed{x = 1}$

• Si $t = 25 \Rightarrow 5^x = 25 \Rightarrow 5^x = 5^2 \Rightarrow \boxed{x = 2}$

d) $2\sqrt{2x+3} = 3 + \sqrt{3x}$ (1 punto)

$$2\sqrt{2x+3} = 3 + \sqrt{3x} \Rightarrow (2\sqrt{2x+3})^2 = (3 + \sqrt{3x})^2 \Rightarrow$$

$$4(2x+3) = 9 + 6\sqrt{3x} + 3x \Rightarrow 8x + 12 = 9 + 6\sqrt{3x} + 3x \Rightarrow$$

$$8x + 12 - 9 - 3x = 6\sqrt{3x} \Rightarrow 5x + 3 = 6\sqrt{3x} \Rightarrow (5x + 3)^2 = (6\sqrt{3x})^2 \Rightarrow$$

$$25x^2 + 30x + 9 = 36 \cdot 3x \Rightarrow 25x^2 - 78x + 9 = 0 \Rightarrow x = \frac{78 \pm \sqrt{6084 - 900}}{50} =$$

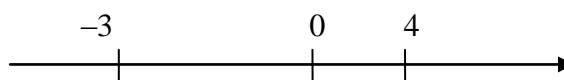
$$= \frac{78 \pm 72}{50} = \left\langle \begin{array}{l} = \frac{78-72}{50} = \frac{3}{25} \\ \frac{78+72}{50} = 3 \end{array} \right.$$

Ambas son válidas, como puede comprobarse sustituyendo en la ecuación original.

5) Resolver la inecuación $\frac{x+3}{x^2-4x} \geq 0$ (1 punto)

- Raíces del numerador: $x+3=0 \Rightarrow x=-3$. Factorizado: $x+3$.
- Raíces del denominador: $x^2-4x=0 \Rightarrow x(x-4)=0 \Rightarrow x=0$ ó $x=4$. Factorizado: $x(x-4)$.
- Inecuación resultante con los polinomios factorizados:

$$\frac{x+3}{x(x-4)} \geq 0$$



División de \mathbb{R} en intervalos mediante las raíces:

	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, 0)$	0	$(0, 4)$	4	$(4, +\infty)$
$x+3$	-	0	+	...	+	...	+
$x-0$	-	...	-	0	+	...	+
$x-4$	-	...	-	...	-	0	+
$\frac{x-3}{x(x-4)}$	-	0	+	\nexists	-	\nexists	+
¿Sirven? →	No	Si	Si	No	No	No	Si

Luego la solución son los puntos de: $[-3, 0) \cup (4, +\infty]$.

6) Contestar las siguientes cuestiones:

a) Sin calculadora, siendo $\text{tg } \alpha = -2$, $90^\circ < \alpha < 270^\circ$, hallar el resto de razones trigonométricas de α . A continuación, con ayuda de la calculadora, decir el valor de α en grados, minutos, segundos. (1 punto)

Como la tangente es negativa en el segundo cuadrante y positiva en el tercero, el ángulo está en el segundo cuadrante.

$$\bullet \cotg \alpha = \frac{1}{\text{tg } \alpha} = -\frac{1}{2}$$

$$\bullet 1 + \text{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \text{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{1 + (-2)^2} = \frac{1}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = -\sqrt{\frac{1}{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}, \text{ negativo por ser del segundo cuadrante.}$$

$$\bullet \text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \text{tg } \alpha \cos \alpha = -2 \frac{-\sqrt{5}}{5} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\bullet \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{1}{-1/\sqrt{5}} = -\sqrt{5}$$

$$\bullet \quad \text{cosec } \alpha = \frac{1}{\text{sen } \alpha} = \frac{1}{2\sqrt{5}/5} = \frac{5}{2\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{2 \cdot 5} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Con la calculadora, obtenemos (partiendo de que $\text{tg } \alpha = -2$), que $\alpha = -63,43^\circ$.
Como es del II cuadrante: $\alpha = -63,43^\circ + 180^\circ = 116,57^\circ = 116^\circ 33' 54''$

b) Hallar sin calculadora el valor exacto de $\text{sen } 1650^\circ$. (0,5 puntos)

$\text{sen } 1650^\circ = \text{sen } 210^\circ = -\text{sen } (210^\circ - 180^\circ) = -\text{sen } 30^\circ = \boxed{-1/2}$ ya que ésa es la relación entre el coseno de ángulos del tercer y primer cuadrante. El valor de 210° es el resto de dividir 1650° entre 360° (son 4 vueltas completas más dicho resto).

c) Convertir a radianes 150° , expresándolo mediante una expresión simplificada que en la que aparezca π . (0,5 puntos)

Usamos una simple regla de 3:

$$\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{x}{150^\circ} \Rightarrow x = \frac{150\pi}{180} = \boxed{\frac{5\pi}{6} \text{ rad}}$$